

## La densidad es una propiedad *intensiva* de la materia (pero su *medida* no)

J.D. Santos y J.F. Fuertes  
*Dpto. de Física; Univ. de Oviedo,*  
*33007 Oviedo España*  
*e-mail: jdsantos@uniovi.es*

Recibido el 23 de abril de 2003; aceptado el 2 de junio de 2004

La sencilla tarea de la medida de la densidad de un sólido, como práctica básica de cualquier laboratorio de física experimental, se enriquece ostensiblemente empleando cierta diversidad de muestras. Por una parte, comprobando el carácter intensivo de la magnitud medida, y por otra —y acaso de mayor interés desde el punto de vista de las técnicas experimentales— constatando que cada procedimiento de medida tiene unas condiciones óptimas de funcionamiento en concordancia con el tipo de muestras y el valor de la magnitud que se pretende medir.

*Descriptor:* Enseñanza; mediciones; experimentos

Measuring the density of a solid is a basic laboratory task for Introductory Physics courses that can be quite enriched by using some variety of samples. On one hand, probing the intensive character of the quantity, on the other hand —and with more interest from the experimental methods point of view— allowing to elucidate how the methods of measurement can be conditioned by the shape and nature of the samples and the measured values of the quantity.

*Keywords:* Teaching; measurements; experimental procedures.

PACS: 01.50.Pa; 01.40.Fk

### 1. Introducción

Una gran parte del éxito innegable de las ciencias físicas se debe a la precisión y el rigor que le confiere su formulación en un lenguaje matemático. También de ello proviene principalmente su dificultad en la enseñanza, sobre todo en los primeros cursos, donde el sustento en la exitosa *formulación* deviene con frecuencia en la asimilación y manipulación algebraica de simples *fórmulas*, y en las prácticas a la aplicación de no menos simples *recetas*; una actividad contraria al aprendizaje significativo [1], paradigma actual en la actividad docente que, aunque con algunas décadas de vigencia, sólo se va incorporando a la enseñanza de las ciencias físicas progresivamente en los últimos años [2,3].

Básicamente, este paradigma se caracteriza por centrar principalmente su análisis en las acciones del estudiante, la persona que aprende; lo que importa no es tanto transmitir conocimientos sino ayudar a alguien a adquirirlos: ayudar a aprender. Un punto de partida básico es el de identificar los estadios del desarrollo intelectual del alumno. En primer curso de universidad [4], parte de un primer estadio en el que ve el mundo en términos polares, sin grados intermedios, y corresponde al profesor enseñarlas; en un segundo escalón, percibe la diversidad de planteamientos y la incertidumbre como una confusión propia del docente, que va aceptando inicialmente como situaciones transitorias, en un tercer estadio, para acabar descubriendo, poco a poco, el razonamiento relativista contextual, en cuarto lugar. Alcanzar este punto es, crucial pues, desde ahí, el estudiante capta la necesidad de orientarse a sí mismo e implicarse en el planteamiento y solución de problemas. Así, de un punto de partida inicial en el que entiende el aprendizaje como un aumento cuantitativo del conocimiento, lo va asumiendo como un proceso interpreta-

tivo que busca la comprensión de la realidad y que favorece el desarrollo personal.

En las ciencias físicas, sustentadas en la precisión y el rigor del lenguaje matemático, esta visión polar inicial es más acusada, si cabe, al identificar la precisión y el rigor con la exactitud plena. Las prácticas de laboratorio de los primeros cursos de física son un campo importante para favorecer esa maduración gradual necesaria [5,6,7]: las situaciones de incertidumbre y la implicación directa pueden surgir de manera natural. Pero es importante diseñar las tareas de una manera apropiada, en las se ponga de manifiesto el proceso complejo por el que los conceptos y las teorías científicas se desarrollan, favoreciendo la incorporación escalonada de las dificultades [8,9], para acomodarlas al desarrollo intelectual del alumno e inducir su implicación activa en la tarea.

La medida de la densidad de un cuerpo empleando el método geométrico y el hidrostático [10] es una tarea adecuada para poner en práctica estos objetivos docentes sin necesidad de recurrir, en los cursos básicos, a la sofisticación instrumental en boga. La sencillez instrumental y operativa, permite focalizar la atención sobre los conceptos básicos de medida, precisión, contrastación de métodos, tratamiento de datos, etc... En este trabajo se propone una ampliación de la práctica de la medida de las densidades ya mencionada, orientada, básicamente, hacia la comprensión y desarrollo de los procesos de medición, evaluación de la precisión y su importancia en el diseño del experimento.

### 2. Objetivos

El objetivo de esta tarea es doble: por una parte, comprobar que la densidad es una propiedad intensiva de la materia, una característica propia de su naturaleza química y su estructu-

ra que no depende pues del tamaño de la muestra. Por otra parte, y sin embargo, la medida de esa propiedad sí depende notablemente de la forma y el tamaño: hay un diseño óptimo de las muestras adecuado al procedimiento empleado.

Así, usando un grupo amplio de muestras de distinta naturaleza y geometría para medir su densidad por los métodos tradicionales (geométrico e hidrostático), podemos determinar en qué condiciones la forma y tamaño de la muestra ofrece los mejores resultados para cada método. Se consigue también un efecto inverso: enfatizar, dentro de la tarea experimental, el valor del examen inicial, con papel y lápiz, de la precisión de las medidas [11], de las limitaciones de cada método en función del instrumental disponible –aparatos de medida, tipos de muestras, condiciones– y, en consecuencia, del diseño de las muestras y el procedimiento más óptimo.

Además, desde un punto de vista genérico, la tarea sirve también para poner en práctica los tres elementos básicos de la técnica experimental [6]: el proceso material (manejar adecuadamente los aparatos implicados), el modelo instrumental (evaluación y gestión de los datos) y el modelo fenomenal (interpretación de los resultados); así como las estrategias generales de la resolución de problemas [8], centrado en el análisis del margen de precisión de las medidas, la asignación y manejo de los símbolos pertinentes, el empleo adecuado de las unidades, representaciones gráficas, gestión y análisis de los datos, e interpretación de la solución.

### 3. Programación de la práctica

En la realización de la práctica trabajan simultáneamente tres grupos de dos alumnos cada uno, que se ocupan de estudiar, respectivamente, dos conjuntos distintos de muestras. La tarea se realiza en cuatro sesiones diferenciadas, introduciendo el profesor previamente cada sesión. En la primera, donde se realizan las medidas de las muestras iniciales, conviene resaltar la importancia del diseño de un buen estadijo de datos, la necesidad de dibujar un croquis de las muestras con sus parámetros y la oportunidad de anotar comentarios de interés sobre el proceso de medida. En una segunda sesión –que llamamos de “gestión”– cada grupo hace los cálculos del margen

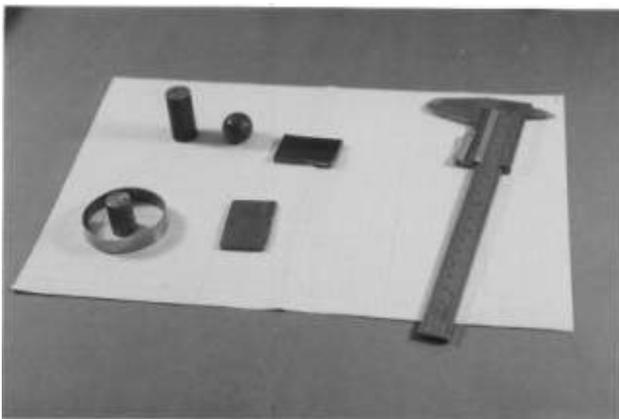


FIGURA 1. Diferentes tipos de muestras iniciales

de precisión y la representación gráfica, incorporando los datos al programa informático y, en virtud de los resultados y con la moderación del profesor, los tres grupos reunidos establecen las conclusiones de interés que han de sugerir el desarrollo de la tercera sesión. En ésta, con la experiencia previa de las anteriores, pueden realizarse las medidas y la gestión simultáneamente. Y, por fin, en una cuarta sesión, los tres grupos en conjunto reúnen todos sus datos, elaborando las gráficas completas y debaten las posibles conclusiones. Al final, deben presentar un informe que realizan los tres grupos en colaboración. El proceso se reitera con el resto de los alumnos hasta completar el listado.

### 4. Método operativo

Operamos, pues, midiendo por ambos métodos la densidad de varios cuerpos de igual naturaleza pero de formas externas dispares y tamaño diferente. Disponemos de placas planas (P) de tamaño diferente y de distintos materiales (metacrilato, aluminio, hierro, cobre y plomo), de distintos cilindros –macizo (C) o hueco ( $C_H$ )– y de una esfera de plomo (E) (ver Fig. 1) y medimos las densidades respectivas por ambos métodos (G ó H) [10]. El resultado ha de ser idéntico para cada colección de muestras del mismo material, dentro del margen de precisión de las medidas; esto es:  $\rho_x^{iG} = \rho_x^{jH}$ : [ $\rho \equiv$  densidad;  $i, j = P, C, C_H, E$  y  $x = Pb, Cu, Fe, Al, Met.$ ]; la experiencia, en cambio, nos muestra que esa coincidencia es limitada y que requiere ser evaluada atendiendo al cálculo de margen de precisión de cada una de las muestras. Se asigna igualmente a las diferentes piezas los parámetros unívocos, de acuerdo a su geometría, con objeto de uniformar la gestión posterior de los datos. Ésta se lleva a cabo con un programa informático estándar.

La elección de estos cinco materiales cumple un objetivo doble: por una parte, medir la propiedad en un espectro de valores amplio, de un orden de magnitud ( $\approx$ de 1 a 10  $g \cdot cm^{-3}$ ), y por otra, asignar la medida de las tres piezas de cada material a un grupo de alumnos, con objeto de proponer después el intercambio de información y contrastación de datos entre cada grupo, fomentando así el trabajo en equipo y la discusión.

### 5. Análisis de los datos

Los datos reunidos se muestran en el cuadro Tabla I y se representan de una manera contrastada en la Fig. 3, donde se

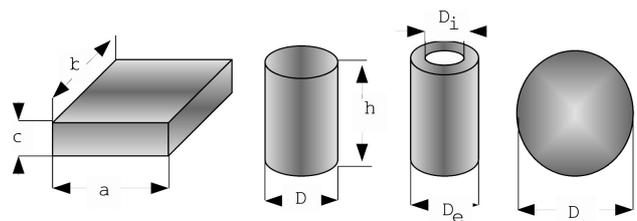


FIGURA 2. Parámetros geométricos de las muestras.

TABLA I.

| cuerpo |                | a/h  | b/D  | c/D' | M <sub>s</sub> | M <sub>ss</sub> | ρ <sup>G</sup>       | δρ <sup>G</sup>      | Δρ <sup>G</sup> | ρ <sup>H</sup>       | δρ <sup>H</sup>      | Δρ <sup>H</sup> |
|--------|----------------|------|------|------|----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|        |                | (cm) | (cm) | (cm) | (g)            | (g)             | (g/cm <sup>3</sup> ) | (g/cm <sup>3</sup> ) | (%)             | (g/cm <sup>3</sup> ) | (g/cm <sup>3</sup> ) | (%)             |
| Me     | P              | 4,31 | 2,67 | 0,80 | 10,74          | 1,60            | 1,18                 | 0,02                 | 2,1             | 1,18                 | 0,02                 | 1,6             |
|        | C              | 3,10 | 2,02 | -    | 11,58          | 1,82            | 1,17                 | 0,02                 | 1,5             | 1,19                 | 0,02                 | 1,6             |
|        | C <sub>H</sub> | 2,08 | 2,01 | 1,13 | 5,32           | 0,82            | 1,17                 | 0,04                 | 3,1             | 1,18                 | 0,03                 | 2,3             |
| Al     | P              | 4,19 | 1,96 | 0,22 | 4,56           | 2,86            | 2,6                  | 0,2                  | 5,8             | 2,7                  | 0,1                  | 3,8             |
|        | C              | 2,41 | 1,20 | -    | 7,24           | 4,56            | 2,66                 | 0,07                 | 2,5             | 2,70                 | 0,07                 | 2,8             |
|        | C <sub>H</sub> | 2,10 | 2,99 | 2,68 | 8,42           | 5,18            | 2,8                  | 0,2                  | 7,1             | 2,61                 | 0,06                 | 2,5             |
| Fe     | P              | 3,85 | 2,56 | 0,34 | 26,02          | 22,72           | 7,8                  | 0,3                  | 3,7             | 7,9                  | 0,2                  | 2,3             |
|        | C              | 3,30 | 1,60 | -    | 51,10          | 44,54           | 7,7                  | 0,1                  | 1,6             | 7,8                  | 0,1                  | 1,6             |
|        | C <sub>H</sub> | 2,10 | 1,20 | 1,04 | 4,72           | 4,12            | 8                    | 1                    | 13,1            | 7,9                  | 0,6                  | 8,1             |
| Cu     | P              | 3,37 | 1,91 | 0,20 | 11,08          | 9,82            | 8,6                  | 0,5                  | 6,0             | 8,8                  | 0,4                  | 4,4             |
|        | C              | 2,10 | 1,01 | -    | 14,28          | 12,66           | 8,6                  | 0,1                  | 1,6             | 8,8                  | 0,3                  | 3,6             |
|        | C <sub>H</sub> | 3,00 | 1,50 | 1,32 | 10,70          | 9,46            | 9                    | 1                    | 11,4            | 8,6                  | 0,4                  | 4,4             |
| Pb     | P              | 4,42 | 3,80 | 0,27 | 46,98          | 42,82           | 10,4                 | 0,4                  | 4,2             | 11,3                 | 0,2                  | 2,9             |
|        | C              | 2,25 | 1,32 | -    | 33,14          | 30,18           | 10,9                 | 0,2                  | 2,0             | 11,2                 | 0,3                  | 2,4             |
|        | E              | -    | 1,91 | -    | 39,12          | 35,58           | 10,8                 | 0,3                  | 3,2             | 11,1                 | 0,2                  | 2,2             |

ha incorporado el margen de precisión correspondiente, de acuerdo al método logarítmico diferencial bien conocido [12,13,14] (en cualquier caso, ésta es una buena oportunidad para poner en práctica este tipo de tareas, generalmente poco asumida por los alumnos, con una reiterada aplicación; la tediosidad del cálculo, una vez madurado, invita a una automatización a través de un programa informático estándar de cálculo). La superposición de los valores para los mismos materiales es en efecto significativa, dentro del margen de precisión de las medidas respectivas. Los márgenes de precisión, en cambio, difieren según el tipo de pieza. Hay, pues, que evaluar estos márgenes de precisión, teniendo en cuenta que empleamos para la medida de las longitudes un calibre de precisión 0,01 cm, y para obtener los datos de las masas, una báscula de 0,02g de precisión; la densidad del líquido patrón –agua destilada-, del método hidrostático, tiene una precisión de 0,01 g·cm<sup>-3</sup>.

Una forma de examinar la mejor adaptación de la muestra al método empleado, es la de representar la precisión relativa en función de algún parámetro relacionado con el tamaño o la forma de la muestra. En la Fig. 4 se representa esta precisión frente al inverso de la masa. Es evidente que hay una dependencia lineal aproximada con el inverso de la masa para el método hidrostático, con una ordenada en el origen idéntica para todas las muestras además, mientras que para el geométrico esta dependencia es más anárquica.

Si examinamos teóricamente las expresiones respectivas de los márgenes de precisión, podemos constatar, en efecto, esta dependencia y analizar la procedencia de la ordenada en el origen y las distintas pendientes.

Para el método hidrostático, por ejemplo, la expresión del margen de precisión relativo que le corresponde es

$$\Delta\rho_x^H(M) = \Delta\rho_p + \frac{\delta M}{M_s} + \frac{2\delta M}{M_s - M_{ss}}$$

$$= \Delta\rho_p + \frac{\delta M}{M_s} \left[ 1 + \frac{2M_s}{M_{ss} - M_s} \right] \quad (1)$$

que hemos adaptado a la ocasión [15]; esto es, expresada en función de las que ahora son variables principales -el tamaño y forma, representado, en principio,

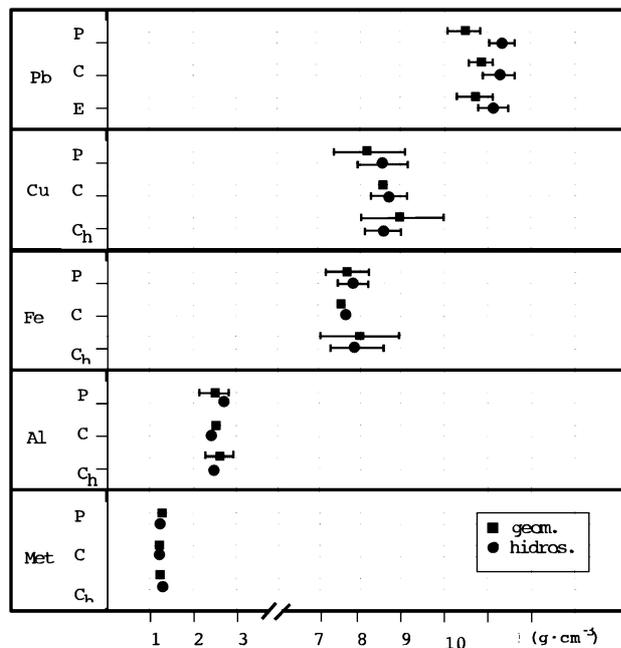


FIGURA 3. Datos contrastados de la primera experiencia.

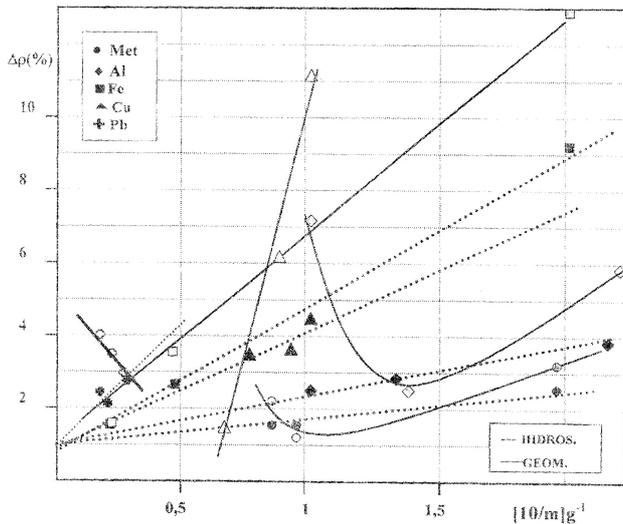


FIGURA 4. Margen de precisión relativo en función del inverso de la masa.

por la masa del cuerpo (también podía ser el volumen)-, que es lo que estamos investigando: el cómo depende la precisión de la medida para un cuerpo dado  $x$  de una cierta forma externa  $I$  por este método  $H$ , con  $\Delta\rho_p$ , precisión relativa del líquido patrón y  $\delta M_x^I (= \delta M)$ , precisión absoluta de la báscula empleada.  $M_s$  y  $M_{ss}$  son, respectivamente, la lectura de la masa correspondiente a los pesos del sólido tal cual y del sólido sumergido en el líquido patrón.

La expresión (1) se puede dejar como

$$\begin{aligned} \Delta\rho_x^H(M) &= \Delta\rho_p + \frac{\delta M}{M_s} \left[ 1 + \frac{2\rho_x}{\rho_p} \right] \\ &= \Delta\rho_p + \Delta M \left[ 1 + \frac{2\rho_x}{\rho_p} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

habida cuenta de que la diferencia  $M_s - M_{ss}$  es proporcional al empuje ( $=\rho_p V_x g$ ), con  $\rho_p$  y  $\rho_x$  las densidades respectivas del patrón y del cuerpo, que son ahora parámetros para el método empleado.

El examen detallado de la expresión nos permite conocer aspectos importantes del experimento, de sus mejoras posibles en función de los parámetros implicados y contrastarlo con el método geométrico, tarea, por otra parte, de considerable interés docente que conviene resaltar, como ya se ha dicho [8,15].

Puede observarse, en efecto, que la precisión relativa es función lineal del inverso de la masa y que se corresponde con los datos obtenidos de la cuadro Tabla I, representados en la gráfica de la Fig. 4. Las rectas tienen una ordenada en el origen condicionada por el margen de precisión del líquido patrón  $-\Delta\rho_p$ , agua destilada de idéntico valor para todas las muestras, en nuestro caso; este término se puede mejorar o bien afinando en la precisión de la densidad del patrón, o bien empleando un patrón de mayor densidad; esta segunda alternativa es bastante restringida para la mayor parte de los líquidos de uso común y condicionada, además, al valor de la densidad del sólido problema, pero, en cualquier

caso, induce a los alumnos a sopesar las posibilidades de la elección de un patrón más denso, o bien con más precisión en su densidad. A este término se añade la contribución del tamaño, de incremento lineal inverso, como se ha dicho, cuya pendiente depende, para una báscula dada, de la relación de densidades entre el patrón empleado y el cuerpo, y tanto más pequeño cuanto más se acerque el valor de la densidad del patrón a la de la muestra problema.

El límite óptimo corresponde cuando las dos densidades coinciden. Ambos términos, pues, sugieren la elección de un patrón con densidad lo más próxima posible al valor que se pretende medir. Conclusión un tanto tautológica, pero que muestra, sin embargo, un hecho evidente en cualquier tipo de medida: que el instrumento empleado en la medición directa de cualquier magnitud ha de estar diseñado de acuerdo con el orden de magnitud de la medida implicada, el metro 'de carpintero' para medir distancias de algunos metros, el calibre para el orden de milímetros, etc. . . y que, no sólo son importantes en la mejora de la medida la optimización de los aparatos, sino que todos los parámetros implicados adquieren cierto protagonismo. Determinar la mejor combinación de sus valores óptimos es lo deseable. La precisión de los aparatos condiciona, en efecto, el valor final de la precisión, pero están muy relacionados con sus valores relativos [11]. Hay, pues, dos conclusiones parciales importantes: la primera es que las muestras han de tener una masa acorde con nuestras pretensiones de precisión, y la segunda es que hay un límite insuperable, independiente de la masa del cuerpo, que sólo se puede mejorar con una densidad del patrón lo más próxima a la de la muestra.

El método hidrostático, pues, compara directamente densidades: la del patrón con la de la muestra problema y, las lecturas de las masas sobre la balanza pudieran ser evitadas, sin más que calibrar adecuadamente la regleta en densidades, de acuerdo a un patrón –o varios-. Un problema técnico de cierta sutileza que puede sugerirse como complemento de considerable interés: cómo transformar la balanza hidrostática en un densímetro (medidor estrictamente directo de densidades).

Para el método geométrico, sin embargo, esta dependencia está más condicionada, obviamente, por la forma geométrica de las muestras que por su masa y, dado que el tamaño y la forma es tan dispar, no es posible encontrar una regularidad suficientemente contrastable, aunque parece evidente que los datos de las muestras de forma cilíndricas ofrecen, en general, mejor precisión. Conviene pues, examinar de nuevo las expresiones matemáticas que controlan la medida y la relación de los parámetros implicados en el resultado.

No es posible dar una fórmula común, como en el caso hidrostático, dada la disparidad de formas geométricas de las muestras, como se ha dicho, pero las expresiones respectivas se pueden presentar con un formato equivalente, con objeto de poderlas contrastar entre sí y con la de otro método. Son las que siguen:

Para la placa –que designamos con subíndice L (lámina) para evitar confusiones con la P del líquido patrón– de dimensiones geométricas respectivas  $a$ ,  $b$  y  $c$ , con  $c (< a, b)$  el

espesor, y  $a$  y  $b$  ( $a \approx b$ ) las dimensiones mayores (Fig. 2):

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{Lx}^G &= \frac{1}{M_s} [\delta M + \rho_{Lx} \delta L(ab + ac + bc)] \\ &\approx \frac{1}{M_s} [\delta M + \rho_{Lx} \delta L(a + 2c)a], \end{aligned} \quad (3)$$

en la que hemos usado al aproximación  $a \approx b$  con objeto de presentar una expresión formal similar en los cuatro tipos de piezas, aspecto, por otra parte, que es conveniente resaltar a los alumnos, proclives a aferrarse a exactitudes innecesarias.

Para el cilindro C, de diámetro  $D$  y altura  $h$ :

$$\Delta\rho_{Cx}^G = \frac{1}{M_s} \left[ \delta M + \rho_{Cx} \pi D \left( \frac{2D + h}{4} \right) \delta L \right]. \quad (4)$$

En la esfera –E–, de diámetro  $D$ , tenemos

$$\Delta\rho_{Ex}^G = \frac{1}{M_s} \left[ \delta M + \rho_{Ex} \pi D \left( \frac{D}{3} \right) \delta L \right]. \quad (5)$$

Y, en fin, el cilindro hueco –tubo T–, de diámetro exterior  $D_e$ , interior  $D_i$  y altura  $h$ :

$$\Delta\rho_{Tx}^G \approx \frac{1}{M_s} [\delta M + \rho_{Tx} \pi D h \delta L] \quad (6)$$

En la que, como en el primer caso, también hemos usado la aproximación  $D_e \approx D_i$ ; de esta manera, formalmente las cuatro expresiones son similares siendo la contribución principal la del segundo término, con parámetros de la forma geométrica, lo que explica la dependencia más irregular de los datos de la figura en función del inverso de la masa.

Todas ellas admiten una expresión simplificada del tipo

$$\Delta\rho_x^G \propto \frac{1}{M_s} [\rho_x \langle S \rangle \delta L] \equiv \frac{1}{\rho_x S h} [\rho_x S \delta L] = \frac{1}{h} [\delta L], \quad (7)$$

donde  $\langle S \rangle$  representa dimensionalmente una superficie, quedando una expresión formal comparable a la del método hidrostático, en función, igualmente, de parámetros de forma:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_x^H(V) &= \Delta\rho_p + \frac{\delta M}{\rho_x V} \left[ 1 + \frac{2\rho_x}{\rho_p} \right] \\ &= \Delta\rho_p \frac{\delta M}{h \langle S \rangle} \left[ \frac{1}{\rho_x} + \frac{2}{\rho_p} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

En definitiva, que en el método geométrico son mas significativos los parámetros de forma, siendo además más precisa la medida cuanto mayor y más iguales entre sí sean, y que, en el método hidrostático, la mejora de la medida radica principalmente en la obtención de una densidad relativa del patrón con suficiente precisión, cosa que se puede lograr con el método geométrico: pesando un cierto volumen suficiente de agua medido con una probeta/cilindro, con una báscula y una probeta con las precisiones respectivas requeridas; o con el método hidrostático, usando ahora de patrón otro líquido cuya densidad conozcamos con la precisión necesaria [10]. Una nueva muestra de la importancia de la contrastación y “retroalimentación” entre métodos.

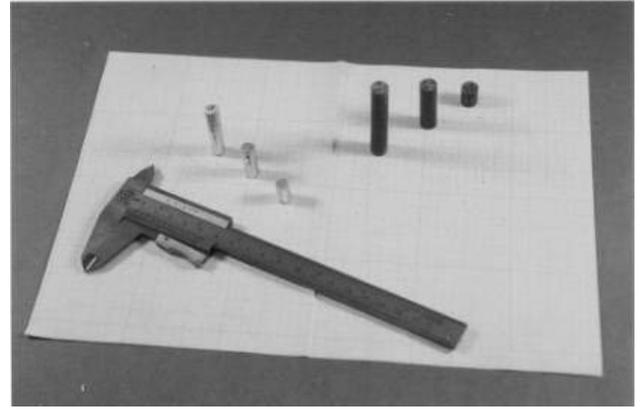


FIGURA 5. Cilindros de distinta altura de las muestras de aluminio y cobre.

Todo ello no justifica a las claras que, de haber planeado previamente una medida con una precisión determinada, con objeto, por ejemplo, de determinar la pureza de ciertas muestras [16], de la sutil evolución de su densidad con la temperatura, etc. . . , el examen con papel y lápiz del margen de precisión en cada caso [11], nos hubiera permitido seleccionar el tipo de muestras más adecuadas, el mejor método y el tipo de aparatos pertinentes. Es ésta una conclusión de notable interés en la metodología experimental, pues un examen teórico previo detallado, puede ahorrar costosos aparatos y horas de trabajo. Ello justifica el planteamiento de una segunda experiencia procurándonos estos requerimientos.

## 6. Segunda experiencia

Elegimos, pues, en una segunda experiencia, muestras de igual matriz y de forma cilíndrica, con una sección similar –S– para todas ellas y con distinta altura (Fig. 5) reduciendo la dependencia de la forma y tamaño a una sola variable, la altura del cilindro, y mejorando también la precisión de los instrumentos: un calibre de 0,005cm y una báscula de 0,01g.

La introducción de un calibre de mayor precisión nos incorpora ahora una nueva exigencia: que el instrumento geométrico ‘cilindro regular’, empleado para determinar el volumen en virtud de las medidas del calibre, tenga la precisión adecuada; esto es, que sea lo suficientemente regular ‘a los ojos del calibre’. Así, tanto su sección como su altura deben tener una regularidad igual o inferior a la precisión del aparato medidor, lo cual exige que el diseño de las muestras ha de ser controlado por este requerimiento, o bien evaluar el margen de precisión estadístico que le correspondería [12,13,14]. En nuestro caso, puesto que el estudio de las medidas reiterativas y su evaluación estadística ya ha sido realizado en una práctica previa [17], se asigna, para a cada grupo de alumnos, el diseño en el torno de un grupo de muestras de cada material, calibre en mano, para hacer medidas sucesivas de su geometría hasta alcanzar la regularidad deseada. Los nuevos datos se muestran en el cuadro Tabla II, representados de forma contrastada en la Fig. 6.

TABLA II.

|    | h    | D     | M <sub>s</sub> | M <sub>ss</sub> | ρ <sup>G</sup>       | δρ <sup>G</sup>      | Δρ <sup>G</sup> | ρ <sup>H</sup>       | δρ <sup>H</sup>      | Δρ <sup>H</sup> |     |
|----|------|-------|----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----|
|    | (cm) | (cm)  | (g)            | (g)             | (g/cm <sup>3</sup> ) | (g/cm <sup>3</sup> ) | (%)             | (g/cm <sup>3</sup> ) | (g/cm <sup>3</sup> ) | (%)             |     |
| Me | A    | 1,905 | 1,000          | 1,72            | 0,24                 | 1,15                 | 0,02            | 1,8                  | 1,16                 | 0,03            | 2,9 |
|    | B    | 3,680 | 1,005          | 3,38            | 0,52                 | 1,16                 | 0,02            | 1,4                  | 1,18                 | 0,02            | 2,0 |
|    | C    | 5,295 | 1,000          | 4,86            | 0,76                 | 1,17                 | 0,02            | 1,3                  | 1,19                 | 0,02            | 1,7 |
| Al | A    | 1,460 | 1,115          | 3,68            | 2,30                 | 2,58                 | 0,04            | 1,5                  | 2,67                 | 0,07            | 2,7 |
|    | B    | 2,210 | 1,110          | 5,62            | 3,54                 | 2,63                 | 0,03            | 1,3                  | 2,70                 | 0,06            | 2,1 |
|    | C    | 3,940 | 1,100          | 9,88            | 6,24                 | 2,64                 | 0,03            | 1,1                  | 2,71                 | 0,04            | 1,7 |
| Fe | A    | 1,295 | 1,000          | 7,60            | 6,60                 | 7,5                  | 0,1             | 1,5                  | 7,6                  | 0,2             | 3,1 |
|    | B    | 2,240 | 1,000          | 13,32           | 11,59                | 7,6                  | 0,1             | 1,3                  | 7,7                  | 0,2             | 2,2 |
|    | C    | 5,560 | 1,005          | 33,50           | 29,19                | 7,60                 | 0,08            | 1,1                  | 7,8                  | 0,1             | 1,5 |
| Cu | A    | 1,220 | 1,000          | 8,23            | 7,27                 | 8,6                  | 0,1             | 1,5                  | 8,6                  | 0,3             | 3,2 |
|    | B    | 3,350 | 1,000          | 22,95           | 20,36                | 8,7                  | 0,1             | 1,2                  | 8,9                  | 0,2             | 1,8 |
|    | C    | 5,360 | 1,000          | 36,80           | 32,65                | 8,7                  | 0,1             | 1,1                  | 8,9                  | 0,1             | 1,5 |
| Pb | A    | 1,375 | 1,040          | 12,42           | 11,25                | 10,6                 | 0,1             | 1,4                  | 10,6                 | 0,3             | 2,8 |
|    | B    | 1,680 | 1,025          | 15,00           | 13,63                | 10,8                 | 0,1             | 1,3                  | 10,9                 | 0,3             | 2,5 |
|    | C    | 2,975 | 1,050          | 28,16           | 25,57                | 10,9                 | 0,1             | 1,2                  | 10,9                 | 0,2             | 1,8 |

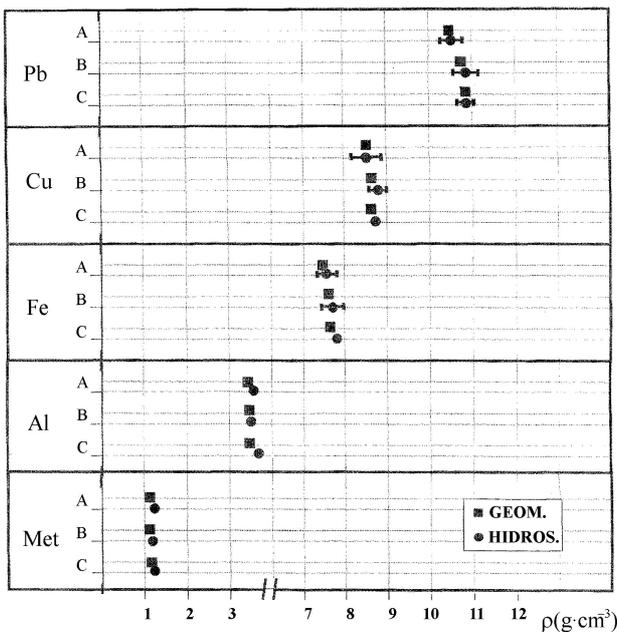


FIGURA 6. Representación contrastada de los datos de el cuadro Tabla II.

Así, para el método hidrostático, operamos como en los casos anteriores [expresión (8)], pero presentando la expresión ahora en función de la altura del cilindro, que es la variable principal, y el diámetro, queda así

$$\Delta\rho_x^H(h) = \Delta\rho_p + \frac{4\delta M}{\pi D^2} \left[ \frac{1}{\rho_x} + \frac{2}{\rho_p} \right] \frac{1}{h}, \quad (9)$$

con una dependencia lineal con el inverso de la altura, una ordenada en el origen que depende de la precisión relativa de

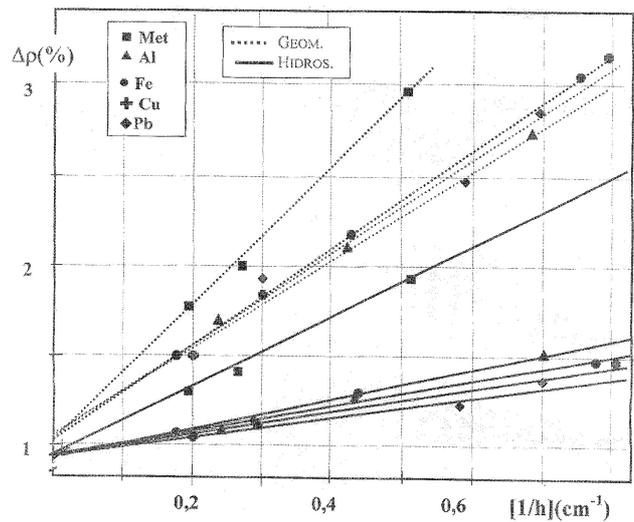


FIGURA 7. Precisión relativa de la densidad de las muestras con el inverso de la altura.

líquido patrón empleado, y una pendiente cuya mayor contribución se debe a la inversa de las densidades entre el líquido patrón y el cuerpo problema. Expresión que da cuenta convenientemente de las rectas correspondientes a este método de la Fig. 6.

Para el método geométrico, la expresión correspondiente del margen de precisión relativo es

$$\Delta\rho_x^G(h) = \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta S}{S} + \frac{\delta h}{h} = \frac{\delta M}{M} + \frac{2\delta D}{D} + \frac{\delta h}{h}, \quad (10)$$

que, habida cuenta de que el margen de precisión de la medida del diámetro y la altura son los mismos ( $\delta h \equiv \delta D \equiv \delta L$ : la precisión del calibre empleado en medir

las longitudes, ¡no sería así si alguna de estas medidas estuviera afectada de la imprecisión estadística de un cuerpo no tan regular!), se puede expresar como

$$\Delta\rho_x^G(h) = \frac{2\delta L}{D} + \frac{1}{h} \left[ \frac{4\delta M}{\pi D^2 \rho_x} + \delta L \right], \quad (11)$$

una nueva expresión lineal en el inverso de la altura, con una ordenada en el origen que ahora depende principalmente del inverso diámetro del cilindro, y una pendiente en la que también contribuye sustancialmente el diámetro aludido y la densidad del cuerpo, valor idéntico para todas las muestras y próximo al 1 %, que coincide con el de la gráfica. Como método geométrico que es, el protagonismo de estos parámetros es ahora evidente, por contraste con los parámetros ‘hidrostáticos’ del método anterior. Además, a los efectos del cómputo del margen de precisión y del redondeo requerido[13,14], la expresión se puede aproximar como

$$\Delta\rho_x^G(h) \approx \frac{2\delta L}{D} + \frac{1}{h} [\delta L];$$

$$\Delta\rho_x^G(h, D, \delta L) = \delta L \left[ \frac{2}{D} + \frac{1}{h} \right], \quad (12)$$

teniendo en cuenta que el primer término del corchete es, como poco, un orden de magnitud inferior al segundo. Expresión óptima y sencilla del margen de precisión para un cilindro suficientemente regular –la muestra más fácilmente realizable en el torno, una esfera o un cubo crean más problemas que nos permite afrontar medidas de alta precisión con un equipamiento no muy complejo.

Pero, además, si no tuviéramos la posibilidad de elegir muestras de forma regular, el hidrostático sería la alternativa, habida cuenta de que esta misma expresión (11) nos serviría para determinar la densidad de un “cilindro” de líquido patrón –una probeta- también con suficiente precisión. De esta manera, con la alternancia de los dos métodos, se puede alcanzar medida óptima según las necesidades.

## 7. Conclusiones

En conclusión, la tarea presente -compleja, en efecto, pero más por la minuciosidad requerida que por su complicación

conceptual-, nos permite subrayar dos aspectos de interés en la metodología experimental: el primero, específico, por el que se prueba que la densidad es una propiedad intensiva de la materia, y el segundo, genérico, y derivado de la contrastación del aserto anterior, que la medición de una determinada propiedad en condiciones óptimas requiere la adaptación de los aparatos a las muestras y/o viceversa.

Por otra parte, es también evidente el interés de la gestión de los datos de una forma adecuada, cambiando el protagonismo de los parámetros implicados según las necesidades, insistiendo en la confrontación de los datos con la lectura de las ecuaciones [8,15], lo que permite comprobar que no sólo la precisión de los aparatos es importante en la mejora de la medida [11], sino que están supeditados al proceso de medición y a la naturaleza de las muestras.

No se han hecho evaluaciones específicas del grado de cumplimiento de los objetivos, mediante baterías de test diseñadas al efecto, pero, del examen de los informes y el seguimiento de la práctica, se aprecia una notable maduración; la diferencia en el comportamiento en la primera y segunda sesión con las dos restantes es bien marcada: se manifiesta principalmente en la soltura con la que se realiza la tercera sesión incorporando los datos directamente al programa de gestión, por contraste con las dos primeras, donde la intervención del profesor es más necesaria.

En el debate suelen surgir nuevas ideas, como la forma de construir un densímetro, su empleo para la medida de densidades de disoluciones, con objeto de probar, en efecto, que la densidad depende de la naturaleza estructura de la muestra, o cómo influye la temperatura. Esta tarea se propone como opcional, empleando un densímetro estándar ( $\delta\rho = \pm 0,05 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) y disoluciones acuosas de distinta concentración de sal común o sacarosa. Al tratar de estudiar el comportamiento de la densidad de las disoluciones con la temperatura, comprenden la limitación de su método, la importancia de su precisión, que pueden mejorar ligeramente mediante el método geométrico usando una probeta, pero no lo suficiente.

1. D.P. Ausubel, D. Novack y H. Hanessian, *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo* (Trillas, México, 1990).
2. L.C. McDermott, *Am. J. Phys.* **69** (2001) 1127.
3. F. Reif, *Am. J. Phys.* **63** (1995) 17.
4. D. Finster, *J. of Chemical Education* **66** (1989) 659.
5. F. Reif, & St J. Mark, *Am. J. Phys.* **47** (1979) 950.
6. S. Jara-Guerrero, *Rev. Mex. Fís.* **45** (1999) 204.
7. J.G. King, *Am. J. Phys.* **69** (2001) 11.
8. Mazur A., *Rev. Mex. Fís.* **47** (2001) 175.
9. J.F. Fuertes, *Revista Española de Física* **8** (1994) 37.
10. J.F. Fuertes y M. Alonso, *Revista de Enseñanza de la Física* **8** (1995) 51.
11. J.L. Haza, *Rev. Mex. Fís.* **49** (2003) 57.
12. C. Gutiérrez Aranzeta, *Introducción a la metodología experimental* (Limusa, México, 1985).
13. G.L. Squires, *Practical Physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).
14. V.P. Spiridonov y A. Lopatkin, *Tratamiento matemático de datos físico-químicos* (Mir, Moscú, 1983).
15. R.H. Romer, *Am. J. Phys.* **61** (1993) 128.
16. G. Hector y R. Riveros, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 512.
17. R. Matarranz y J.F. Fuertes, *Revista Española de Física* **16** (2002) 44.