

Aplicación de un dispositivo didáctico basado en el modelo holístico del pensamiento geométrico para mejorar la cognición espacial en problemas de análisis vectorial

S. Coello Pisco^{a,b} y Y. González Cañizalez^a

^a*Departamento de Física, Universidad Estatal de Guayaquil, Av Dr. Raúl Gómez Lince y Av. Dr. Juan Tanca Marengo, Ecuador - Guayaquil.*

^b*Facultad de Ingeniería Industrial, Universidad Estatal de Guayaquil, Ecuador-Guayaquil.
e-mail: silvicoell@gmail.com*

Received 5 July 2017; accepted 22 November 2017

El aprendizaje procedimental es una estrategia que permite mejorar las habilidades, a través de la ejercitación reflexiva en diversas técnicas, destrezas para hacer cosas concretas. En este estudio aportamos una descripción general de cómo se implementó este aprendizaje para diagnosticar y mejorar la cognición espacial en la resolución de problemas vectoriales. A través de una metodología basada en diseño para optimizar las habilidades geométricas (visualización -diseño- construcción-transferencia), siguiendo las teorías de enseñanza - aprendizaje sobre los niveles de razonamiento geométrico y de la psicogenética sobre la cognición espacial. El resultado de la metodología implementada mostró que es posible mejorar en al menos un nivel, el pensamiento geométrico de los estudiantes de Ingeniería de Física 1 de la Universidad Estatal de Guayaquil, de acuerdo al modelo Van de Hiele. Tales mediciones reflejaron hechos relevantes que permitieron elaborar un nuevo material instruccional para mejorar el desempeño académico de los discentes, a través de técnicas didácticas para mejorar sus destrezas cognitivas espaciales.

Descriptors: Cognición espacial; pensamiento geométrico; habilidades básicas geométricas; aprendizaje procedimental.

The procedural learning is a strategy that allows improving the skills, through the reflexive exercise in diverse techniques, skills to do concrete things. In this study we provide an overview of how to implement this learning for diagnosis and improve spatial cognition in solving vector problems. Through a methodology based on design to optimize geometric skills (visualization - design-construction-transfer), following theories of teaching - learning about levels of geometric reasoning and psychology on spatial cognition. The result of the implemented methodology showed that it is possible to improve at least one level, the geometric thinking of the students of Physics Engineering 1 of the State University of Guayaquil, according to the Van de Hiele model. Tales measurements reflected relevant facts that allowed elaborating a new instructional material to improve the academic performance of the students, through didactic techniques to improve their spatial cognitive skills.

Keywords: Spatial cognition; geometric thinking; geometric basic skills; procedural learning

PACS: 01.40 Fk; 01-40 gb; 01-30 Tt; 01-30 lb

1. Introducción

En la actualidad dentro del nuevo paradigma educativo en el cual la Geometría aparece en los currículos actuales de la educación matemática con renovado rigor, esta se transmite esporádicamente o quizás nunca se ve en las aulas de clases; carece de sentido en la medida que no se percibe la aplicación real y verdadera de ella, lo que se ve reflejado en la metodología de la mayoría de planteles educativos a nivel Nacional. Por tales razones, se deben desarrollar e implementar experiencias que permitan a los educandos usar y aplicar destrezas; que una buena enseñanza de la Geometría debería ayudar a desarrollar. Estas habilidades propuestas por Hoffer (1981) son: Visuales; de comunicación; de dibujo y construcción; Lógicas o de razonamiento; de aplicación o transferencia, que son pre-requisitos en el aprendizaje de la Física de la forma más significativa [1]. No solo en esta disciplina, también incluye la comprensión del desarrollo tecnológico que les permita entender nuestra realidad. Por lo antes expuesto, es necesario analizar en qué medida el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico tiene participación en las

actividades de resolución de problemas de análisis vectorial. Principalmente donde se deben interpretar y construir gráficas; y como este incide en la enseñanza - aprendizaje de la Física.

El propósito de esta investigación, consiste en repensar una nueva forma de trabajo en el aula, donde los protagonistas no sean únicamente los estudiantes; sino también el docente. De esta forma, se pretende integrar relacionando los conocimientos de los contenidos geométricos y la recibida en la educación media. En concordancia con los nuevos enfoques, tendencias y objetivos pedagógicos de la Institución Educativa Superior que consiste en; “Garantizar la calidad de la educación nacional con equidad, visión intercultural e inclusiva, desde un enfoque de los derechos y deberes para fortalecer la formación ciudadana y la unidad en la diversidad de la sociedad ecuatoriana” (2015), la cual tiene el reto de mejorar la calidad de la educación [2]. El estudio de la geometría es un prerequisite en la enseñanza de la Física. Principalmente donde intervienen situaciones problemáticas con gráficas, ya que en esta disciplina se desarrollan ciertas habilidades o destrezas tales como la visualización y su capacidad

para explorar, representar, describir lo que esta en su entorno cotidiano. Su utilidad implica, razonar, demostrar hipótesis y asimilar correctamente las ideas que se relacionan con los números, medición y otros contenidos de la Física. El fin es que el educando, este mejor capacitado para dar respuesta a los problemas propuestos en el aula de clases, justificando a partir de teorías, axiomas, leyes tanto del campo geométrico, matemático y físico. Para hacerlo debe tener desarrollo estas habilidades antes descritas.

Este trabajo se delimita a estudiantes del primer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en la unidad de Análisis vectorial de la asignatura de Física I. El fin de este estudio, consiste en exponer la importancia de construir-diseñar e interpretar graficas en la resolución de problemas de la unidad de análisis vectorial a través del mejoramiento de las habilidades básicas de la Geometría para fortalecer la cognición espacial de los estudiantes de la carrera de Ingeniería.

1.1. Fundamentación Teórica

Este estudio está centrado en diversos autores que citan los aspectos más relevantes que facilitan la comprensión del saber científico obteniendo aplicaciones teóricas idóneas en el instante de diseñar, aplicar y analizar las acciones didácticas en el aula de clases. Los estudios que guardan relación con este trabajo interdisciplinario entre la enseñanza - aprendizaje de la Física y la Geometría y sus incidencias en el desarrollo de problemas de diseño y construcción de gráficas.

Hay dos teorías que determinan los modelos didácticos actuales desde el punto de vista de la enseñanza de la Geometría, son los siguientes: La teoría del constructivismo cognitivo de Piaget [3,4] y la teoría de Van de Hiele holístico [5,6], las propuestas de Hoffer desde el punto de vista de la Didáctica de la Geometría [7,8].

La teoría de Piaget propuesta por los años 60 sobre la importancia que adquiere la geometría en la evolución del espacio en el niño, distinguen dos conceptualizaciones:

Piaget e Inhelder (2006) proponen la diferencia entre representación y percepción. Los autores consideran que una persona crea una disposición espacial de objetos físicos; esto incluye a las inscripciones matemáticas. Es decir, hay una imagen visual en la mente del sujeto que guía dicha creación [1]. Así la visualización incluye procesos de construcción y transformación, tanto la parte de la imagen visual y mental; como las inscripciones naturales espaciales que puedan estar vinculadas en la actividad matemática. Ambos plantean que: “la percepción es el conocimiento de los objetos desde un contacto directo con ellos, en cambio, la representación o imaginación implica la evocación de los objetos en su ausencia o cuando corre paralelo a la percepción en su presencia. Así, la representación mental de una figura, es decir, su imagen, es vista como una imitación interna de acciones” según Castillo y Ramírez [9].

En otras palabras, la teoría propuesta por Piaget es de desarrollo, más no de aprendizaje. De tal manera que no se plantea como avanzar de un nivel a otro, tal que Piaget lo ve como

un proceso madurativo.

Van de Hiele (1990), realizó estudios acerca de: cómo ayudar a los educandos a ascender de un nivel de raciocinio a otro. Por lo que, desarrolla la teoría de enseñanza aprendizaje presentado al lenguaje como una estructura del pensamiento, indicando que cada nivel de razonamiento geométrico le corresponde un lenguaje específico. Su teoría no es psicogenética, da realce al contexto interactivo del aula y el papel que desempeña el docente en el mismo. Su estudio se enfoca en la disciplina del aprendizaje de la Geometría, en su publicación “Structure and insight, academic press” indica que estos niveles se componen de la comprensión y utilización de conceptos geométricos distintos, lo que reflejaría maneras distintas de interpretación, definición, clasificación y demostraciones [10].

Su teoría implica dos cuestiones; la descripción que identifica los diferentes razonamientos geométricos de los estudiantes y se puede valorar el progreso de los mismos, los cuales tienen que ser secuenciales, ordenados sin saltar ningún proceso. La segunda tiene que ver con la instrucción que da la pauta que debe seguir el docente para asistir el avance de los educandos en su nivel de razonamiento geométrico. Tiene que ver con las fases del aprendizaje, que fomentan el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático y su paso de un nivel de razonamiento a otro, a través de actividades problemáticas particulares según la fase [11]. El modelo Holístico de Van de Hiele consiste en cuatro niveles de razonamiento geométrico que describimos en la siguiente Tabla I:

Este modelo no es un indicador medible del desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje por parte del docente y del propio estudiante. Para su efecto se debe aplicar ciertas fases según se vaya presentando en el acto didáctico. [12] Donde el docente es el guía inicial en el desarrollo de las habilidades elementales básicas geométricas, que se van fortaleciendo a través de un proceso sistemático-dinámico. La meta es adquirir nuevos conocimientos que sistematicen sus acciones potenciando la cognición espacial a través de las habilidades geométricas que propone Hoffer y mejore la parte procedimental de los problemas gráficos en vectores.

Con esto en mente, teniendo presente lo que exige el bachillerato, los estudiantes de este nivel debe tener las bases necesarias con un acercamiento de tipo sistemático. Con una formalización matemática cuyo soporte todavía no se apoya en la experimentación; lo que ha demostrado que los estudiantes no se encuentran ni siquiera en el nivel 0 de reconocimiento o abstracción y se requiere de acuerdo al avance de la ciencias y tecnologías formalistas de niveles superiores universitarios que los egresados de bachillerato este en un nivel 4 de rigor sugerido por Van de Hiele [1].

Bressan (2006), realizó un trabajo basado en la enseñanza de la Geometría la cual describe que ésta disciplina debe estar orientada al “desarrollo de habilidades específicas”; comunicación gráfica, visualización o diseño, que son referentes carentes de cualquier mención en la bibliografía de la Geometría descriptiva clásica [6]. A su vez, se presenta como

TABLA I. Niveles y fases del modelo Holístico de Van de Hiele.

Nivel de razonamiento	Indicador	Fases del aprendizaje Van de Hiele
1 Visualización	Análisis de la realidad visible	Información: Se enfatiza la visualización y en la comparación de objetos, se enuncian características de manera informal.
2 Análisis	Identificación y representación de los entes geométricos	Orientación dirigida: identificación de las características, reconocimiento de propiedades y establecimientos de relaciones.
3 Clasificación	Interpretación y representación de una de las ramas de la geometría	Explicitación: intercambio de experiencias, comentar las regularidades encontradas, las propiedades, explicitación del trabajo realizado.
4 Rigor: Deducción formal	Interpretación y representación de forma integrada y generalización de los entes geométricos	Orientación libre: aplicación de los conocimientos a situaciones nuevas pero con estructura comparada. Problemas más abiertos, más complejos, con una, varias o ninguna solución. Consolidación de las etapas anteriores. Integración: Visión global de lo aprendido, integrando los nuevos conocimientos y métodos de trabajo. Organización de los conceptos, definiciones, propiedades o relaciones adquiridas en las fases anteriores.

una disciplina integrada no sólo de las Matemáticas sino también de la Física ya que se caracteriza por su visualización para conceptos aritméticos, algebraicos estadísticos, logotipos, gráficos, experimental, es una disciplina en forma lógica, “la geometría es la matemática del espacio” declarado por Bishop, en 1983.

Mary Hegarty en sus estudios realizados acerca sobre el papel del pensamiento espacial en ciencias de la Educación de Pregrado de la Universidad de California en Santa Bárbara expone que; en el campo de la Física una de las falencias al resolver problemas se da en la interpretación de gráficos y en los eventos del movimiento. Cabe indicar que, cuando se refiere al movimiento se trata de Cinemática vectorial que guarda relación con la unidad de análisis vectorial que se dicta en Física 1 en carreras de ingeniería.

El aprendizaje procedimental se refiere a la adquisición y/o mejora de nuestras habilidades, a través de la ejercitación reflexiva en diversas técnicas, destrezas para hacer cosas concretas. Se trata de determinar formas de actuar cuya principal característica es que se realizan de forma ordenada “implican secuencias de habilidades o destrezas más complejas y encadenadas que un simple hábito de conducta” [13-15] Una ventaja es que no solamente implica el aprender sino como se aprende. Su fin no es sólo el resultado sino más bien todo el proceso de construcción, estrategias empleadas, criterios basados para la toma de decisiones y así llegar al resultado. Su desventaja podría ser caer a modos estandarizados de resolución lo que podría limitar la creatividad del estudiante sino

también las posibles formas de reconstrucción de los objetos de conocimientos [16,17].

1.2. Hipótesis

La Hipótesis de investigación H1:

Los estudiantes que desarrollan habilidades geométricas tienen mejor cognición espacial para resolver problemas vectoriales.

La Hipótesis nula H0:

Los estudiantes que no desarrollan habilidades geométricas no tienen mejor cognición espacial para resolver problemas vectoriales.

2. Método

El tratamiento experimental se realizó por medio de una investigación basada en diseño a través de una estrategia procedimental didáctica. Las variables de nuestra hipótesis son: habilidades geométricas y cognición espacial.

El diseño utilizado en este estudio es de un solo grupo con prueba de entrada de tipo pre-experimental. La representación de este diseño se muestra a continuación:

Donde la observación O1 representa la prueba de entrada, y X representa la intervención. Se implementó una estrategia didáctica basada en ejercicios de carácter interdisciplinario,

con la finalidad de unificar los contenidos geométricos y físicos con los de análisis vectorial. Los contenidos corresponden al eje troncal de educación intermedia de acuerdo a los lineamientos curriculares impuesto por el Ministerio de Educación de Ecuador. No obstante, para determinar el nivel de relación entre las variables, se aplica la investigación descriptiva y correlacional. Los datos necesarios para llevar a cabo esta investigación, se obtuvieron a través de los materiales instruccionales.

2.1. Materiales Instruccionales

A continuación se presenta un resumen de los materiales instruccionales y métodos de evaluación [25].

- i. Una prueba de entrada para determinar el nivel de pensamiento geométrico (cognición espacial) con cuatro niveles de complejidad básico, reproductivo, transferencial y crítico.
- ii. Una encuesta para verificar los estilos de aprendizajes del grupo.
- iii. Una prueba con diferentes niveles de complejidad de ejercicios vectoriales para identificar que habilidades geométricas inciden en la cognición espacial.
- iv. Aplicación de una estrategia procedimental para ampliar y profundizar los contenidos geométricos según la fase de aprendizaje del pensamiento geométrico.
- v. Prueba de salida para verificar la mejora en el nivel de cognición espacial según el nivel de pensamiento geométrico y fase de aprendizaje. La prueba tendrá las mismas directrices que la prueba de entrada, con cuatro problemas diferentes pero que miden los mismos niveles de complejidad.
- vi. Aplicación del estadígrafo índice de dificultad para determinar el nivel de complejidad de la prueba tanto de entrada como de salida.
- vii. Aplicación del estadígrafo “t de student” para erificar si los participantes adquirieron las destrezas o habilidades geométricas necesarias para mejorar su cognición espacial, se analiza la comparación entre los dos resultados académicos de las pruebas tanto de entrada y de salida.

2.2. Sujetos

La muestra poblacional fue de 45 estudiantes que corresponden al 11 % de la población de los registrados en el curso de Física 1 de la carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad Estatal de Guayaquil de Ecuador durante el periodo 2016-2017. Las edades de los participantes oscilan entre 18 y 23 años de edad de los cuales 8 corresponde al género femenino que corresponde al 17.8 % y 35 al masculino que representa al 82.2 %.

Para la selección de la muestra se utilizó la técnica de muestreo casual o incidental (no probabilística), se trabajó con un grupo intacto al cual se le aplicó el tratamiento experimental.

2.3. Procedimiento

Previo a la aplicación del tratamiento, se les realizó a los estudiantes una prueba de entrada para verificar su nivel de pensamiento geométrico (Ver Tabla I) y a su vez una encuesta de los estilos de aprendizajes para seleccionar el modelo más idóneo para el grupo con el propósito de fortalecer y desarrollar habilidades espaciales, estrategias metacognitivas y autorreguladas para mejorar el rendimiento académico. Se trabajó con el índice de dificultad para medir el nivel de validez de la prueba de entrada y salida, aplicando cuatro problemas en las que se aplica las fases del aprendizaje del modelo del pensamiento geométrico y determinar que habilidades geométricas tenían los estudiantes al inicio y después del tratamiento metodológico. La validación estadística de las pruebas el estadígrafo t de student para grupos pequeños para determinar la relación entre las variables propuestas en este estudio: las destrezas o habilidades geométricas necesarias para mejorar la cognición espacial de los participantes [17-19].

3. Resultados

En la Fig. 1 se puede visualizar los tres sistemas de representar mentalmente la información: visual, auditivo y kinestésico. Los resultados muestran los estilos de aprendizajes de un grupo de discentes de la materia de Física del I semestre de la carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad de Guayaquil.

De acuerdo, con la Fig. 1, el 51.1 % de los participantes aprenden de manera auditiva, lo que implica que los participantes auditivos prefieren escuchar las disertaciones orales

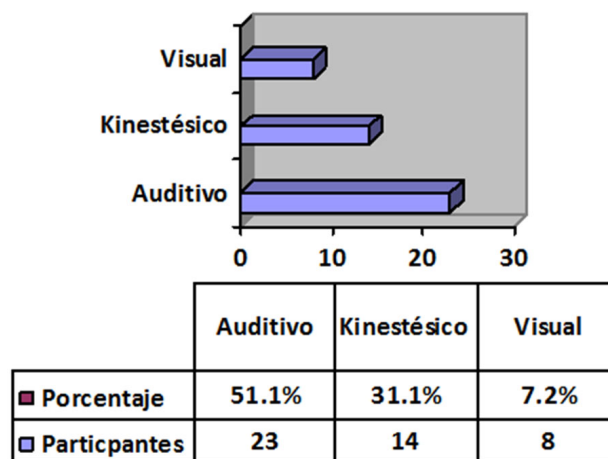


FIGURA 1. Se muestra los resultados de la encuesta realizada a los estuidantessobre los estilos predominates VAK (visual, auditivo, kinestésico).

de las clases y transmitir la información aprendida a alguien, de modo que la recepción y transmisión de la información es su forma principal de aprendizaje.

Cabe indicar, que los sujetos auditivos se caracterizan por recordar la información sin olvidarla. Utilizan el sistema de representación auditivo este se hace de manera secuencial y ordenada. Las personas auditivas aprenden mejor cuando reciben las explicaciones oralmente y cuando pueden hablar y explicar esa información a otra persona. Estudios realizados en Programas Neurolingüísticos describen que los estilos de aprendizaje tienen en cuenta el criterio neurolingüístico, considerando que la percepción de la información por parte del cerebro se realiza mediante el ojo, oído o cuerpo y varía según las preferencias de quién aprende o enseña [20].

Por otro lado, un 31.1% necesitan manipular objetos o instrumentos que les permitan la asimilación y aprehensión de la información, estilo idóneo para la experimentación. Aprender utilizando el sistema kinestésico, es lento, mucho más lento que con cualquiera de los otros dos sistemas. Este sistema también es más profundo. Una vez que sabemos algo con nuestro cuerpo, aprendido con la memoria muscular, es muy difícil de olvidar. En consecuencia: los estudiantes que utilizan preferentemente el sistema kinestésico necesitan, más tiempo que los demás. Esa lentitud no tiene nada que ver con la falta de inteligencia, sino con su distinta forma de aprender [21].

El 17.8% de la muestra estudiantil aprenden visualmente, por lo que ellos necesitan de imágenes que les permitan hacer representaciones mentales para comprender la información que están adquiriendo.

La visualización permite al estudiante establecer relaciones entre diferentes ideas y conceptos. Si el estudiante presenta inconvenientes al relacionar conceptos se debe a que está procesando la información de manera auditiva o kinestésica. La capacidad de abstracción y la capacidad de planificar están directamente relacionadas con la capacidad de visualizar.

De acuerdo, a un modelo de prueba que mide los niveles básico (orden 1: nivel Visualización), reproductivo (orden 2: nivel de deducción), trasferencial (orden 3: nivel de análisis) y crítico (orden 4: nivel de rigor). Esto se puede explicar desde las siguientes consideraciones: ausencia de contenidos geométricos, muchos estudiantes expusieron que no vieron en educación media problemas con contenidos de geometría, trigonometría donde se destacan: propiedades de las figuras geométricas, ángulos especiales, funciones trigonométricas y problemas relacionados con estas dos materias.

Los resultados mostrados en la Fig. 2 indican que tan sólo 2 estudiantes tenían un dominio de tres niveles del pensamiento geométrico que representan el 4.4% de los estudiantes; y 2 estudiantes más sólo llegan al nivel de deducción que también representa al 4.4%; quedando un total de 6.6% que están en el nivel 1 de visualización que es el nivel de complejidad básico en una prueba, es decir 3 estudiantes.

Por otro lado, 38 estudiantes no se encuentran en ningún nivel del pensamiento geométrico que representa al 84.4%

NIVEL DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

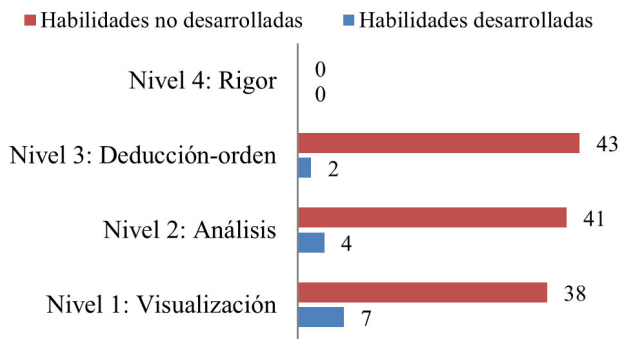


FIGURA 2. Análisis de los niveles de complejidad de la prueba de entrada adaptada a modelo Van de Hiele (según Tabla I)

de los participantes. Esta cantidad de participantes que quedaron fuera no gozan de ningún nivel de complejidad. Al instante de ser evaluados sumativamente, se mide los niveles de rendimiento académico de los mismos. La evaluación es importante, ya que ésta es un indicador que permite visualizar a un docente, cómo están los estudiantes relacionando sus conocimientos previos con los nuevos. Además cabe destacar que, son estudiantes de ingeniería donde deberían tener ya desarrolladas ciertas destrezas y habilidades tanto de los modelos matemáticos, geométricos y físicos adquiridos en el nivel de educación media. Se puede observar que, al pasar a otro nivel de dificultad de la prueba, en el caso de los estudiantes que lograron desarrollar correctamente los problemas propuestos por el docente; los niveles de complejidad antes descritos y adaptados al modelo del pensamiento geométrico cómo: la visualización concreta, y la interpretación gráfica disminuye en los participantes. Estar en un nivel 2 significa: un nivel de complejidad reproductivo el cual describe a los estudiantes que tienen conceptualizaciones físicas, matemáticas y geométricas posiblemente erradas que no les permiten tomar ciertas decisiones al justificar una situación problemática básica. Y por ende no pueden pasar de un nivel a otro. Los estudiantes que no lograron estar en ningún nivel denotan una enseñanza basada en un modelo tradicional mecanicista vertical, donde ellos no están en capacidad de demostrar cómo se aplica ciertas leyes que rigen a un fenómeno, eran sólo espectadores en el acto didáctico. Resultados que se pueden ver en el desarrollo de sus pruebas en la orden 3 y 4 en los niveles transferencial y crítico de la prueba que denotan que no hay estudiante que se destaque en este nivel de rigor que representa a la orden 4 ya que se observa un 0. Esto implica, que al no tener desarrolladas ciertas habilidades geométricas no logran comprender e interpretar ciertas gráficas en los ejercicios planteados, es decir no hallan la conexión visual con la imagen representada y no logran conectarse con el contenido geométrico que relacionan ambas variables imagen-concepto.

A continuación se presenta un extracto de la prueba de entrada:

PREGUNTA 1:

Para la situación de la pregunta # 1 se obtuvo que sólo 7 estudiantes obtuvieran la respuesta correcta a los 5 literales de esta pregunta, representando el 15.6 %, mientras que el 84.4 % de los participantes lograron visualizar ciertos ítems con cierta dificultad.

Ejemplo de actividad para el nivel 1 de visualización. Se apunta al reconocimiento y descripción de atributos físicos de las figuras. La actividad de la Fig. 3 corresponde a la fase 1 de aprendizaje (Ver Tabla I), pues su objetivo es averiguar las concepciones intuitivas de los estudiantes sobre adición y sustracción de vectores concurrentes.

1 Dados los siguientes vectores del mismo tipo. Determine cuál de los siguientes enunciados es el correcto.

- a) $A+B+G+J = 0$
- b) $F+G+B = 0$
- c) $A+B+G+F = 0$
- d) $I = J+E$
- e) $A+B+G+I = E$

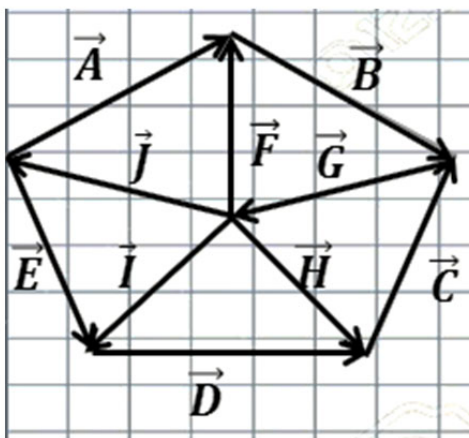


FIGURA 3. Representación aditiva de vectores concurrentes del problema 1 de nivel reproductivo.

Análisis de la Pregunta 1:

Problemas detectados: No hay una correcta construcción de la adición de vectores concurrente, mala interpretación del gráfico, conceptualización equivocada del método aplicado.

PREGUNTA 2:

Ejemplo de actividades para el nivel 2 de análisis. Se apunta al reconocimiento de propiedades geométricas del triángulo rectángulo aplicando Pitágoras, uso de definiciones con estructura simple y demostración de las propiedades descubiertas de manera empírica (midiendo, haciendo recuentos o cálculos). La actividad de la Fig. 4 es un ejemplo de la fase de orientación dirigida, pues su objetivo es que los estudiantes descubran y aprendan un criterio de resolución de vectores por triángulo rectángulo y Pitágoras, donde la construcción con gráfica ayuda a producir una toma de decisiones de que métodos es el idóneo.

2. Dados los vectores mostrados en a figura, calcule las siguientes operaciones: (calcule las magnitudes).

- 1. $|A+B|$
- 2. $|A-B|$
- 3. $|B+C|$
- 4. $|A+B+C|$

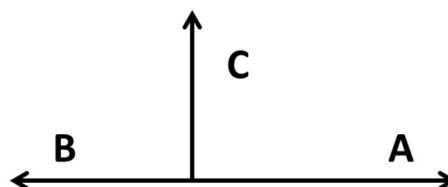


FIGURA 4. Representación aditiva de vectores colineales y concurrentes del problema 2 de nivel reproductivo - transferencial.

Análisis de la pregunta 2:

En este nivel se detectó que sólo 2 estudiantes cumplieron el objetivo de resolver correctamente el problema de los numerales (3) y (4) que representa sólo 4.4 %. Mientras que 41 estudiantes que representa el 91.1 % no se encuentra en el nivel 2 del pensamiento geométrico, y por ende no pasarían a la fase transferencial de nivel de complejidad de la prueba. Los problemas detectados en los numerales (3) y (4): no hay conexión espacial de la figura con el problema o carece de sentido los trazos con la realidad del ejercicio propuesto; no existe construcción gráfica correcta, métodos de resolución inapropiado; operaciones aritméticas mal estructuradas.

PREGUNTA 3:

Ejemplo de actividades para el nivel 3. Esta actividad se basada en la construcción de gráfica o resolución analítica, se pide realizar demostraciones en las que se deben usar los conocimientos aprendidos. Los estudiantes pueden usar ejemplos concretos para generar conjeturas o encontrar caminos para demostrar la respuesta al problema.

Durante esta fase deben adquirir un vocabulario geométrico - matemático más completo su nivel de complejidad de transferencial a crítico.

- 3. Se conoce un vector A que tiene una magnitud de 15 u y una dirección al Norte, un vector con 3 u y dirección oeste, y un vector C con 11 u al Sur. Determine la magnitud del vector resultante de la suma entre $A + B + C$.
- a) 6u
- b) 5u
- c) 29u
- d) 7u
- e) 7u

Análisis del Problema 3:

Problema detectado: No hay una correcta construcción del gráfico, existe desorientación geográfica, desconocimiento de las coordenadas geográficas, polares, rectangulares, mal manejo de calculadora científica, procesos adecuados pero sin llegar a la respuestas debido a una mala técnica del uso de las operaciones aritméticas básicas.

PREGUNTA 4:

Ejemplo de actividades para el nivel 4 Con las actividades de este nivel se intenta afianzar el razonamiento deductivo mediante la práctica de los diferentes tipos habituales de demostración formal. La actividad que se muestra en la Fig. 5 corresponde a la fase 5 pues, los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver problemas más abiertos, más complejos, con una, varias o ninguna solución. Consolidación de las etapas anteriores. Integrando los nuevos conocimientos y métodos de trabajo organizando los conceptos, definiciones, propiedades o relaciones adquiridas en las fases anteriores.

4. La magnitud de los vectores A y B son 5.0 u y 3.0 u, respectivamente. Sabiendo que la resultante es $R = A + B$, calcule la magnitud de la componente de la resultante “x”

- a) -1.1u
- b) +2.6u
- c) -2.8u
- d) +2.8u
- e) +1.1u

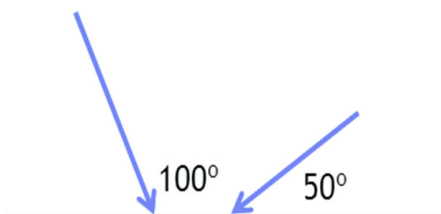


FIGURA 5. Aplicación de métodos de resolución de vectores concurrentes de nivel crítico.

Análisis de la pregunta 4:

Problema detectado: No hay desarrollo coherente de problemas, construcción gráfica deficiente, contenidos geométricos escasos (falta de conocimiento de ángulos especiales, suplementarios, complementarios) toma inadecuada del método de resolución de vectores concurrentes. En este problema ningún estudiante llegó a una opción.

Con estas consideraciones se procedió a realizar el índice de dificultad para establecer el nivel de complejidad de la prueba y de cada ítem se procedió aplicar la fórmula:

$$ID = A/n \tag{1}$$

A= números de aciertos
n= número de participantes

TABLA II. Indicadores del nivel de dificultad de una prueba según la respuesta del ítem.

Clasificación Ítem	Valor del índice de dificultad del ítem
Muy fácil	0.81-1.00
Relativamente fácil	0.66-0.80
Dificultad adecuada	0.51-0.65
Relativamente difícil	0.31-0.50
Difícil	0.11-0.30
Muy difícil	0.00-0.10

Para jerarquizar el nivel de dificultad de cada pregunta junto a su literal de acuerdo a la habilidad que se quería medir en dicha prueba se aplica el criterio de la Tabla II.

Se determina el grado de dificultad de cada ítem o numeral con la finalidad de establecer el nivel de complejidad de la prueba elaborada a los estudiantes. Los códigos que se visualizan en las tablas V a VI tienen el siguiente significado.

- C: Ítem correcto.
- I: Ítem incorrecto.
- RE: Resultado.
- INT: Interpretación.
- Mdif: Muy difícil.
- Mf: Muy fácil.
- Rf: Relativamente fácil.

Aplicando el índice de dificultad de ítem, se determinó los siguientes grados de dificultades de cada pregunta.

Los resultados nos muestran que al efectuar la prueba de entrada a partir de los literales, C, D, y E los estudiantes presentaron dificultades en ubicarse este nivel reproductivo de tipo básico. En este nivel se ubica a la visualización concreta, ya que los estudiantes deben estar en la capacidad de interpretar un gráfico y relacionarlo con el modelo matemático o físico idoneo para dar respuesta al mismo. Los participantes no podían comprender correctamente la información gráfica del problema. Siendo una pregunta modelo determinada como básica o sencilla (Ver Tabla V)

TABLA III. Orden I Habilidad a medir: Visualización concreta Nivel de complejidad Básica (Cognición espacial).

Items	Prueba de entrada		Prueba de salida		Prueba de entrada		Prueba de salida	
	C	I	C	I	RE	INT	RE	INT
A	35	10	42	3	0.78	Fácil	0.93	Mf
B	35	10	38	7	0.78	Fácil	0.84	Mf
C	7	38	40	5	0.16	Difícil	0.88	Mf
D	3	42	36	9	0.06	Mdif	0.80	Mf
E	3	42	38	7	0.06	Mdif	0.84	Mf
	45		45					

TABLA IV. Orden 2 Habilidad a medir: Modelado e interpretación de gráficas (Cognición espacial) Nivel de complejidad Reproductiva.

Items	Prueba de entrada		Prueba de salida		Prueba de entrada		Prueba de salida	
	C	I	C	I	RE	INT	RE	INT
	1	33	12	43	2	0.73	Rf	0.96
2	36	9	44	1	0.80	Mf	0.98	Mf
3	4	41	39	6	0.08	Mdif	0.87	Mf
4	2	43	40	5	0.04	Mdif	0.88	Mf
	45		45					

Basándonos en la Tabla III los niveles de complejidad de las pruebas tanto de entrada se mantienen según el modelo de fase para el pensamiento geométrico. Al comparar el número de aciertos en la prueba de salida con la de entrada vemos que ya se tiene 40 estudiantes que responden correctamente todos los ítems, lo que representan 88.8% antes sólo era 7 estudiantes que representaba el 15.5% para un primer nivel básico en el que se media la habilidad visual del estudiante. Esto nos indica que el nivel de dificultad de la prueba cumple con su objetivo y se observa una mejora alta en el nivel de visualización concreta.

En esta pregunta de orden 2, que se adaptó a el nivel 2 de análisis del modelado de pensamiento geométrico. Se demuestra que la capacidad cognitiva espacial del participante al inicio que era crítica mejora su comprensión de visualización e interpretación de gráficas (Ver Tabla IV).

La media de estudiantes que responden correctamente a esta pregunta con 4 opciones de desarrollo es aproximadamente de 42 estudiantes representado el 93.3% de los estudiantes que pasaron de nivel de visualización al de deducción. Lo que indica hubo una mejora comprensión de la información gráfica del ejercicio propuesto. Convirtiendo esa información gráfica a un lenguaje matemático. De tal manera, que dé la solución correcta a la situación problemática dada justificando a partir de criterios matemáticos, y físicos. En cuanto a la habilidad de Construcción y análisis de gráficas se obtuvo que el 75.6% de los participantes llegaron al nivel 3 que es la deducción (Ver Tabla V). En este nivel los sujetos determinan las imágenes a partir de sus propiedades y reconocer cómo tales propiedades se derivan de otras, construye interrelacionando figuras y conceptualizaciones. Es decir, al establecer las condiciones necesarias y suficientes que cumplen las imágenes geométricas. Sin embargo, el razonamiento lógico se basa aún en la manipulación. Siguiendo demostraciones las cuales no son comprensibles del todo, para los participantes no le era posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justificará sus observaciones. Los estudiantes al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, no comprendían la conceptualización del problema y evocar los contenidos geométricos

necesarios que generen las ideas respectiva del desarrollo del mismo. Los estudiantes de este nivel 2 no eran capaces de comprender que ciertas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora pueden comprender, por ejemplo, que en una adición ortogonal de dos vectores concurrentes implica el método de resolución por Pitágoras o funciones directas trigonométricas relacionando a las coordenadas rectangulares, polares o geográficas según la situación propuestas en el problema [22].

En este nivel 3 de deducción o clasificación, lo que se midió fue la habilidad de construir y diseñar modelados a partir de cierta imagen. Consistía en completar el gráfico a partir del lenguaje verbal del problema y del esquema propuesto, los participantes debían realizar deducciones, demostraciones lógicas y formales. Para ello debían reconocer su necesidad para justificar a partir de propiedades geométricas, modelados matemáticos y leyes físicas planteadas. Por lo que ya comprenden la naturaleza axiomática de las Matemáticas y del mundo de las ideas que es la disciplina de la Geometría. Los estudiantes están en capacidad de aplicar demostraciones diferentes, entender y explicar cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones diferentes. Los participantes adquirieron en este nivel, un alto grado de razonamiento lógico, una visión más globalizada de las aplicaciones de los modelados matemáticos y geométricos. No obstante, para completar el desarrollo de secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos. Lo cual se mide nuevamente en la orden 4 de la prueba de salida.

En este nivel de rigor, los estudiantes están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Logran comprender a la geometría en su forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como sugiere en sus estudios Rodríguez María (2007) sobre el tema. En la cual describe, que este nivel de rigor solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría [19]. Con esto en mente, según en la Tabla I el estudiante debe pasar por los

TABLA V. Orden 3 Habilidad a medir: Construcción y análisis de gráficos con aplicaciones geométricas. (Cognición espacial) Nivel de complejidad Transferencial - intermedia.

Nivel de desarrollo del problema	Resultados	
	Prueba de entrada	Prueba de salida
0 %	30	0
10 %	8	0
25 %	2	1
50 %	2	2
75 %	3	8
100 %	0	34
TOTAL	45	45

TABLA VI. Orden 4 Habilidad a medir: Aplicación o transferencia de problemas. Construcción y análisis de gráficos con aplicaciones geométricas. (Cognición espacial) Nivel de complejidad crítica - avanzado.

Nivel de desarrollo del problema	Resultados	
	Prueba de entrada	Prueba de salida
0 %	35	0
25 %	3	0
50 %	5	1
75 %	2	4
90 %	0	10
100 %	0	30
TOTAL	45	45

otros dos niveles que es el visual - analítico el 17.8 % no lograron llegar a la respuesta aunque tenían a parte procedimental correcta, los problemas detectados en este proceso de desarrollo fueron dificultades en realizar despejes de ecuaciones sencillas, como errores de transposición de cantidades y operaciones aritméticas sencillas como mal manejo de la calculadora científica 6.6 %. En este modelo de pregunta el resultado fue que 77.8 % de los estudiantes no pudieron resolver el problema dejando en blanco el mismo, 35 participantes no tenían idea de cómo aplicar el criterio del método de resolución de vectores del paralelogramo. El 4.4 % de los participantes lograron llegar a la tercera parte del problema pero con muchas inconsistencia matemáticas en su desarrollo, estos dos estudiantes recrearon correctamente el grafico pero no pudieron analizar y deducir que al hacer un modelo grafico a escala podía determinar en ellas propiedades que les permitía resolver el problema. (Ver Tabla VI).

Al aplicarse la prueba de salida se obtuvo que 66.7 % de los estudiantes ya se encontraban en un nivel de rigor que es el idóneo y correcto según su etapa instruccional [20]. Por otro lado, 10 estudiantes que representan al 22.2 % fallaron en situaciones sencillas como operaciones aritméticas, y formulación no adecuada. Lo mismo pasó con los 4 estudiantes que lograron un 75 % de desarrollo del problema. Conceptualizaciones erradas sobre el método a aplicar.

Para constatar si los participantes adquirieron las destrezas o habilidades geométricas necesarias para mejorar su cognición espacial, se analiza la comparación entre los dos resultados académicos de las pruebas tanto de entrada y salida y verificar el nivel de significancia. Por el cual se aplica el estadígrafo descrito en la Tabla VI.

La primera intervención con la prueba de entrada se centró en comprobar el nivel de pensamiento geométrico (cognición espacial) de los estudiantes en determinar si el diseño metodológico basado en el aprendizaje procedimental mejora las habilidades geométricas e incidió en el rendimiento académico.

TABLA VII. Cuadro de resumen de las pruebas aplicadas a los participantes. Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas desiguales

	Variable 1	Variable 2
Media	0.94444444	9.41111111
Varianza	4.34343434	1.12828282
Observaciones	45	45
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	65	
Estadístico t	-24.2804593	
P(T<= t) una cola	1.3078E-34	
Valor crítico de t (una cola)	1.66863598	
P(T<= t) dos colas	2.6155E-34	
Valor crítico de t (dos colas)	1.99713791	

Para demostrar las hipótesis planteadas sobre:

H_1 : Los estudiantes que desarrollan habilidades geométricas tienen mejor cognición espacial para resolver problemas vectoriales.

$$H_1 \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad (2)$$

H_0 : Los estudiantes que no desarrollan habilidades geométricas no tienen mejor cognición espacial para resolver problemas vectoriales.

$$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2 \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (3)$$

Por tanto, dado que el valor -24.28 es menor que el valor crítico que nos daba la tabla de la t de Student -1.67, podemos decir que la diferencia entre las medias es distinta de cero, y por tanto las medias de las muestras de prueba de entrada y la prueba de salida son significativamente diferentes. Esto nos conduce a afirmar que el tratamiento ha tenido efectos. Y por lo tanto los estudiantes, han mejorado su nivel de pensamiento geométrico, han mejorado sus habilidades geométricas y por ende aumentaron su rendimiento académico.

4. Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos las habilidades de construcción - diseños geométricos contribuyen a la comprensión de los problemas de análisis vectorial y ayudan a los estudiantes a ubicarse espacialmente en los ejercicios. Por otro lado, los docentes describen basado en sus experiencias que la mayor dificultad que presentan los discentes durante el acto educativo, la presentan al momento de relacionar o integrar contenidos. Seguramente este grave problema pueda deberse a la estrategia que se está utilizando al momento de entregar los contenidos, y al desconocimiento de los docentes y de los alumnos del sistema de representación que utilizan, tanto para enseñar como para aprender. Ya que un aspecto es

que el docente haga notar en los programas educativos, las metodologías a utilizar, tal como se muestra en la Tabla I y lo otro, que por recursos, tiempo o desconocimiento en la aplicación de la técnica no se logre llegar con el conocimiento a través de las tres vías de ingreso de información al cerebro de los estudiantes (Visual, Auditivo, Kinestésico, VAK).

Cabe acotar que, los contenidos geométricos son pre requisitos que necesitan conocer todos los estudiantes. Dónde no sólo, consisten en realizar bosquejos o trazos; sino que deben estar en capacidad de comprender un problema verbal y plasmar la idea en una situación gráfica, en la que pueda explicar a otras personas de su entorno qué fenómenos intervienen en ellos; sean estos físicos, matemáticos, geométricos y cuál es la decisión que tomará basado en esos criterios. El que los estudiantes universitarios no tengan adquiridos estos contenidos geométricos ha sido un problema para los docentes del área de Física en la carrera de ingeniería a nivel global.

Por tal razón, en este estudio se presentó la dificultad que presentaron los participantes en la materia de Física 1, para integrar los contenidos geométricos por la ausencia de ciertas habilidades geométricas y su relación con la cognición espacial. Habilidades que tuvieron que ser desarrolladas en el nivel anterior de educación que es el bachillerato y cómo afectó en el rendimiento académico de los participantes.

Por otro lado, se mostró una solución para mejorar la cognición espacial basada en un diseño metodológico basada en el aprendizaje procedimental para incidir en el desarrollo de habilidades geométricas a través de técnicas o estrategias de aprendizaje. Con el fin de integrar los contenido geométricos se aplica el modelo holístico del nivel de pensamiento geométrico junto con sus fases de aprendizaje adaptándolo para estudiantes de ingeniería industrial en la asignatura

de Física. La aplicación del modelo para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para Ingenieros Industriales propició una mejor adquisición de los conocimientos geométricos en los estudiantes. Esto se hizo notorio como se pudo explicar en las Tablas III al V, donde los índices de dificultad demostraron que hubo mayor cantidad de aciertos justificados por partes de los sujetos evaluados, en los diferentes ítems de la prueba de salida que mantenía el mismo nivel de complejidad que la prueba de entrada. Y en lo que respecta, en el desarrollo de los problemas en los dos últimos niveles 3 y 4 mejoraron su inteligencia espacial, ubicándolos en el nivel 4 de rigor que le corresponde como estudiantes universitarios. También se incrementó el desempeño académico del grupo. Como resultado práctico de esta investigación basada en diseño, se elaboró un material instruccional basado en un ejercicio procedimental que permitió ver la analogía interdisciplinaria entre la Geometría y la Física con el enfoque integrador que contribuyó a mejorar la cognición espacial de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial, incrementar su rendimiento académico, fortalecer sus habilidades en contenidos geométricos y más que nada ubicarlos en el nivel de pensamiento geométrico correcto.

Se recomienda a los docentes aplicar las fases de aprendizaje que propone el modelo holístico de enseñanza aprendizaje de los investigadores Van de Hiele [22,23]. De tal manera que los estudiantes construyan la red mental de relaciones de nivel de razonamiento al que se debe de acceder, creando primero las vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Es decir, es necesario conseguir que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos.

1. F. Fernando, *Test geométrico aplicando el modelo Van de Hiele* Sigma N° 28 2k. 2006
2. Consejo Nacional de educación. MEC. Hacia el Plan decenal de educación del Ecuador 2005-2015. Recuperado: 09/03/2016
3. E. Ochaita Alderete, *La teoría de Piaget sobre el conocimiento espacial*. (Tesis de maestría inédita) Universidad Autónoma de Madrid, (España 1983).
4. B. Fernández, *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. (Tesis inédita de maestría) Departamento de didáctica de las ciencias experimentales. Facultad de Ciencia de la Educación. (Universidad de Santiago de Compostela 2011).
5. I. Noraini, *Journal of Mathematics Education*. **2** (2009) 94-107.
6. G. Vargas, *UNICIENCIA* **27** (2013) 74-94 .
7. G. Díaz, F. Ruíz, *Geometría y su didáctica para maestros. Matemáticas y su didáctica para maestros: manual para el estudiante*. Ciudad de Granada. España. Editor Universidad de Granada. Departamento de didáctica de las matemáticas. (2^{da} Ed.) (2002).
8. D. Hilbert *Fundamento de Geometría*, Madrid, España (1996). (2^{da} Ed.) Ediciones CSCI.
9. F. Fouz, *Test geométrico aplicando el modelo Van de Hiele* (2006). Sigma N 28 2k.
10. V. Zavala, *Como enseñar en el aula* (2012).
11. R. Duval, *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Representations and mathematics visualization. North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics education. Working group representations and mathematics visualization*. CINVESTAV IPN. Editado por Hitt Fernando, México (1999).
12. A. Gutiérrez y A. Jaime, *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo Van de Hiele*, en S. Llinares, M.V. Sánchez eds., *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain) (1990). pp. 295-384. (fragmentos).
13. A.M. Bressan, B. Bogisic y K. Crego, *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aire-Argentina. (Ediciones Novedades Educativas 2000).

14. A. Zavala, *Como trabajar los contenidos procedimentales en el aula de clases* Ediciones MIE. (Barcelona, España 2001).
15. V. Zavala, *Como enseñar en el aula* (Barcelona, España 2012).
16. C. Bixio, *Contenidos Procedimentales. Los procedimientos: su enseñanza, aprendizaje y evaluación*. Ediciones Homos Sapiens. Docente de la Universidad del Rosario. Argentina (2001).
17. R. Marzano y J. Debra, *Dimensiones del aprendizaje. Manual para el maestro*. Segunda edición (2014).
18. J. Álvarez Botello, E.M. Chaparro Salinas, y D.E. Reyes Pérez, *Estudio de la satisfacción de los estudiantes con los servicios educativos brindados por Instituciones de Educación Superior del Valle de Toluca*, Red Iberoamericana de Investigación sobre Cambio y Eficacia Escolar (RINACE) (2015).
19. H. Araya Sandra, *Experiencia de cambio metodológico en estudiantes chilenos basada en la autonomía y colaboración para la construcción de aprendizajes* Departamento de Tecnología Médica. Facultad de Medicina. Universidad de Chile.
20. P. Jiménez Martínez, B. González Talavera, *El cuestionario como instrumento de evaluación de competencias basado en la evidencia emocional de la satisfacción* **Vol. 2**, Núm. 17 Aula de encuentro Universidad de Jaen (2015).
21. J.M. Romero Rodríguez, *Estrategias de aprendizaje para visuales, auditivos y kinestésicos* Revista: Atlante. Universidad de Granada, España. ISSN: 1989-4155.
22. Manual de estilos de aprendizajes. Reforma Curricular del Bachillerato General, en Palabra COBAQ, revista de comunicación interna y análisis, año 3, semestre (2004-A), Edición Especial.
23. G. Vargas, R. Gamboa, *UNICIENCIA* **27** (2013) 74-94.
24. M. Rodríguez, *El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana*. Universidad de Camagüey, Cuba. Versión On-line ISSN 2007-6819 versión impresa ISSN 1665-2436. Relime **vol. 10** No. 3 (México Nov. 2007).
25. S. Coello, *Materiales instruccionales* (2017). URL: https://ugye-my.sharepoint.com/personal/yomar_gonzalezc_ug_edu_ec/_layouts/15/guestaccess.aspx?folderid=1f5f314deb1c84a7084b43653cabdc4c7&authkey=AVoLdnj8UIHKovHWPMRcAy8&e=72213c3dab7d4686a9b0d16269155801.