

La construcción newtoniana de la gravitación universal

J.E. Marquina

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
México, D.F. 04510, México,
e-mail: marquina@servidor.unam.mx

Recibido el 2 de diciembre de 2004; aceptado el 17 de diciembre de 2004

En este artículo se analiza la forma en la que Newton introduce el concepto de gravitación universal, en el Libro III de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, basándose en los resultados matemáticos demostrados en los dos primeros libros así como en los Fenómenos y las Reglas para Filosofar que propone al principio del Libro III.

Descriptor: Newton; gravitación universal; *Principia Mathematica*.

This paper analyzes the way in which Newton introduces the concept of Universal Gravitation in Book III of the *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, based on the mathematical results proved in the two first books and in the Phenomena and the Rules of Reasoning in Philosophy that Newton proposes at the beginning of Book III.

Keywords: Newton; universal gravitation; *Principia Mathematica*.

PACS: 01.65. +g

1. Introducción

Los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) empiezan con lo que suele llamarse Sección Básica, en la cual se incluyen las definiciones fundamentales (masa, cantidad de movimiento, inercia, fuerza impresa y fuerza centrípeta), la discusión en torno a los absolutos (tiempo, lugar, espacio y movimiento) y los tres axiomas o leyes de movimiento. En los Libros I y II se plantean un amplísimo conjunto de demostraciones matemáticas que permiten, a decir de Newton, "... fundamentar nuestros razonamientos en asuntos filosóficos" [1]. El Libro III empieza con las cuatro Reglas para Filosofar y los seis Fenómenos. Con estos elementos, Newton procede a construir el concepto de gravitación universal.

2. Gravitación universal

No obstante que es prácticamente un hecho probado el que la gravitación universal no puede ser anterior a 1684, la leyenda newtoniana la sigue relacionando con la mítica manzana de 1666, que le otorga al concepto, más allá de sus virtudes propias, el carácter fundacional vinculado al bíblico árbol del conocimiento.

El concepto de gravitación universal es planteado por Newton en el Libro III (El Sistema del Mundo) de los *Principia*, una vez que, al final del Libro II, ha logrado desechar los vórtices cartesianos. Para lograr lo anterior, en la Sección IX (del Libro II), del movimiento circular de los fluidos, Newton demuestra, en la Proposición LII. Teorema XL, que:

"Si una esfera sólida gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito y el fluido sólo es obligado a girar por el impulso de esta esfera, y cada parte del fluido persiste en su movimiento uniforme, afirmo que los tiempos periódicos de las partes del

fluido son como los cuadrados de sus distancias al centro de la esfera" [2].

Una vez demostrado este resultado, Newton plantea, en el Escolio a la proposición, que ha "... intentado investigar las propiedades de los vórtices con el fin de determinar si los fenómenos celestes pueden explicarse recurriendo a ellas" [3]. El argumento newtoniano se cierra, apelando (sin decirlo textualmente) a la tercera ley de Kepler, al señalar "... que los tiempos periódicos de los planetas que giran en torno a Júpiter son como la 3/2ava potencia de sus distancias al centro de Júpiter, y la misma regla se aplica también a los planetas que giran en torno al Sol. Y estas reglas prevalecen con la mayor exactitud en lo hasta ahora descubierto por la observación astronómica. En consecuencia si los mencionados planetas se desplazan en vórtices que giran en torno a Júpiter y el Sol, los vórtices deberán girar conforme a aquella ley. Pero aquí hemos determinado que los tiempos periódicos de las partes del vórtice son como el cuadrado de las distancias al centro de movimiento y esta razón no puede ser disminuida y reducida a la 3/2ava potencia..." [4]. El párrafo termina con un auténtico desafío:

"Determinen entonces los filósofos cómo el fenómeno de la 3/2ava potencia puede ser explicado por vórtices" [5].

Más adelante, en el Escolio a la Proposición LIII. Teorema XLI (la última proposición del Libro II), Newton concluye que:

"Por tanto, es evidente que los planetas no son transportados en vórtices corpóreos. En efecto, según la hipótesis de Copérnico, los planetas que se mueven alrededor del Sol giran en elipses con el Sol como foco común y describen áreas proporcionales a los tiempos con radios trazados hasta el Sol. Pero las partes de un vórtice jamás pueden girar con semejante movimiento" [6].

Una vez desechados los vórtices y con la aceptación explícita de las tres leyes de Kepler, Newton, refiriéndose a los *Principia*, señala que:

“El primer Libro ayuda a comprender cómo tienen lugar estos movimientos en espacios libres sin vórtices y ahora lo explicaré de forma más completa en el Libro siguiente” [7].

El Libro III empieza con una introducción, a la que me referiré más adelante, continuando con las Reglas para Filosofar y los Fenómenos. Los primeros cuatro fenómenos se refieren a la constatación de la validez empírica de la Tercera Ley de Kepler. A continuación, Newton se dedica a construir, en las primeras trece proposiciones del Libro III, el concepto de gravitación universal.

Estas trece proposiciones se demuestran, de acuerdo con la lógica de los *Principia*, apelando a demostraciones generales hechas en los Libros I y II ya que, como señala Newton en la introducción al Libro III:

“En los Libros precedentes he expuesto principios de filosofía, no tanto filosóficos como matemáticos, sobre los cuales resulta posible fundamentar nuestros razonamientos en asuntos filosóficos” [8].

Sin embargo, dada la complejidad de los *Principia*, Newton aclara que:

“No significa esto que aconseje a nadie el estudio previo de cada proposición de esos Libros, pues abundan algunas que pueden costar demasiado tiempo incluso a los lectores doctos en matemáticas. Bastará con que se lean cuidadosamente las Definiciones, las Leyes de Movimiento y las tres primeras secciones del Libro primero, para pasar luego a este Libro sobre el sistema del mundo, consultando las demás Proposiciones de los otros dos según lo requieran su arbitrio y las referencias del texto” [9].

Efectivamente, doce de las trece proposiciones del Libro III apelan, explícitamente, a dieciocho proposiciones del Libro I, tres del Libro II, las Reglas I, II y IV del Libro III, la Tercera Ley y el Corolario a las Leyes de Movimiento.

El cuadro general de elementos utilizados en las trece primeras proposiciones del Libro III es el siguiente:

Proposición I:	Proposición II o III. Libro I. Proposición IV, Corolario VI. Libro I.
Proposición II:	Proposición II. Libro I. Proposición IV, Corolario VI. Libro I. Proposición XLV, Corolario I. Libro I.
Proposición III:	Proposición II o III. Libro I. Proposición XLV, Corolario I. Libro I. Proposición XLV, Corolario II. Libro I.
Proposición IV:	Proposición XXXVI. Libro I. Proposición IV, Corolario IX. Libro I. Proposición LX. Libro I.
Escolio	Reglas I y 2. Libro III.

Proposición V:	Ley III. Regla 2. Libro III.
Escolio	Reglas 1, 2 y 4. Libro III.
Proposición VI:	Proposición XXIV, Corolario I. Libro II. Proposición XXIV, Corolario VI. Libro II. Proposición LXXV, Corolario II. Libro I. Proposición LXXV, Corolario III. Libro I. Regla 3. Libro III.
Proposición VII:	Proposición LXIX. Libro I. Ley III. Proposición LXXIV, Corolario III. Libro I.
Proposición VIII:	Proposición LXXV y Corolarios. Libro I. Proposición LXXXVI y Corolarios. Libro I. Proposición IV, Corolario II. Libro I. Proposición LXXII. Libro I.
Proposición IX:	Proposición LXXXIII. Libro I.
Proposición X:	Proposición XL. Libro II. Proposición XXII. Libro II.
Proposición XI:	Corolario IV a las Leyes.
Proposición XIII:	Proposición I. Libro I. Proposición XI. Libro I. Proposición XIII. Corolario I. Libro I. Proposición LXVI. Libro I. Proposición LXVII. Libro I.

Dada la importancia de las veintiuna proposiciones a las que hice referencia, a continuación discutiré las más relevantes de ellas.

En la Sección II del Libro I, bajo el rubro general de “Sobre la determinación de fuerzas centrípetas”, Newton afirma, en la Proposición I, que:

“Las áreas que los cuerpos en revolución describen mediante radios trazados hasta un centro de fuerza inmóvil se encuentran en los mismos planos inmóviles y son proporcionales a los tiempos en los que se describen” [10].

Aunque el tratamiento es, a decir de Newton, puramente matemático, evidentemente la demostración se refiere a la segunda ley de Kepler, pero con el agregado de plantear que la validez de dicha ley está condicionada por la existencia de una fuerza centrípeta. En la demostración se explicita el vínculo existente entre el enunciado kepleriano y la ley de la inercia (primera ley), ya que en ausencia de la fuerza centrípeta, el móvil se desplazaría con un movimiento rectilíneo uniforme.

Este resultado se complementa con la Proposición II en la que se señala que:

“Todo cuerpo que se mueva en cualquier curva descrita en un plano y -mediante un radio trazado hasta un punto inmóvil o que progresa con movimiento rectilíneo uniforme- describa alrededor de ese punto áreas proporcionales a los

tiempos es urgida por una fuerza centrípeta dirigida hacia ese punto” [11].

En las Proposiciones I y II, Newton demuestra, por un lado, que una fuerza centrípeta genera una trayectoria que cumple con la ley de las áreas iguales en tiempos iguales (2ª ley de Kepler) y por el otro, que un movimiento a lo largo de una curva descrita por la ley de las áreas, implica la existencia de una fuerza centrípeta, de forma tal que con las dos proposiciones se demuestra que la ley de las áreas es condición necesaria y suficiente para el movimiento inercial en un campo central de fuerzas.

Con estas demostraciones, la segunda ley de Kepler deja de ser una regla astronómica para convertirse en parte medular de la mecánica racional ya que, a decir de Newton, en el Escolio a las tres primeras proposiciones:

“Puesto que la descripción regular de áreas indica que hay un centro hacia el cual tiende aquella fuerza por la que resulta más afectado el cuerpo, y por la cual es apartado de su movimiento rectilíneo y retenido en su órbita, ¿por qué no utilizar en lo sucesivo la descripción regular de áreas como indicación de un centro, en torno al cual se realiza todo movimiento circular en espacios libres?” [12].

En la Proposición III, Libro I, Newton plantea que:

“Todo cuerpo que mediante un radio trazado hasta el centro de otro cuerpo, movido como se quiera, describe alrededor de ese centro áreas proporcionales a los tiempos, es regido por una fuerza compuesta por la fuerza centrípeta tendente hacia ese otro cuerpo y por toda la fuerza acelerativa con la cual es impelido ese otro cuerpo” [13].

En la demostración de esta proposición, llama la atención que, no obstante que se trata de un resultado general, Newton nombra como “... L el primer cuerpo y T el segundo...” [14], en franca alusión a *Luna y Terra*, de forma tal que lo que se plantea es que si la Tierra está sujeta a alguna fuerza, la Luna estará sujeta a la misma, e “... impelida por la diferencia de las fuerzas... procederá a describir alrededor del cuerpo T áreas proporcionales a los tiempos” [15].

La Proposición IV, Libro I, establece que:

“Las fuerzas centrípetas de cuerpos que mediante movimientos regulares describen diferentes círculos tienden hacia los centros de esos círculos, y son entre sí como los cuadrados de los arcos descritos en tiempos iguales divididos respectivamente por los radios de esos círculos” [16].

Particularmente relevante es el Corolario VI a esta proposición ya que en él plantea el caso en el que “... los tiempos periódicos son como la potencia 3/2 de los radios...” [17] para concluir que bajo estas condiciones, “... las fuerzas centrípetas serán inversamente como el cuadrado de los radios” [18]. La importancia de este corolario radica en el hecho de que, como se señala, en el Escolio posterior a la Proposición IV, este caso “... se mantiene en los cuerpos celestes (como han observado Wren, Hooke y Halley); por eso mismo pretendo en lo que sigue tratar más ampliamente lo que concierne a la fuerza centrípeta decreciente como los cuadrados de las distancias con respecto a los centros” [19].

Hasta este punto, Newton ha logrado correlacionar la segunda ley de Kepler y la primera ley de movimiento con la fuerza centrípeta, que en el caso celeste es de la forma $1/r^2$.

Como si esto no bastara, al continuar el Escolio, señala que “... mediante la proposición precedente y sus corolarios podemos descubrir la proporción de una fuerza centrípeta a cualquier otra fuerza conocida, como la gravedad. Pues si por medio de su gravedad un cuerpo gira en un círculo concéntrico a la Tierra, esa gravedad es la fuerza centrípeta de tal cuerpo” [20].

Es sorprendente cómo, haciendo únicamente matemáticas (a decir de Newton), en estas cuatro proposiciones hay más información física que en la mayoría de los voluminosos tratados de la época.

Las siguientes proposiciones de la Sección II (Libro I) no son tan relevantes y solamente me gustaría apuntar la Proposición X, en la que Newton ataca, por primera vez, el caso de una órbita elíptica. Lo curioso es que analiza dicha órbita, pero con una fuerza centrípeta que tiende hacia el centro de la elipse, encontrando que será directamente proporcional a la distancia. Pareciera como si Newton deseara tratar este caso por completez pero sin inaugurar la siguiente sección, cuyo inicio, con la Proposición XI. Problema VI, es el muy relevante caso de una órbita elíptica con una fuerza centrípeta que tiende hacia el foco de la elipse. Este caso es un obvio referente a la primera ley de Kepler y al famoso encuentro con Halley, que normalmente se considera como el origen de los *Principia*. Newton demuestra, en la Proposición XI, que la fuerza centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo en la órbita elíptica y el foco de la elipse [21].

En la Proposición XII. Problema VII, se demuestra que si la órbita es hiperbólica, la fuerza centrípeta tendiente al foco, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia [22].

La Proposición XIII. Problema VIII, trata el caso de un cuerpo moviéndose en una parábola, en el que fuerza centrípeta dirigida al foco es, también, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia [23].

En el Corolario I a esta proposición, Newton completa la prueba al mostrar que “... cualquier cuerpo... urgido por la acción de una fuerza centrípeta que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia... se moverá en una de las secciones cónicas, teniendo su foco en el centro de fuerza...” [24]. En realidad lo que ha demostrado es que cualquier trayectoria en una sección cónica implica una fuerza centrípeta de la forma $1/r^2$ pero no, necesariamente, a la inversa.

Estas proposiciones resaltan el planteamiento kepleriano, plasmado en su primera ley, ya que de las órbitas elípticas se infiere la existencia de una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y de esta fuerza centrípeta se infiere una trayectoria a través de una sección cónica, de forma tal que la elipse es una de las posibilidades y de hecho es (con excepción del círculo) la única que representa una curva cerrada.

El siguiente conjunto de proposiciones relevantes para la construcción de la gravitación universal, pertenecen a la Sección XI del Libro I de los *Principia*. La Sección XI, que lleva por título “Sobre los movimientos de cuerpos que tienden unos a otros con fuerzas centrípetas” [25], empieza con una importante aclaración sobre el concepto de atracción, ya que:

“Hasta aquí he estado exponiendo las atracciones de cuerpos hacia un centro inmóvil, aunque muy probablemente no exista cosa semejante en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen dirigirse hacia cuerpos, y las acciones de los cuerpos atraídos y atrayentes son siempre recíprocas e iguales, por la Tercera Ley; con lo cual si hay dos cuerpos ni el atraído ni el atrayente se encuentran verdaderamente en reposo, sino que ambos... giran en torno a un centro común de gravedad, estando por así decirlo mutuamente atraídos. Y si existen más cuerpos, que o bien están atraídos por un cuerpo, atraído a su vez por ellos, o que se atraen todos mutuamente entre sí, tales cuerpos se moverán de modo tal entre sí que su centro común de gravedad se encontrará o bien en reposo o se moverá uniformemente hacia delante en línea recta. En consecuencia, pasaré ahora a tratar el movimiento de cuerpos que se atraen los unos a los otros, considerando las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque en estricto rigor físico, pudieran llamarse más apropiadamente impulsos” [26].

Esta aclaración de tipo físico es de la mayor relevancia pues, efectivamente, la tercera ley de movimiento, invalida la idea kepleriana de considerar (para el caso celeste) al Sol como atractor de los planetas individuales, al introducir la idea de interacción entre todos los cuerpos, planteamiento que será central para arribar al concepto de gravitación universal.

Una vez avisados de las complejidades a las que tendremos que enfrentarnos al hablar de física, la introducción a la Sección XI termina regresándonos al apacible mundo matemático ya que: “... estas Proposiciones deben considerarse puramente matemáticas; en esa medida, prescindiendo de cualesquiera consideraciones físicas, utilizo un discurso llano para hacerme comprender por un lector matemático” [27].

Bajo estas consideraciones, en la Proposición LXV. Teorema XXV, Libro I se plantea que:

“Los cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de sus distancias respecto de sus centros, pueden moverse entre sí en elipses; y mediante radios trazados hasta los focos pueden describir áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos” [28].

En esta proposición, llama la atención el carácter cauteloso de la aseveración relativa a las dos primeras leyes de Kepler ya que, como señala en la demostración “... tampoco es posible que cuerpos que se atraen unos a otros con arreglo a la ley supuesta en esta Proposición se muevan exactamente en elipses...” [29], aunque en los casos de cuerpos pequeños que giran alrededor de uno muy grande, “... las órbitas no diferirán mucho de las elipses...” [30].

La Proposición LXVI. Teorema XXVI es de la mayor importancia, ya que en ella ataca el problema de los tres cuerpos, cuyo caso más notable y evidente es el sistema Sol-

Tierra-Luna. En el enunciado de esta proposición, Newton plantea que:

“Si tres cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias, se atraen entre sí, y las atracciones acelerativas de dos cuerpos cualesquiera hacia el tercero son entre ellas inversamente como el cuadrado de las distancias, y los dos más pequeños giran en torno al mayor, afirmo que el interior de los dos cuerpos en revolución describirá por radios trazados hasta el más interno y mayor, áreas más proporcionales a los tiempos, y una figura más próxima a la elipse con su foco en el punto de intersección de los radios, si ese gran cuerpo es perturbado por tales atracciones que si el gran cuerpo no fuese atraído para nada por los menores y permaneciese en reposo; o de lo que acontecería si ese gran cuerpo fuese mucho más o mucho menos atraído, o mucho menos perturbado por las atracciones” [31].

Para el análisis de esta proposición, Newton empieza planteando dos casos. El caso I se refiere a órbitas coplanares de los tres cuerpos P, S y T, mientras que el caso II plantea que los cuerpos menores P y S giran en torno al mayor (T), en planos diferentes. En estos casos se analiza la perturbación que sufre la órbita elíptica de P en torno a T, por la influencia de S. Evidentemente, P puede ser interpretada como la Luna, T la Tierra y S el Sol, y cuando señala a S como cuerpo menor, se refiere (como aclara en el Corolario VI) a la influencia que tiene sobre P en comparación con la influencia que ejerce T.

Una vez probada la proposición para ambos casos, Newton plantea veintidós corolarios en los que analiza, exhaustivamente, las perturbaciones a la órbita kepleriana y otros problemas, como los relativos a la elaboración de una teoría de las mareas.

En la Proposición LXVII. Teorema XXVII y la Proposición LXVIII. Teorema XXVIII, se plantea la pertinencia de analizar el problema de tres cuerpos, desde el marco de referencia del centro de gravedad, ya que como se señala en el Corolario a la Proposición LXVIII, “... si varios cuerpos más pequeños giran en torno al grande puede inferirse fácilmente que las órbitas descritas se acercarán más a elipses, y las descripciones de áreas serán más uniformes si todos los cuerpos se atraen y perturban entre sí con fuerzas acelerativas, que son directamente como sus fuerzas absolutas e inversamente como los cuadrados de las distancias, y si el foco de cada órbita se sitúa en el centro común de gravedad de todos los cuerpos interiores... que si el cuerpo más interior estuviese en reposo y fuese convertido en foco común de todas las órbitas” [32].

En la Proposición LXIX. Teorema XXIX, Newton introduce en el análisis, a la masa de los cuerpos, al señalar que:

“En un sistema de varios cuerpos A, B, C, D, etc., si uno de esos cuerpos, digamos A, atrae a todo el resto, B, C, D, etc., con fuerzas acelerativas que son inversamente como los cuadrados de las distancias desde el cuerpo atractivo; y otro cuerpo, digamos B, atrae también al resto con fuerzas que son inversamente como los cuadrados de las distancias desde el cuerpo atractivo, las fuerzas absolutas de los cuerpos A y

B serán entre sí como los cuerpos mismos A y B a quienes pertenecen tales fuerzas” [33].

Para que no quede duda de que al referirse a los cuerpos mismos, se está refiriendo a la masa de ellos, en la demostración asegura que “. . . la aceleración atractiva del cuerpo B hacia A es a la aceleración atractiva del cuerpo A hacia B como la masa del cuerpo A es a la masa del cuerpo B” [34].

La Sección XII del Libro I de los *Principia* es, tal vez, una de las más relevantes, pues en ella se ataca el problema de las fuerzas atractivas entre cuerpos esféricos y es, con base en este análisis, que Newton se convenció del carácter universal de la gravitación, ya que como él señala en la Proposición VIII del Libro III:

“Tras determinar que la fuerza de gravedad hacia todo un planeta obedece a las fuerzas de la gravedad hacia todas sus partes y está compuesta de ellas, y que hacia cada una de las partes se encuentra en proporción inversa a los cuadrados de las distancias a la parte, me quedaba todavía la duda de si dicha proporción inversa al cuadrado de las distancias era exacta o muy aproximadamente aplicable a la fuerza total compuesta de tantas fuerzas parciales, pues podía ocurrir que la proporción exactamente aplicable a grandes distancias no lo fuera cerca de la superficie del planeta. . . Pero con ayuda de las Proposiciones LXXV y LXXVI del Libro I y sus Corolarios, terminé por convencerme de la verdad de la Proposición en su forma actual” [35].

En la Proposición LXXV. Teorema XXXV, se plantea que:

“Si hacia los diversos puntos de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales que decrecen como el cuadrado de las distancias al punto, afirmo que otra esfera similar será atraída por ella con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los centros” [36].

La Proposición LXXVI. Teorema XXXVI, es equivalente, pero aplicada a “. . . esferas desiguales (en cuanto a densidad de materia y fuerza atractiva) en la misma razón progresiva desde el centro hasta la circunferencia, pero semejantes para todo lo demás a cada distancia dada al centro. . .” [37].

Con las proposiciones de la Sección XXII, Newton está preparado para correlacionar la gravedad terrestre con la dinámica celeste restando, únicamente, como elemento esencial para la construcción de la gravitación universal, la demostración relativa a la proporcionalidad entre masa y peso, la que elabora en la Proposición XXIV. Teorema XIX de la Sección VI, Libro II, al señalar que:

“Las cantidades de materia de los cuerpos pendulares cuyos centros de oscilación se encuentran a igual distancia del centro de suspensión están en razón compuesta de la razón de los pesos y el cuadrado de la razón de los tiempos de las oscilaciones en el vacío” [38].

La demostración de esta proposición, que utiliza de manera prioritaria a la segunda ley (de Newton), es seguida por siete corolarios. En el primero de ellos se aclara que:

“En consecuencia, si los tiempos son iguales, las cantidades de materia en cada uno de los cuerpos son como los pesos” [39].

El más directo de todos los corolarios es el VI, en el que se señala que de lo anterior “. . . se desprende un método para comparar tanto cuerpos entre sí, en lo que toca a la cantidad de materia de cada uno, como pesos del mismo cuerpo en diferentes lugares, para conocer la variación de su gravedad. Y, por medio de experimentos realizados con la mayor precisión, siempre he observado que la cantidad de materia de los cuerpos es proporcional a su peso” [40].

Los experimentos a los que hace referencia son expuestos, con extremo detalle, en el Escolio al final de la Sección VI [41].

En este último corolario, Newton está proponiendo, de pasada y sin enfatizar mayormente, la equivalencia entre la masa inercial y la gravitacional.

Con el acervo de demostraciones de los Libros I y II, Newton está preparado para construir, en el Libro III, el concepto de gravitación universal.

En la Proposición I. Teorema I del Libro III se demuestra que los satélites de Júpiter y Saturno son mantenidos en sus órbitas por fuerzas que tienden hacia los planetas correspondientes y que son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias entre los centros de los planetas y sus satélites, basándose la demostración en resultados previos que implican que dichos satélites recorren áreas iguales en tiempos iguales en torno al planeta, ya que cumplen con la proporcionalidad de la potencia $3/2$ entre los periodos y las distancias. La Proposición II. Teorema II, es equivalente a la anterior, pero referida a las órbitas de los planetas primarios y la Proposición III. Teorema III, plantea lo mismo, pero para el caso de la Luna respecto de la Tierra [42].

Como muestra de lo puntilloso de Newton en sus construcciones, basta hacer notar que en ninguna de estas proposiciones hace referencia alguna al carácter elíptico de las órbitas, necesitando únicamente las Proposiciones II, III, IV y XLV del Libro I.

La Proposición IV. Teorema IV, representa la identificación entre la fuerza centrípeta que retiene a la Luna en su órbita con la fuerza de gravedad que se observa en la superficie terrestre. En palabras de Newton:

“Que la Luna gravita hacia la Tierra y es continuamente apartada de su movimiento rectilíneo y retenida en su órbita por la fuerza de gravedad” [43].

Para la demostración, Newton apela a los datos, acerca de la distancia media de la Luna a la Tierra, de Ptolomeo, Copérnico, Street y Tycho y a las mediciones francesas del tiempo de revolución de la Luna, para comparar con los datos de Huygens sobre la caída de los cuerpos en la superficie terrestre, de manera que “. . . la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es, en la misma superficie de la Tierra, igual a la fuerza de gravedad que observamos aquí en los cuerpos pesados” [44]. Apelando ahora a las Reglas para Filósofo I y II, que señalan la pertinencia de asignar a los mis-

mos efectos las mismas causas, Newton concluye que "... la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es precisamente la misma fuerza que comúnmente llamamos gravedad..." [45].

En el Escolio a esta proposición, Newton recalca que "... puesto que ambas fuerzas, es decir, la gravedad de los cuerpos pesados y las fuerzas centrípetas... se dirigen hacia el centro de la Tierra y son semejantes e iguales entre sí, ambas tendrán (por las Reglas I y II) una y la misma causa. Y, en consecuencia, la fuerza que retiene a la Luna en su órbita es precisamente la misma fuerza que llamamos gravedad..." [46].

La Proposición V. Teorema V, representa la generalización de la idea de gravitación en torno a un centro, de forma tal:

"Que los planetas circunjovianos gravitan hacia Júpiter, los que circundan Saturno hacia Saturno, los que circundan al Sol hacia el Sol, siendo apartados del movimiento rectilíneo y retenidos en órbitas curvilíneas por las fuerzas de gravedad" [47].

Para la demostración, Newton apela a la Regla II, ya que si los satélites de Júpiter y Saturno, en torno a dichos planetas, y los planetas en torno al Sol "... presentan el mismo aspecto de la revolución de la Luna en torno a la Tierra... tienen que obedecer a la misma especie de causas, especialmente puesto que se ha demostrado que las fuerzas de que dependen dichas revoluciones tienden hacia los centros de Júpiter, Saturno y el Sol, y que dichas fuerzas, al alejarse de Júpiter, Saturno y el Sol, decrecen en la misma proporción y obedeciendo a la misma ley de la gravedad al alejarse de la Tierra" [48].

La universalidad del concepto de gravitación se fortalece cuando, en el Corolario I de esta proposición, introduce a la tercera ley y plantea el carácter interactivo de la relación gravitacional, de forma que "... Júpiter gravitará, en consecuencia, hacia todos sus satélites, Saturno hacia los suyos, la Tierra hacia la Luna y el Sol hacia todos los planetas primarios" [49].

La orgía cósmica de interacciones entre los cuerpos celestes se completa, en el Corolario III, al dar un paso más y asegurar que:

"Todos los planetas gravitan unos hacia otros... A ello se debe que Júpiter y Saturno, al acercarse a su conjunción, perturben sensiblemente sus movimientos con su atracción mutua. Igualmente perturba el Sol los movimientos de la Luna, y tanto el Sol como la Luna perturban nuestro mar, como más adelante explicaremos" [50].

Las perturbaciones mutuas entre Júpiter y Saturno es un tema que le inquietó a Newton desde, al menos, diciembre de 1684, ya que en una carta a Flamsteed del 3 de diciembre, le señalaba su sorpresa por el hecho de que la órbita de Saturno no cumpliera con la tercera ley de Kepler, sospechando que la discrepancia podía deberse a la perturbación producida por Júpiter, en la conjunción de ambos planetas. En su respuesta, del 5 de enero de 1685, Flamsteed dejaba ver su sorpresa acerca de la idea de que fueran las mutuas influencias las responsables de las variaciones y le daba información sobre sus

propias observaciones. En la respuesta de Newton, del 12 de enero de 1685, éste se mostraba preocupado pues los nuevos datos le indicaban que había sobreestimado el efecto de Júpiter,

haciéndolo sospechar que podría existir otra causa que modificara la proporción kepleriana [51].

En la Proposición VI. Teorema VI, Newton introduce un nuevo elemento, la masa de los cuerpos, al plantear:

"Que todos los cuerpos gravitan hacia todos los planetas, y que los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a distancias iguales del centro del planeta son proporcionales a las cantidades de materia que respectivamente contienen" [52].

Como señala Chandrasekhar "... esta proposición es el centro y el núcleo de los argumentos de Newton para la universalidad de su ley de gravitación: la igualdad universal de las masas inerciales y gravitacionales" [53]. En este sentido, es obvio que la clave para la demostración de la proposición es la Proposición XXIV del Libro II.

Al terminar esta demostración, con sus cinco corolarios, nos encontramos en lo que podría considerarse el punto climático de los *Principia*, el momento en el que Newton siente que ha construido, pacientemente, los cimientos que le permiten formular, en la Proposición VII. Teorema VII, la Ley de gravitación universal:

"Que el poder de la gravedad pertenece a todo cuerpo en proporción a la cantidad de materia que cada uno contiene" [54].

En la demostración a esta proposición, Newton apela a la Proposición LXIX del Libro I, al señalar:

"Ya hemos probado antes que todos los planetas gravitan unos hacia otros, y también que la fuerza de gravedad hacia cada uno de ellos, considerada particularmente, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro del planeta. De donde se sigue (por la Proposición LXIX, Libro I, y sus corolarios) que la gravedad que tiende hacia todos los planetas es proporcional a la materia que éstos contienen" [55].

Finalmente, el largo camino recorrido, arriba a la famosa expresión matemática para la gravitación universal:

$$\mathbf{F} \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Como si esto no bastara, al continuar la demostración, Newton señala que:

"Por lo demás, puesto que todas las partes de un planeta A gravitan hacia otro planeta B, y la gravedad de cada una de las partes es a la gravedad del todo como la materia de la parte a la materia del todo, y puesto que (por la Ley III) a cada acción corresponde una reacción igual, el planeta B, por su parte gravitará hacia todas las partes del planeta A, y su gravedad hacia una parte cualquiera será a la gravedad hacia el todo como la materia de la parte a la materia del todo" [56].

La Proposición VII es, para Newton, tan definitiva, que es la única de las trece proposiciones a las que he hecho referencia, que es rematada con Q.E.D., *Quod erat demonstrandum*.

La imagen de todos los cuerpos gravitando entre sí, es llevada hasta las partes de los cuerpos, en una especie de danza

cósmica, que no obstante su endemoniada complejidad, produce lo que Newton califica (en el Escolio General) como el "... elegantísimo sistema del Sol, los planetas y los cometas..." [57].

En el proceso de transformaciones conceptuales que le permiten a Newton arribar a la gravitación universal, hay que resaltar el importante papel que juega la tercera ley [58], pues es a través de ella que se transforma la fuerza proveniente del Sol que actúa sobre los planetas, en una fuerza mutua entre el sistema Sol-planeta, y entre los propios planetas y éstos con los satélites, en un juego de interacciones en las que, como señala Newton en *De Mundi*, "... puede considerarse a un cuerpo como atrayente y al otro como atraído, pero esta distinción es más matemática que natural. En realidad la atracción es de cada cuerpo sobre cada cuerpo y por tanto del mismo género en todos" [59].

La Proposición VIII. Teorema VIII, es la famosa demostración relativa a la atracción entre dos esferas, en la que plantea que:

"Si en dos esferas que gravitan la una hacia la otra la materia es semejante en todos los lugares circundantes y equidistante de los centros, el peso de cada una de las esferas hacia la otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros" [60].

Como señalé con anterioridad, la demostración de esta proposición se basa en las Proposiciones LXXV y LXXVI del Libro I, y representa el resultado que Newton necesitaba para estar seguro de que se podía generalizar el concepto de gravitación para la gravedad cercana a un planeta.

Podría decirse que dado que la gravitación universal ya estaba planteada en la Proposición VII, la Proposición VIII no representa más que una puntualización, cuya relevancia radica más en la importancia histórica que tuvo en la creación del concepto, que en lo que aporta al ser colocada después de la Proposición VII.

A partir de este punto, las restantes cinco proposiciones tienen un carácter peculiar, pues lo que agregan es de diversas índoles.

La Proposición IX señala: "Que la fuerza de gravedad, considerada hacia abajo desde la superficie de los planetas, decrece aproximadamente en proporción a las distancias al centro de los planetas" [61].

Lo que se plantea en esta proposición es que dado que la fuerza de la gravedad que ejercen los planetas sobre una partícula viene dada por ley de la gravitación universal como:

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_p m}{\mathbf{r}^2},$$

(donde G es la constante de gravitación universal, M_p la masa del planeta, m la masa de la partícula y \mathbf{r} el vector de posición de la partícula, cuyo origen se encuentra en el centro del planeta), si la partícula penetra al planeta, ésta sólo sentirá la atracción debida a la masa interna y no la debida a la cáscara externa del planeta. Como la masa está dada por $M_p = \rho V$, donde ρ es la densidad del planeta (que supondremos cons-

tante) y $V = (4/3)\pi r^3$ es el volumen, entonces, la fuerza que actúa sobre la partícula vendrá dada por $\mathbf{F} = -(4/3)\pi G m r$.

La Proposición X es de carácter totalmente distinto y se refiere a que "... los movimientos de los planetas en los cielos pueden subsistir durante un tiempo desmesurado" [62]. El planteamiento parece destinado a calmar a aquellos que puedan llegar a pensar que el Sistema del Mundo puede colapsarse súbitamente.

Antes de la Proposición XI, se encuentra la Hipótesis I, en la que Newton plantea:

"Que el centro del sistema del mundo está inmóvil" [63].

Ese punto en reposo es, a decir de Newton, el centro del Sistema del Mundo. En el comentario (o elaboración) a la hipótesis, las razones que se dan para este hecho son francamente pueriles, pues Newton señala que:

"Esto lo reconocen todos, aunque algunos sostienen que la Tierra y otros que el Sol, ocupan una posición fija en dicho centro" [64].

Esta apelación democrática a que todos lo reconocen, introducida de manera hipotética, es una clara muestra del carácter *a priori* de la idea newtoniana de espacio absoluto, que se confirma con el curioso jueguito de plantear, inmediatamente, y en conexión con la Hipótesis Primera, la Proposición XI. Teorema XI, en la que afirma:

"Que el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas está inmóvil" [65].

De manera que ese referente absoluto es, efectivamente, un punto en el que no se ubica ningún cuerpo; ese punto es, a decir de Newton, el centro de gravedad del Sistema Solar.

Curiosamente, esta afirmación que debería haber sido hecha directamente en la Hipótesis Primera, es planteada como una proposición que es demostrada, al señalar que:

"Pues (por el Corolario IV de las leyes) ese centro está en reposo o avanza uniformemente por una línea recta; pero si ese centro se moviera, el centro del mundo se movería también, lo que contradice la Hipótesis" [66].

El falso formalismo al que apela Newton en esta demostración, muestra, a decir de Barbour, "... una extraordinaria mezcla de sólida ciencia y geocentrismo residual que raya en la superstición" [67], dado que lo único que en realidad Newton necesita para la contrastación entre teoría y datos observacionales, es la consideración de que las estrellas fijas se encuentran en reposo, lo cual señala de pasada y sin discutir, en los Fenómenos I, II y IV.

Lo importante de la Proposición XI se refiere a la introducción del concepto de centro común de gravedad, que le permite plantear, en la Proposición XII:

"Que el Sol es agitado por un movimiento continuo, pero nunca se aleja mucho del centro común de gravedad de todos los planetas" [68].

En estas proposiciones, está implícita la imposibilidad de hacer cálculos exactos de los movimientos planetarios ya que, aparentemente, uno sólo está posibilitado a calcular órbitas promedio en torno al centro de gravedad.

En la Proposición XIII. Teorema XIII, finalmente, Newton regresa al problema que, presuntamente, dio origen a los

Principia, que es el relativo al tipo de órbitas planetarias las que, tal como lo plantea la primera ley de Kepler, son elipses con el Sol en uno de los focos. A decir de Newton:

“Que los planetas se mueven por elipses que tienen su foco común en el centro del Sol, y que, mediante radios trazados a dicho centro, describen áreas proporcionales a los tiempos de descripción” [69].

En la demostración, Newton apela a las Proposiciones I y XI y al Corolario I de la Proposición XIII del Libro I, aunque acotando que la verdad de la proposición se basa en la consideración del Sol inmóvil y de que los planetas no actúan unos sobre otros, lo cual si bien no es estrictamente cierto, representa una buena aproximación dado que, en general, las acciones de “... unos planetas sobre otros son tan reducidísimas que pueden ignorarse” [70]. Sin embargo “... la acción de Júpiter sobre Saturno no puede ignorarse, pues la fuerza de la gravedad hacia Júpiter es a la fuerza de gravedad hacia el Sol... como 1 a 1067. En consecuencia, en la conjunción de Júpiter y Saturno... la gravedad de Saturno hacia Júpiter será a la gravedad de Saturno hacia el Sol... como 1 a aproximadamente 211. La consecuencia de ello es una perturbación de la órbita de Saturno en cada conjunción de este planeta con Júpiter, perturbación tan sensible que intriga a los astrónomos” [71].

En este punto, Newton está mostrando las diferencias existentes entre trabajar en el mundo matemático, que es exacto, o trabajar en el mundo físico. Las leyes de Kepler son exactas en el mundo matemático, mientras que en el físico son aproximaciones, ya que, como señala en la tercera versión de *De Motu*, “... considerar simultáneamente todas estas causas de movimiento y definir estos movimientos mediante leyes exactas que permitan un cálculo apropiado, si no me equivoco, excede la capacidad de todo el entendimiento humano” [72].

Ya para terminar la demostración de la Proposición XIII, Newton señala que la órbita de la Tierra es sensiblemente perturbada por la Luna, pero que sin embargo, el “... centro común de gravedad de la Tierra y la Luna se mueve por una elipse en torno al Sol en el foco de ésta y, mediante un radio trazado al Sol, describe áreas proporcionales a los tiempos de descripción” [73].

El comentario anterior muestra el camino a seguir en la descripción de los fenómenos tanto celestes como terrestres. En este camino, el concepto de centro de gravedad juega un papel fundamental.

Una vez construido el concepto de gravitación universal, Newton se dedica a aplicarlo para explicar el comportamiento de la Luna, la causa de las mareas, la precesión de los equinoccios y el movimiento de los cometas.

Los *Principia* terminan con el famoso Escolio General, en el que Newton reconoce su límite:

“Hasta aquí hemos explicado los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza gravitatoria, pero no hemos asignado aún causa a esa fuerza. Es seguro que debe proceder de una causa que penetra hasta los cuerpos mismos del Sol y los planetas, sin sufrir la más mínima disminución de su fuerza, que no opera de acuerdo con la cantidad de las superficies de las partículas sobre las que actúa... sino de acuerdo con la cantidad de materia sólida contenida en ellas, propagándose en todas direcciones y hasta inmensas distancias y decreciendo siempre como el cuadrado inverso de las distancias... Pero hasta el presente no he logrado descubrir la causa de esas propiedades de gravedad a partir de los fenómenos y no finjo hipótesis” [74].

3. Conclusiones

La gravitación universal representa un hito en la historia de la ciencia, no sólo por su poder explicativo sino también por el rigor empleado por Newton en su construcción. El estilo newtoniano plasmado en los *Principia* se convirtió, más allá de las críticas que recibió desde el ámbito de los filósofos cartesianos, en el modelo del quehacer en filosofía natural que hizo exclamar a Alexander Pope:

“Nature and Nature’s laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light”

1. I. Newton, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo* (Editora Nacional, Madrid, 1982) p. 655.

2. *ibid.*, p. 643.

3. *ibid.*, p. 649.

4. *ibid.*, p. 649.

5. *ibid.*, p. 650.

6. *ibid.*, p. 651.

7. *ibid.*, p. 652.

8. *ibid.*, p. 652.

9. *ibid.*, pp. 655-656.

10. *ibid.*, p. 270.

11. *ibid.*, p. 273.

12. *ibid.*, pp. 275-276.

13. *ibid.*, p. 274.

14. *ibid.*, p. 274.

15. *ibid.*, p. 275.

16. *ibid.*, p. 276.

17. *ibid.*, pp. 276-277.

18. *ibid.*, p. 277.

19. *ibid.*, p. 277.

20. *ibid.*, p. 277.

21. cfr. *ibid.*, pp. 288-290.
22. cfr. *ibid.*, pp. 290-293.
23. cfr. *ibid.*, pp. 293-294.
24. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 294.
25. *ibid.*, p. 404.
26. *ibid.*, p. 404.
27. *ibid.*, p. 404.
28. *ibid.*, p. 412.
29. *ibid.*, p. 412.
30. *ibid.*, p. 412.
31. *ibid.*, p. 415.
32. *ibid.*, p. 432.
33. *ibid.*, pp. 432-433.
34. *ibid.*, p. 433.
35. *ibid.*, pp. 677-678.
36. *ibid.*, p. 440.
37. *ibid.*, p. 441.
38. *ibid.*, p. 553.
39. *ibid.*, p. 554.
40. *ibid.*, p. 554.
41. cfr. *ibid.*, (1982), pp. 567-578.
42. cfr. *ibid.*, (1982), pp. 667-669.
43. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 669.
44. *ibid.*, p. 670.
45. *ibid.*, p. 670.
46. *ibid.*, p. 671.
47. *ibid.*, p. 671.
48. *ibid.*, p. 672.
49. *ibid.*, p. 672.
50. *ibid.*, p. 672.
51. cfr. C. Wilson, "From Kepler's Laws, so-called to Universal Gravitation: Empirical Factors", *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 6, (1970) pp. 89-170.
52. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 673.
53. S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader* (Clarendon Press, Oxford, 1995) p. 362.
54. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 676.
55. *ibid.*, p. 676.
56. *ibid.*, p. 677.
57. *ibid.*, p. 814.
58. cfr. I.B. Cohen, "Newton's Third Law and Universal Gravity", *Journal of the History of Ideas*, Vol. 48. (1987) pp. 571-593.
59. I. Newton, *Isaac Newton: El Sistema del Mundo* (Alianza Editorial, Madrid, 1983) p. 66.
60. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 677.
61. *ibid.*, p. 680.
62. *ibid.*, p. 680.
63. *ibid.*, p. 682.
64. *ibid.*, p. 682.
65. *ibid.*, p. 682.
66. *ibid.*, p. 682.
67. J.B. Barbour, *Absolute or Relative Motion? A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge, 1989) p. 643.
68. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 682.
69. *ibid.*, p. 683.
70. *ibid.*, p. 684.
71. *ibid.*, p. 684.
72. I. Newton, *De Motu Sphaericorum Corporum in fluidis*, en Herivel, J., (1965), *The Background of Newton's Principia. A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664-84* (Clarendon Press, Oxford, 1965) p. 301.
73. I. Newton, (1982), *op. cit.*, p. 685.
74. *ibid.*, pp. 816-817.