

## Predicción probabilística de la existencia de estrellas Cefeidas en la galaxia

A. Cabañas Hernández, D. L. Cárdenas, E. E. Damián de la Cruz, A. Fortiz Flores, L. E. Garduño Puga, I. Hernández-Armenta, J. R. Jiménez Blas, J. López Jiménez, N. A. Nava-Moreno, F. Perea López, R. R. Santos-Castillo, A. Torres-Muñoz, P. Velasco, A. Torres Campos y M. G. Corona-Galindo

*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,  
Apartado Postal 216, 72840 Tonantzintla, Puebla, México.*

*e-mail: mcorona@inaoep.mx*

Received 28 June 2008; accepted 8 August 2018

Las estrellas Cefeidas han sido de gran relevancia para la determinación de distancias tanto en la Galaxia como a escala cosmológica. Debido a que, hasta el momento, la mayor parte de las Cefeidas cercanas observadas se encuentran en la vecindad solar, se juzga pertinente un estudio probabilístico sobre su distribución, no solo en la vecindad solar sino también en toda la Vía Láctea, pues deben estar jugando un papel importante para mantener la estructura de nuestra Galaxia. Partiendo de 187 Cefeidas observadas en la Vía Láctea, se presenta una función de densidad de probabilidad normal que sirvió para elaborar un modelo en tres dimensiones que permite encontrar la zona de más alta concentración de Cefeidas y de paso, con ella, predecir la existencia de Cefeidas en zonas cercanas a toda la Galaxia. Asimismo, se da a conocer una segunda distribución de probabilidad, normal también, pero en la vecindad del eje galáctico, a fin de elaborar otro modelo que permita predecir la existencia de estrellas Cefeidas dentro de la Vía Láctea y en la vecindad del Sol.

*Descriptores:* Cefeidas; Vía Láctea; probabilidad; función de densidad de probabilidad; distribución normal de probabilidad.

The Cepheid stars have been very relevant for the determination of distances both in the Galaxy and also at cosmological scale. Because, so far, most of the nearby observed Cepheids are in the solar neighborhood, a probabilistic study about their distribution in the solar neighborhood and in the whole Milky Way is pertinent, since they must be playing an important role for keeping the structure of our Galaxy. Starting from the in the Milky Way already 187 observed Cepheids, a normal probability density function for their distribution in the Galaxy is presented, which is used to carry out a model which allows to find the high concentration zone of Cepheids and, in turn, with it, to predict the existence of Cepheids in the neighborhood of the Galaxy. A second model has been done, in order to prognosticate the existence of Cepheids within the Milky Way and in the neighborhood of the Sun.

*Keywords:* Cepheids; Milky Way; probability; probability density function; normal probability distribution function.

PACS: 47.10.A; 51.35.+a

### 1. Introducción

Desde hace once años, en el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE) se comenzaron a impartir cursos de matemáticas a los profesores que enseñan esta disciplina a nivel de bachillerato. El conjunto de materias que se ofrecen ha convergido en una Maestría Profesionalizante en Enseñanza de las Ciencias Exactas (MECE) que se imparte en horarios *ad hoc*, pues los alumnos –profesores en activo en el nivel mencionado– trabajan durante toda la semana; por ello, normalmente, los cursos se imparten los sábados en turno matutino y vespertino.

Actualmente, los estudiantes más avanzados ya están ocupados en la elaboración de la tesis y uno de los problemas que plantean, en el seminario de seguimiento de dichos trabajos de investigación, concierne a que, en esta época de apogeo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), los estudiantes –de nivel medio superior– demandan la formulación de problemas contextualizados para entender la *herramienta matemática* que se está exponiendo. Sin embargo, la primera meta que se tiene que perseguir es hacer todo lo posible para que el estudiante entienda que, dentro de las dos palabras enfatizadas con anterioridad, hay un *contenido de conocimiento*; y ni con mucho un conjunto de recetas que sirven sólo para resolver los problemas propuestos

en los libros. La educación preuniversitaria actual está basada en competencias y este es un aspecto adicional que hay que tener permanentemente en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

Estos tres puntos clave de la enseñanza actual: contextualización de los problemas planteados, contenido de conocimiento y educación por competencias, se llevaron a una aplicación en el curso de métodos matemáticos que se imparte en el INAOE durante cada verano con miras a preparar a los estudiantes para su ingreso a la maestría en Astrofísica, al tiempo que sirve también como un mecanismo de selección de los estudiantes. Además de esta asignatura, los estudiantes asisten a cursos de Física General y Astronomía, de modo que bien se puede plantear una trayectoria hipotética de aprendizaje que integre el material de las tres asignaturas.

El ordenamiento temático, reivindicado por este cometido, y que se presenta en este trabajo, tiene como *fundamentum in re* la presentación *in corpore* de una trayectoria hipotética de aprendizaje [1,2], constreñida a la implementación curricular que demanda Huerta *et al.* [3] y coronada por un mecanismo de evaluación, según la propuesta de Simon [1] y Gómez *et al.* [2]. Estos últimos autores la proponen para enseñar matemáticas a nivel de secundaria y preparatoria; aquí se presenta la adaptación de un tema de probabilidad aplicado a la Astrofísica.

Las partes fundamentales de una trayectoria hipotética de aprendizaje descansan principalmente en el profesor, quien debe establecer un objetivo de aprendizaje, un plan de actividades dirigido a lograrlo, la suposición de una hipótesis de aprendizaje; así como la constitución de actividades interactivas en el aula en aras de lograr el aprendizaje previamente planeado, y terminar con un mecanismo de evaluación que comprenda los conocimientos que el profesor demande; en el caso que nos ocupa, es el material del programa institucional de métodos matemáticos, principalmente, en su último apartado que comprende los conocimientos fundamentales de probabilidad; material que debe impartirse en la última semana del curso.

Con este marco de fondo, se asumió que los estudiantes eran capaces de aprender, en discusiones de grupo, los contenidos de probabilidad y aplicarlos para barruntar la presencia de estrellas Cefeidas en nuestra Galaxia; claro está, considerando, como punto de partida y de corroboración, las que ya han sido observadas, con sus correspondientes coordenadas, a saber: ascensión recta y declinación, más la distancia que nos separa de ellas, propuesta por otros autores. Eran trece estudiantes y ellos mismos se repartieron en equipos y se distribuyeron las tareas para buscar la bibliografía inherente al tema, las coordenadas de cada una de las Cefeidas que se concocen, así como los tutoriales necesarios para aprender a programar los códigos necesarios para llevar a cabo los cálculos que ameritaba la búsqueda de la solución al problema planteado.

Así, pues, con el objetivo de que la evidencia plausible sea la aceptación o rechazo del estudiante en el programa de maestría en Astrofísica, se diseñó el presente instrumento cuyo *leitmotiv*, en cuanto a competencias, es que el estudiante se prepare primero para trabajar sólo y después en equipo; aprenda, además, a buscar en la bibliografía lo que no sabe y, como instrumento de evaluación, debe elaborar un modelo para predecir la existencia de más estrellas Cefeidas, primeramente en nuestra Galaxia, y, en el acto, en la vecindad del Sol. Se escogieron las estrellas Cefeidas porque son estrellas variables, denominadas así debido a que, tanto su luminosidad como su velocidad de pulsación cambian con el tiempo [4]. Su nombre se deriva de la estrella Delta Cephei, la primera en su tipo en ser descubierta por el astrónomo inglés John Goodricke en 1784.

Una vez que Leavitt H. S. en 1908, dió a conocer la relación que guardan la luminosidad y el período de las Cefeidas, se logró dar un paso gigantesco en el descubrimiento de un nuevo método de determinación de distancias; desde entonces, uno de los más fiables en la Astrofísica moderna [5]. El comportamiento de las estrellas Cefeidas es también de relevancia cosmológica; ya que, el estudio del desplazamiento de las líneas de los espectros junto con la determinación de los módulos de distancia, son herramientas que pueden ser utilizadas para la confirmación de la función de tiempo ligada a la expansión del Universo –función de Hubble–. El estudio de las Cefeidas también es importante para entender problemas de estructura y evolución estelar.

La distribución del trabajo es como sigue: en la Sec. 2 se mencionan los conceptos fundamentales de Astrofísica que se necesitan para comprender el contenido del trabajo; en la Sec. 3 se señalan los conceptos indispensables de la estadística y probabilidad; en la Sec. 4 se bosquejan los requerimientos para la elaboración del modelo; en la Sec. 5, se presentan los modelos con los resultados que provee y finalmente la Sec. 6 contiene los *results ac disputationem*; es este mismo apartado se comunican las conclusiones.

## 2. Prolegómenos astrofísicos

### 2.1. Cefeidas

Su estructura física corresponde a la de las estrellas gigantes con masas grandes –cerca de diez masas solares o más– y son, por lo general, de color amarillo. Estas se encuentran tanto en nuestra Galaxia, donde están preferentemente situadas en los brazos de la espiral, así como en otras galaxias vecinas e incluso más lejanas. La acumulación de datos observacionales sobre ellas ha promovido la elaboración de mapeos observacionales, *e.g.*, VISTA Variables in the Via Lactea (The VVV Survey) [6] en donde se espera incluir cientos de datos de Cefeidas clásicas que primero hay que descubrir. Por esta razón, y a fin de tener indicios de búsqueda, es pertinente un estudio probabilístico sobre la posible distribución de dichas estrellas, en particular, en la vecindad solar y, en general, en toda la Vía Láctea.

#### 2.1.1. Tipos de Cefeidas

Las Cefeidas clásicas (Tipo I) se concentran en el plano de la Vía Láctea y su presencia en cúmulos estelares permite estimar su edad, la cual puede llegar hasta  $10^8$  años. Las observaciones llevadas a cabo en las Nubes de Magallanes muestran que las Cefeidas clásicas están confinadas a una estrecha franja en el diagrama periodo-luminosidad, mientras que las Cefeidas Tipo II, menos comunes, son más débiles con respecto a las de Tipo I. La presencia de poblaciones de Cefeidas Tipo II en cúmulos globulares y en el halo galáctico permite estimar su edad, a saber  $1.5 \cdot 10^9$  años, así que pueden ser mucho menos masivas que las Cefeidas clásicas. Las Cefeidas Tipo II también pueden ser distinguidas de las Cefeidas clásicas por la forma de su curva de luz y sus peculiaridades espectroscópicas [7].

#### 2.1.2. Distribución de las Cefeidas en la Vía Láctea

Las Cefeidas clásicas son probablemente las más conocidas y más importantes de todas las estrellas variables. Debido a su gran brillo, abundancia y largas amplitudes, pueden ser utilizadas para mapear los brazos espirales de nuestra Galaxia, pues se encuentran distribuidas a tutiplén en el plano de la misma.

En contraposición, las Cefeidas Tipo II son estrellas más viejas y menos masivas que el Sol; de allí que se encuentren en los cúmulos globulares, es decir, en el halo de la Galaxia.

Precisamente este tipo de estrellas son utilizadas para determinar distancias a los cúmulos globulares [8]. En dirección al bulbo de la Galaxia, se han estudiado poblaciones de Cefeidas Tipo I, encontrando que el período de pulsación de dichas estrellas variables se reduce debido a su edad [9].

### 2.1.3. Estudios entroncados sobre Cefeidas

Debe acotarse que las estrellas Cefeidas han sido motivo de estudio para la Astrofísica moderna, habiendo una gran variedad de artículos sobre su comportamiento, composición química y distribución. El estudio de este tipo de estrellas fuera de la Galaxia se ha hecho, por ejemplo, con imágenes tridimensionales de la Nube Menor de Magallanes [10]. Tales imágenes se han obtenido mediante el cálculo de las distancias a dichas galaxias, realizado con el filtro visible (V); sin embargo, a fin ampliar estos resultados, pueden hacerse todavía observaciones, pero utilizando otras bandas del espectro electromagnético. Recientemente, con observaciones en el infrarrojo cercano y fotometría de series de tiempo [6], se arguye la existencia de Cefeidas clásicas situadas en el plano galáctico detrás de la protuberancia del bulbo [11]; sin embargo no se cuenta con un análisis probabilístico que marque la hoja de ruta de búsqueda observacional de estrellas Cefeidas en la Vía Láctea, aunque, mediante estudios en el infrarrojo, se siguen observando y encontrando hasta en zonas particulares de nuestro hábitat astronómico [12]. También se han buscado en las zonas externas del plano galáctico y se ha podido contraponer el número de estrellas Cefeidas observadas *versus* las esperadas. Aunque se arguye que, debido al número tan reducido de objetos en la muestra, resulta imposible obtener una estimación de la distribución espacial de estas estrellas; por lo que surge la importancia de fijar una muestra para poder hacer un estudio estadístico [16].

### 2.1.4. Catálogo de Cefeidas Galácticas

El punto fundamental de apoyo del presente trabajo es la base de datos de Cefeidas clásicas galácticas, contenidos en el catálogo completo del *DATABASE OF GALACTIC CLASSICAL CEPHEIDS* (DDO, por sus siglas en inglés), el cual consta de 505 estrellas variables y es una compilación del Catálogo General de Estrellas Variables: del *Henry Draper Catalog* (HD) y del *Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalog* (SAO); que incluye, además, información de las propiedades de las estrellas *viz.* exceso de color, periodos y medidas de la intensidad de las magnitudes visual, azul y ultravioleta, las coordenadas ecuatoriales, distancia en parsecs, el promedio de la velocidad radial y la distancia al plano de la Galaxia. Empero, del total de datos del catálogo DDO, se seleccionó solamente una muestra de 187 estrellas Cefeidas: las que están en nuestra Galaxia.

### 2.1.5. Proyección Aitoff

La proyección Aitoff es una proyección cartográfica convencional desarrollada en 1889 para usarse en mapas mundiales.

El método de proyección es de tipo acimutal modificado en donde los meridianos son equidistantes y cóncavos respecto al meridiano central, el cual conjuntamente con el ecuador se toma como línea recta, siendo la longitud del meridiano central la mitad del ecuador. Los paralelos son curvas equidistantes y cóncavas respecto a los polos. Para construir una proyección Aitoff, referimos al lector a la página del Proyecto Auger [14].

## 3. Conceptos fundamentales sobre estadística y probabilidad

De los conceptos básicos de probabilidad y distribución muestral, introductorios al método de inferencia estadística, utilizaremos, para llevar a cabo el modelo planteado, la estimación estadística y las pruebas de hipótesis. Pues, la estimación estadística busca evaluar los valores de los parámetros de la población, tales como la media y la desviación estándar; mientras que las pruebas de hipótesis constituyen un proceso relacionado con la aceptación o rechazo de alguna afirmación proporcionada por los parámetros de la población. Al hacer mediciones de cualquier tipo y distribuir los resultados bajo algún criterio, es común encontrar agrupaciones con características semejantes; en muchos de estos casos se nota que las distribuciones tienen ciertas tendencias a un lado y otro de la observación más frecuente. Una tendencia simétrica hacia valores mayores y menores que el valor central, determina una distribución de datos que se conoce como *Distribución Gaussiana* o *Distribución normal* [16], cuya densidad de probabilidades es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1)$$

que está caracterizada por la media ( $\mu$ ), la desviación estándar ( $\sigma$ ) y la variable aleatoria normal ( $x$ ). Esta distribución es de suma relevancia, pues una gran cantidad de variables aleatorias de las ciencias naturales y sociales siguen este comportamiento. Debe agregarse, que una característica muy importante de cualquier distribución de probabilidad, tanto discreta como continua, es que puede aproximarse a una distribución normal, naturalmente bajo ciertas condiciones. La probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado entre  $a$  y  $b$  es el área debajo de la curva descrita por la función de densidad de probabilidad, *i.e.*

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

En efecto, cuando los límites inferior y superior de la integral corresponden unívocamente con los mismos límites inferior y superior del intervalo del dominio de la función de densidad de probabilidad; entonces, el valor de la integral es uno, el máximo valor de una probabilidad.

#### 4. Metodología para la elaboración del modelo

Se considera pertinente la elaboración de un modelo ligado a la realidad. Para lograrlo conviene primeramente buscar en la literatura científica los datos de parámetros físicos y astronómicos que existen sobre las Cefeidas y, en el caso que nos atañe, se siguieron los siguientes pasos:

Fase 1. Los parámetros que se determinaron necesarios para la elaboración del modelo fueron las coordenadas, ascensión recta y declinación, la distancia, y la magnitud aparente en las bandas U,B,V,R,I. A continuación se convirtieron las coordenadas ecuatoriales a coordenadas galácticas, fijando el origen de este sistema de coordenadas en el Sol. Fase 2. Organización de los datos recopilados: como ya se mencionó líneas arriba, el bagaje de información del presente trabajo es el Catálogo de Estrellas Cefeidas DDO que contiene datos de 505 estrellas [15]. De esta lista, se seleccionaron 187 que pertenecen a la Vía Láctea y con ellas se obtuvo la densidad de probabilidad del modelo denominado *grande*, de donde posteriormente se obtuvo la función de distribución de probabilidad.

Fase 3. Obtención de la gráfica en tres dimensiones de la distribución de las estrellas Cefeidas en la Vía Láctea: utilizando los datos de las 187 Cefeidas seleccionadas, se encontró su localización en la vecindad solar a fin de apreciar la zona de más alta concentración. Fase 4. Elaboración de un modelo gaussiano que dé razón de la probabilidad de detectar estrellas Cefeidas: después de analizar la gráfica elaborada en la Fase 3 y darse cuenta que la mayoría de las estrellas están bordeando el eje galáctico, se decidió utilizar una distribución de probabilidad normal para la elaboración del modelo en coordenadas cilíndricas.

Debido a que el Sol está muy cerca de uno de los bordes (cf. Fig. 3), se optó por la elaboración del modelo denominado *chico* en donde sólo se tomaron en cuenta 118 estrellas y se dejó el resto para la comprobación probabilística, con el mismo modelo, de la existencia de Cefeidas en la vecindad del cilindro. Fase 5. Verificación del modelo: a fin de comprobar si el modelo *chico* era fiable, se sometió a prueba comparando la probabilidad predicha con la presencia de las 62 Cefeidas que no fueron inicialmente consideradas en el modelo.

#### 5. Presentación del modelo y los resultados

Para una mejor apreciación de la distribución de las estrellas Cefeidas en la Vía Láctea, se comenzó con la elaboración de dos figuras. En la primera (Fig. 1), se puede notar una gran concentración de estrellas Cefeidas cerca del Sol, probablemente establecida experimentalmente por los instrumentos de observación. En la segunda figura, que es la proyección de Aitoff (Fig. 2), se aprecia que la mayoría de las Cefeidas se encuentran en el plano central. El grosor de la distribución angular de las estrellas es de aproximadamente 20 grados, característica que permite utilizar como volumen de muestreo

un cilindro con radio variable y altura fija.

Los datos seleccionados con sus respectivos parámetros obedecen una distribución gaussiana, por lo que se optó por dicha distribución para elaborar el modelo probabilístico. Para llevar a cabo la separación de clases se recurrió a la regla de Sturges que establece  $c = 1 + 3.322 \log[n]$ , donde  $n$  representa el número total de datos de la muestra y  $c$  el número de clases. La Tabla I da razón de la distribución de las correspondientes frecuencias: número de Cefeidas en un radio de 8 kpc alrededor del Sol. En la misma Tabla I, se proporcionan los datos estadísticos necesarios para la obtención del modelo.

El radio efectivo para el análisis estadístico se definió considerando la distancia máxima al extremo más cercano de la Galaxia a partir del Sol, es decir, 7 kpc. La estrella más lejana en este intervalo de distancias se encuentra a una distancia de 7.142 kpc, suponiendo que se localice en el extremo más alejado del cilindro imaginario formado por la

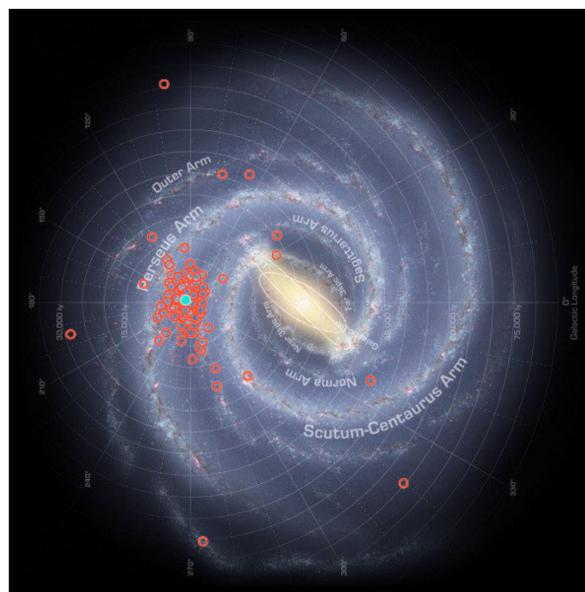


FIGURA 1. Posiciones, en coordenadas galácticas y distancia en parsecs, de las Cefeidas (círculos rojos) en el plano de la Vía Láctea, referidas a la posición del Sol (círculo azul) [la ilustración de la Vía Láctea es obra de Robert Hurt].

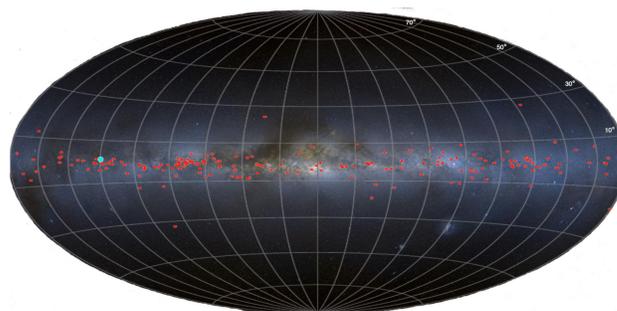


FIGURA 2. La proyección de Aitoff que contiene, en el eje horizontal, el plano de la Vía Láctea [la ilustración de la proyección de la Vía Láctea es obra de Axel Mellinger].

TABLA I. Distribución estadística por clases muestrales de las Cefeidas localizadas entre 0 y 8 kpc (modelo *grande*).

Clase	$f_i$	$x_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \chi)^2$	$(x_i - \chi)^2 \cdot f_i$
0	884	118	442	52156	347313.78
884	1768	38	1326	50388	86828.44
1768	2652	13	2210	28730	1389255.11
2652	3536	2	3094	6188	4254593.78
3536	4420	2	3978	7956	8682844.44
4420	5304	3	4862	14586	14674007.11
5304	6188	2	5746	11492	22228081.78
6188	7072	1	6630	6630	31345068.44
7072	7956	1	7514	7514	42024967.11
<b>TOTAL</b>	<b>180</b>		<b>185640</b>		<b>250065910</b>

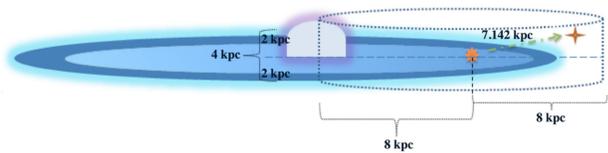


FIGURA 3. Forma gráfica de cómo se tomó el volumen para analizar las zonas de acumulación de estrellas Cefeidas en la Galaxia, con respecto a la posición del Sol (\*).

dispersión de las estrellas en el espacio. Su proyección en el disco central del cilindro se localiza a una distancia de 6.85 kpc. Si dicha estrella se encuentra sobre el disco, la distancia definida es de 7.142 kpc, cualquier otra estrella con radio de ubicación  $r$  satisface la siguiente desigualdad  $6.85 \text{ kpc} \leq r \leq 7.142 \text{ kpc}$ ; de modo que el radio efectivo adoptado sobre el disco central fue  $r = 8 \text{ kpc}$ . Con estos elementos de juicio en mente, aseguramos que todas las estrellas contempladas en el estudio se encuentran dentro de dicho disco y al mismo tiempo se localizan dentro de la Vía Láctea, tal como se bosqueja en la Fig. 3. En un radio comprendido entre 0 y 8 kpc, la muestra contiene un número de Cefeidas localizables en toda la Galaxia.

Después de llevar a cabo los cálculos inherentes al análisis estadístico de la muestra, se obtuvo que la desviación estándar es de 1178.6 kpc y el promedio de 1031.33 kpc. Con los valores de la media y la desviación estándar, la Ec. (1), para el caso que nos ocupa, adquiere la forma

$$f(x) = \frac{1}{(1178.6)\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x - 1031.33)^2}{2(1178.6)^2}\right] \quad (3)$$

y su gráfica es la gaussiana que se muestra en la Fig. (4).

Obsérvese que la densidad de probabilidad para las Cefeidas entre 0 y 8 kpc está perfectamente centrada en el promedio obtenido. Por tal motivo, se infiere de inmediato que es posible integrar la función de menos infinito a más infinito para obtener un resultado igual a 1, lo cual corrobora que la aplicación estadística es correcta. La correspondiente función de distribución de probabilidades tiene la forma que se muestra en la Fig. 5, en donde las unidades del eje horizontal son pc.

Utilizando este modelo, se puede calcular la probabilidad  $P_1$  de encontrar Cefeidas entre 1 y 1.05 kpc [16], mediante el método descrito en el apéndice: integrando la Ec. (3), entre los límites solicitados. Para este caso, el valor provisto es

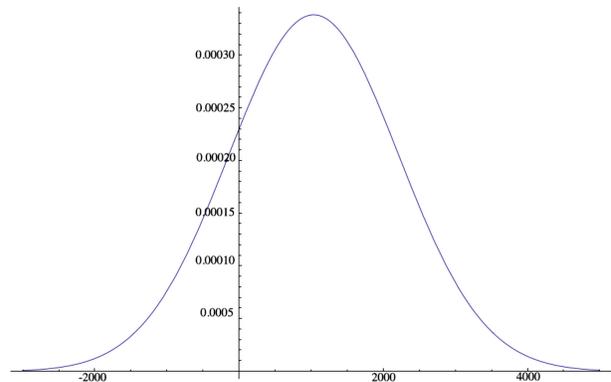


FIGURA 4. Comportamiento gaussiano de la función de densidad de probabilidad de encontrar Cefeidas en un radio de 8 kpc alrededor del Sol.

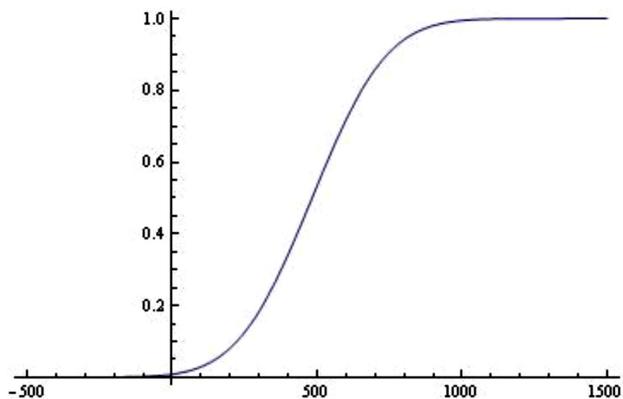


FIGURA 5. Función de distribución de probabilidades de encontrar Cefeidas en un radio de 8 kpc alrededor del Sol.

$$P_1(x) = P_1\{1000 \leq x \leq 1050\} = 0.0169, \quad (4)$$

mientras que el segundo método, utilizando la tabla provista por los libros, provee un valor para la misma probabilidad de

$$P_{E_1}(x) = P_{E_1}\{1000 \leq x \leq 1050\} = 0.016 \quad (5)$$

Al comparar ambas cantidades obtenemos una diferencia relativa de

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x) - P_{E_1}(x)}{P_{E_1}(x)} \times 100\% \\ = \frac{0.0169 - 0.0166}{0.0166} \times 100\% = 1,8\% \end{aligned} \quad (6)$$

De acuerdo con la Tabla I, el 65% de la población está contenida en la primera clase, pero la dispersión es muy alta, pues hay estrellas Cefeidas muy alejadas del origen y por esa razón la desviación típica es de 1178.6. Entonces, con la finalidad de disminuir la dispersión y analizar el comportamiento de la distribución de Cefeidas en un espacio de mayor densidad, se juzgó conveniente disminuir el tamaño de la muestra. La Fig. 6 da razón de la selección del volumen *chico* que contiene la información pertinente de la nueva muestra seleccionada.

La correspondiente distribución de frecuencias, para la nueva selección de clases, se muestra en la Tabla II. En este nuevo modelo, denominado *chico*, hay 118 Cefeidas entre 0 y 800 pc alrededor del Sol. Del análisis de los datos se infiere nuevamente que podemos ajustarlos a través de una densidad

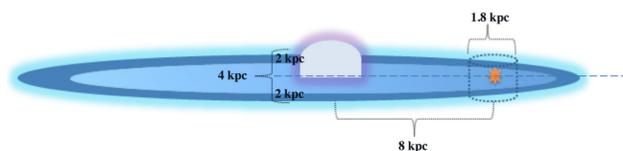


FIGURA 6. Forma gráfica que muestra la selección del volumen para calcular la densidad de probabilidad de estrellas Cefeidas en la vecindad del Sol (\*).

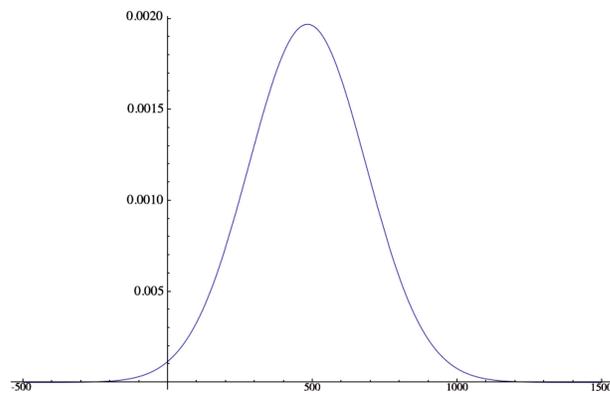


FIGURA 7. Función de densidad de probabilidad de encontrar Cefeidas en un radio de 800 pc alrededor del Sol.

TABLA II. Distribución estadística por clases de las Cefeidas localizadas entre 0 y 800 pc (modelo *chico*).

Clase	$f_i$	$x_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \chi)^2$
0	100	4	200	2500
100	200	3	450	22500
200	300	17	4250	62500
300	400	19	6650	122500
400	500	22	9900	202500
500	600	20	11000	302500
600	700	11	7150	422500
700	800	14	10500	562500
800	900	8	6800	722500
<b>TOTAL</b>	<b>118</b>		<b>56900</b>	

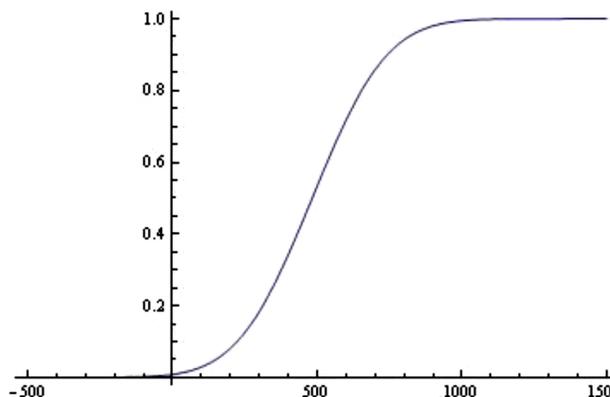


FIGURA 8. Función de distribución de probabilidades de encontrar Cefeidas en un radio de 800 pc alrededor del Sol.

normal de probabilidad, con un promedio de 482.203 pc y una desviación estándar de 202.63 pc, cuya expresión está dada por

$$f(x) = \frac{1}{(202.63)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - 482.203)^2}{2(202.63)^2}\right]. \quad (7)$$

La gráfica de esta función se muestra en la Fig. 7 y la correspondiente función de distribución de probabilidades, se puede apreciar en la Fig. 8.

Ya se tienen los enfoques para poder calcular las probabilidades siguiendo los dos métodos descritos en el Apéndice. En el caso particular de conocer la probabilidad de encontrar Cefeidas entre 400 y 600 pc, se tiene

$$P_2(x) = P_2\{400 \leq x \leq 600\} \text{ pc} = 0.3773 \quad (8)$$

y

$$P_{E_2}(x) = 0.3728, \quad (9)$$

con la correspondiente diferencia relativa entre ambas probabilidades

$$\begin{aligned} & \frac{P_2(x) - P_{E_2}(x)}{P_{E_2}(x)} \times 100 \% \\ &= \frac{0.3773 - 0.3728}{0.3728} \times 100 \% = 1.2 \% \quad (10) \end{aligned}$$

Ambas distribuciones presentan una diferencia relativa menor al 2 %, de lo cual se puede inferir que cualquiera de las dos maneras de calcular las probabilidades conduce al mismo resultado.

Las densidades de probabilidad provistas en la Ec. (3) y Ec. (7) se traslapan y es de esperarse porque hay elementos de una de las muestras que también están en la otra. Sin embargo, debe reiterarse que el modelo chico permite calcular la probabilidad de encontrar Cefeidas a una distancia cercana al Sol, tanto en el interior como fuera de la Galaxia; mientras que el modelo grande permite la predicción de la existencia del mismo tipo de estrellas a cualquier distancia del Sol, tanto así dentro como fuera de la Galaxia.

## 6. Diagrama Hertzsprung-Russell

También se graficó la luminosidad contra la temperatura en un diagrama H-R y la localización, en dicho diagrama, de cada una de las estrellas de la muestra se indica en la Fig. 9. Las estrellas que se soslayaron, debido a que sus distancias están más allá de 8 kpc, están representadas por cuadritos negros. Nótese, además, que estas Cefeidas están muy alejadas de la Secuencia Principal, lo cual podría interpretarse como que ya están hartamente evolucionadas. Los triángulos oscuros en el diagrama H-R corresponden a tres Cefeidas que en la proyección Aitoff se aprecian fuera del plano de la Galaxia, ellas son Beta Doradus ( $\beta$  Dor), W Virginis Centauri (V553 Cen) y Alfa UMi (Polaris). Este subgrupo de Cefeidas tiene en común que pertenecen a la clase espectral G.

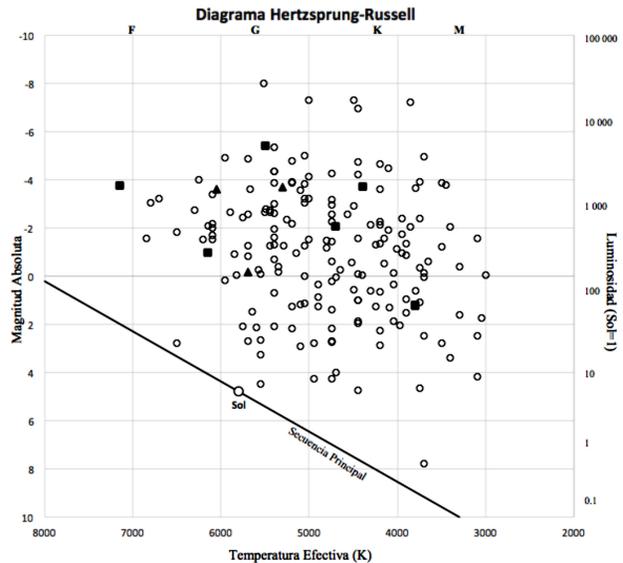


FIGURA 9. Diagrama Hertzsprung-Russell en donde están localizadas todas las Cefeidas del modelo chico.

## 7. Discusión y Conclusiones

En el marco de una trayectoria hipotética de aprendizaje, según Simon, se presenta un modelo probabilístico para predecir la existencia de estrellas Cefeidas en toda la Galaxia y en la vecindad del Sol. Considerando la distancia a la que se encuentran con respecto al Sol, y, debido a que la mayoría de ellas se encuentra en el plano galáctico, se asumió una densidad de probabilidad normal, lo que permitió modelar con una simetría cilíndrica. El modelo *grande* sugiere que la mayor cantidad de objetos se encuentra en la primera clase, por ello se decidió generar un nuevo modelo: el *chico*, tomando en consideración únicamente los objetos de la primera clase y dejando el resto para el análisis de confiabilidad del modelo. De ambos modelos se colige que la mayor cantidad de estrellas Cefeidas, hasta ahora observadas, están muy cerca del Sol. Adicionalmente, de acuerdo a las observaciones, la densidad de probabilidad decae abruptamente para regiones mayores a 1 kpc. De modo que, si este cambio se debe a limitantes de los instrumentos actuales de observación, se colige de inmediato que puede haber estrellas de este tipo más allá de esta región, pero que todavía no han sido observadas por carecer del instrumental idóneo. Esto se deduce de la información provista por la correspondiente densidad de probabilidad del modelo denominado *grande*. El modelo *chico* permite barruntar la existencia de estrellas Cefeidas en toda la Vía Láctea, incluso más allá de los 800 pc en donde se encuentran las 187 Cefeidas de la muestra.

En suma, la estadística y probabilidad que se ha presentado en este trabajo, arroja resultados positivos de ubicación de Cefeidas en lugares lejanos donde aún no se han observado. Sin embargo, para ir más allá de la vecindad del Sol, además de lo señalado líneas arriba, es necesario tener presentes otros factores como la extinción de la luz; ya que, cuando se obser-

va a través del medio interestelar, es necesario apuntar que, en el proceso de observación de un objeto celeste muy alejado del observador, la luz encontrará en su camino más partículas de polvo y gas que provocarán alteraciones en el correspondiente camino libre medio. Acótese, además, que es difícil observar Cefeidas ubicadas hacia el centro de la Galaxia porque la luz proveniente del bulbo dificulta ver objetos en esa dirección y más aún atrás de él. Cabe destacar aquí que no todas las Cefeidas son observables en el visible: la Fig. 10 muestra el espectro de la Cefeida *AZ Cen*, de donde se infiere que esta estrella Cefeida está emitiendo en el ultravioleta.

Adicionalmente, del diagrama H-R se deduce que la temperatura de las Cefeidas oscila entre los 3000 K y 7000 K y que su emisión tiende fácilmente al rojo. Este hecho, más la información que provee el espectro de la Cefeida *AZ Cen* induce a estudiar estos cuerpos celestes en otras longitudes de onda como el ultravioleta y el infrarrojo (UV, IR). Así, pues, es razonable reiterar que se debe encaminar la búsqueda de Cefeidas en las zonas, predichas en este trabajo, pero aún no

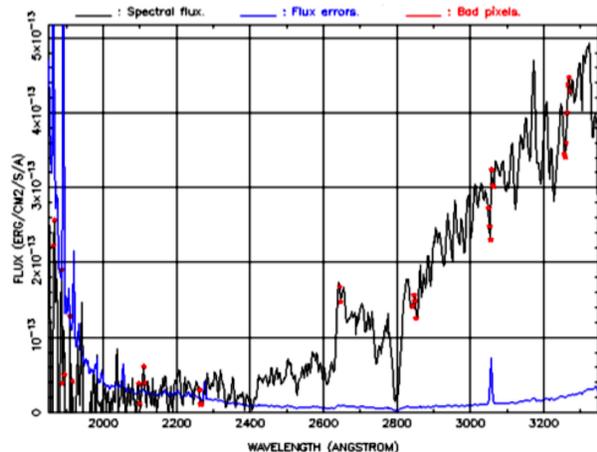


FIGURA 10. Espectro de la Cefeida *AZ Cen*. Imagen obtenida de INES IUE database (<http://ines.ts.astro.it/cgi-ines/plotspectra?filename=LWP07377LL.FITS>).

observadas, con otros instrumentos como telescopios automatizados y CCDs de resolución selectiva, acorde con las características teóricas del objeto de estudio; así como apuntar la necesidad de desarrollar espectroscopios de nueva generación.

### Apéndice

En este apartado, se explican dos procedimientos para calcular las integrales inherentes a la obtención de las probabilidades aquí presentadas. Como se mencionó en la introducción, estamos en la época dominada por las TIC, de modo que las integrales se calcularon, primeramente, con un método computacional, utilizando el software *Wolfram Mathematica*. Asumiendo que cualquier estudiante de educación superior y media superior, cuenta con acceso al software mencionado, se le guía cuidadosamente para calcular las integrales.

La segunda opción para integrar es utilizando una tabla que aparece en los libros de Estadística y Probabilidad. Este caso no se dilucida a detalle, sino sólo se señalan los aspectos que hay que cuidar en el cálculo de la integral. Es, seguramente, poco probable que este segundo método sea utilizado por estudiantes de Ciencias Físico-Matemáticas; no así los de Ciencias Sociales que también tienen que calcular a menudo probabilidades. Adicionalmente, teniendo en cuenta que hay egresados de Ciencias Sociales impartiendo cursos de matemáticas en nuestros centros de educación media superior, se proveen consideraciones necesarias para integrar vía este procedimiento alterno.

Por lo que concierne al primer método, se parte definiendo las funciones gaussianas, tanto del modelo *grande* como del *chico*, con los nombres *fx* y *fxx*, respectivamente:

$$fx = \frac{1}{1178.6 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-1031.33)^2}{1178.6^2}}$$

$$fxx = \frac{1}{202.63 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-482.203)^2}{202.63^2}}$$

El proporcionar una etiqueta con los nombres *fx* y *fxx*, permite trabajar con ambas funciones, sin tener que definir las cada vez que se necesiten, lo cual es una ventaja. Posteriormente, se aplica la operación de *Integral*, en los intervalos deseados, como se muestra a continuación:

$$\int_{1000}^{1500} fx \, dx$$

$$\int_{400}^{600} fxx \, dx$$

Con este mismo software se pueden generar las gráficas de ambos modelos, así como las respectivas gráficas de distribución de probabilidades. Para obtener las gráficas de ambos modelos, se usa la función *Plot*:

$$Plot [fx \{x, -4000, 5000\}]$$

$$Plot [fxx \{x, -500, 1500\}]$$

Debe acotarse que, para obtener las gráficas de distribución de probabilidades, primero se integran ambas funciones en el intervalo de  $-\infty$  a  $x$ , con los nombres *Fx* y *Fxx*, respectivamente:

$$Fx = \int_{-\infty}^x fx \, dx$$

$$Fxx = \int_{-\infty}^x fxx \, dx$$

Y finalmente, una vez más, se hace uso de la función *Plot*:

$$Plot [Fx \{x, -4000, 5000\}]$$

$$Plot [Fxx \{x, -500, 1500\}].$$

El siguiente método para el cálculo de las probabilidades, es por medio del uso de una tabla que proporciona los valores del área bajo la curva de una distribución normal, cuya consulta puede hacerse en cualquier libro de Probabilidad y Estadística (cf. [16]). Debe hacerse hincapié que la tabla proporciona valores para una distribución normal estándar, esto es,  $N(0,1)$ . Dado que las distribuciones gaussianas de este trabajo están definidas para  $N(\mu, \sigma)$  –para medias y desviaciones estándar dadas–, es necesario hacer la transformación a  $N(0,1)$  por medio de un cambio de variable que obedezca tal distribución, esto es,

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Adicionalmente, es importante tener presentes un par de aspectos importantes para el cálculo de las probabilidades del presente trabajo vía este método, a saber.

1. La tabla nos proporciona valores para conocer de probabilidad  $P(Z < x)$ . Para el caso  $x = 1$ , gráficamente, esto corresponde a lo que se muestra en la Fig. (11).

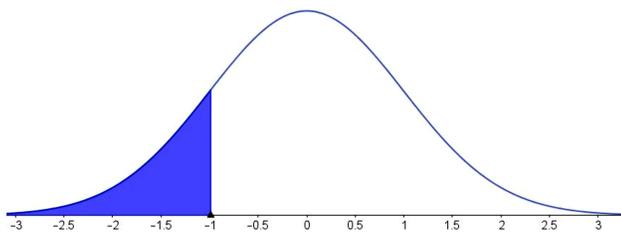


FIGURE 11. Probabilidad  $P(Z < -1)$  en una distribución  $N(0,1)$ .

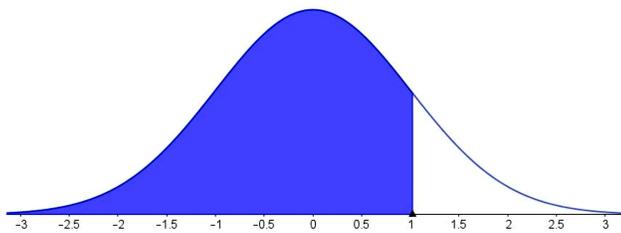


FIGURE 12. Probabilidad  $P(Z > 1)$  en una distribución  $N(0,1)$ .

2. Sin embargo, se puede hacer uso de la equivalencia  $P(Z < -x) = P(Z > x)$ , para conocer la probabilidad que se demanda; de manera gráfica esto corresponde a lo que se muestra en la Fig. (12).

Teniendo presentes estas dos observaciones, ya se puede calcular el área bajo la curva utilizando la tabla, *e.g.* la propuesta por M. Ross [16].

Llegados a este punto, es necesario apuntar que el tener profesores a nivel medio superior sin formación en Ciencias Físico-Matemáticas, impartiendo clases de física o matemáticas, es realmente un fenómeno de la educación en nuestro país que amerita, desde luego, un análisis profundo de por qué y cómo es que se da. Que existe tal aberración lo manifiestan los datos que se tienen en el INAOE, pues de los 10160 alumnos atendidos durante los últimos 12 años en la Maestría Profesionalizante en la Enseñanza de las Ciencias Exactas, el 36 % vienen con un perfil de especialidad en Pedagogía o Educación, el 12 % tienen formación en Ciencias Sociales y Humanidades, el 41,6 % terminaron estudios de Ingeniería y 10,4 % son egresados de Ciencias Químico-Biológicas. Para medir todavía más el impacto en la educación de estos datos, debe señalarse que todos los alumnos de dicha maestría son profesores en activo de las asignaturas mencionadas con anterioridad.

## Agradecimientos

Primeramente, agradecemos al árbitro anónimo que revisó el trabajo, pues sus acertadas sugerencias sirvieron para enriquecerlo. Enseguida, se extiende nuestro agradecimiento a los doctores Miguel Chávez Dagostino, Omar López-Cruz, Agustín Márquez, así como a los técnicos Carlos Escamilla y Saula Tecpanecat, por su asesoría académica y apoyo para la elaboración del documento. De igual manera, se reconoce a Angeles López, Víctor Cortés, Gustavo Hernández, L. Hugo Ortiz y Noemí Vázquez su asistencia técnica en computación. Va, también, nuestro agradecimiento a la Dra. A. L. Gelover-Santiago por la revisión del manuscrito. A Leonardo Chaves y Walter Orozco les damos las gracias por su asistencia en Latex y a Gonzalo Vargas Amador por la provisión de los datos sobre la Maestría Profesionalizante en la Enseñanza de las Ciencias Exactas.

1. M.A. Simon, *Journal for Research in Mathematics Education* **26** (1995) 114.
2. P. Gómez, J.L. Lupiáñez, *PNA I* (2) (2017) 79.
3. J.J. Huerta Amezola, I.S. Pérez García, G.G. Carrillo Núñez, *Revista de Educación y Desarrollo*, **4** (2005) Octubre-Diciembre.
4. F. Benedict, *Cepheid Calibration Hubble Site PDF* (2016) 54.
5. AAVSO, *Delta Cephei*, [www.aavso.org/vsots\\_delcep](http://www.aavso.org/vsots_delcep) (2016).
6. D. Minniti *et al.*, *New Astronomy* **15** (2010) 433.
7. T. Loyd, *Cepheid Variable*, <http://ned.ipac.caltech.edu/level5/ESSAY%20S/Evans/evans.html> (2016).
8. J. D Fernie, *AJ* **83** (1995) 156.
9. N. Matsunga *et al.*, *Nature* **477** (2011) 188.
10. M. Quiroz, *Revista Ciencia y Tecnologia* **4** (2009) 1.
11. I. Dékány *et al.*, *ApJ* **799** (2015) L1.
12. S. Chakrabarti, *ApJ* **802** (2015) L6.

13. M.W. Feast, W. Michael, J.W. Menzies, N. Matsunaga, P.A. Whitelock, *Nature* **509** (2014) 342.
14. Sky Maps Auger Project, from 3D to 2D [http:// auger.org/education/augerEducation/Aitoff.html](http://auger.org/education/augerEducation/Aitoff.html), 1016
15. J.D Fernie, B. Beattle, N.R. Evans and S. Seager, *IBVS* (1995) 4148.
16. M. Ross, *Introducción a la estadística* (Reverté, Barcelona, España), (2007) pp. 269-278.