

Medición de la susceptibilidad magnética de sustancias líquidas en el laboratorio de física

M. Sosa, T. Córdova, J.J. Bernal, G. Caldera*, M.E. Cano*, G. Carrillo*, F. Córdoba*, E.G. Delgado*, M.G. Espinosa*, P.C. García*, E. Hernández*, J.C. Hernández*, I. Pérez*, M. Reyes*, J.A. Ruiz*, and C. Wiechers*
*Instituto de Física, Universidad de Guanajuato,
 Loma del Bosque 103, Lomas del Campestre, 37150 León, Gto., México.*

Recibido el 4 de octubre de 2004; aceptado el 21 de noviembre de 2005

En este trabajo se reportan mediciones de la susceptibilidad magnética del agua desionizada. Se obtiene un experimento simple basado en la interacción de un imán con la sustancia, medida a través de una balanza analítica. Se utiliza un imán permanente de NdFeB, el cual tiene momento magnético $m = 0.58 \pm 0.04 \text{ A}\cdot\text{m}^2$. Se obtiene un valor promedio para la susceptibilidad del agua desionizada de $\chi (-6.8 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ (SI), usando un modelo teórico para la interacción entre un dipolo y un medio cilíndrico. Se demuestra además que un modelo de un medio semi-infinito no es una buena descripción de la geometría experimental empleada. Éste es un experimento fácil de implementar en el laboratorio de física básica para la determinación de susceptibilidades magnéticas de sustancias líquidas.

Descriptores: Susceptibilidad magnética; sustancias diamagnéticas.

Measurements of the magnetic susceptibility of the non-ionized water are reported. A simple experiment based on the interaction of a magnet with the substance, measured by an analytical balance, was employed. A NdFeB permanent magnet, which has a magnetic moment $m = 0.58 \pm 0.04 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ was used. A mean value for the bulk susceptibility of the non-ionized water of $\chi (-6.8 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ (SI) was obtained, by using a theoretical model for the interaction between a dipole and a cylindrical sample. It is also demonstrated that a semi-infinite model is not a good description of the used experimental geometry. This is an experiment easy to be implemented into the basic physics laboratory, for the determination of magnetic susceptibilities of liquid substances.

Keywords: Magnetic susceptibility; diamagnetic. substances.

PACS: 01.50P; 06.30Lz; 75.01A

1. Introducción

Es bien conocido que toda sustancia, al ser colocada en un campo magnético externo, experimenta una magnetización. La susceptibilidad magnética χ es una de las propiedades inherentes de la materia y nos permite describir la forma y grado de magnetización de cualquier sustancia al ser colocada en un campo magnético. Según que la sustancia adquiera una magnetización en el mismo sentido, o en sentido contrario al campo externo, decimos que la sustancia es paramagnética o diamagnética, respectivamente.

Por otro lado, la determinación de χ es un procedimiento experimental que requiere cuidado, debido a la magnitud de los valores de χ para la mayoría de las sustancias. El valor de χ para sustancias paramagnéticas y diamagnéticas es $|\chi| \ll 1$, típicamente $\chi \approx 10^{-6}$ (SI), para la mayoría de estas sustancias. Del mismo modo, es importante enfatizar que a pesar de χ ser una variable adimensional, su valor depende del sistema de unidades.

Varios procedimientos existen para determinar la susceptibilidad magnética. White [1] ha reportado la medición de χ de componentes paramagnéticos y de la bacteria magnetostática *Escherichia Coli*, usando un péndulo de *photogate*. Ardelean *et al.* [2] estudiaron la susceptibilidad de diferentes tipos de vidrios conteniendo iones de hierro, por medio de una balanza tipo Faraday.

Por otro lado, Davis [3,4] propuso el uso de un pequeño imán permanente para magnetizar una muestra y posteriormente medir su interacción magnética a través de una balanza

analítica, determinando así la χ de la muestra. Este método se basa en la determinación de la interacción magnética entre un medio finito (cilindro) y el dipolo del imán. Con este método, Davis [3] ha reportado la medición de susceptibilidades magnéticas relativamente pequeñas en metales débilmente magnéticos, del orden de 3×10^{-4} , con una incertidumbre menor al 20 %.

Una simplificación del método de Davis [3] se obtiene de algunas hipótesis importantes, tales como que el imán es un dipolo magnético puntual perfecto y que la distancia entre el imán y la muestra permite usar el método de imágenes, al considerar la muestra un plano semi-infinito. Cano [5] ha aplicado recientemente esta simplificación para determinar la susceptibilidad de muestras líquidas débilmente magnetizables, tales como la sangre humana. Así mismo, Carneiro *et al.* [6] han empleado el método para determinar la susceptibilidad magnética del jugo de la fruta *Euterpe Olerácea*. Muy recientemente, Espinosa [7] ha utilizado este procedimiento para caracterizar magnéticamente la pulpa de diversas frutas mexicanas.

El experimento descrito aquí fue montado debido a que en general los estudiantes de física, aunque conocen teóricamente las propiedades magnéticas de la materia, desconocen cómo medirlas, esto a pesar de que sus efectos forman parte del funcionamiento de innumerables dispositivos cotidianos.

En este experimento se utiliza un arreglo experimental simple y fácil de implementar, basado en un imán permanente y una balanza analítica de precisión para medir la interacción

magnética entre el imán y la muestra. Este experimento fue desarrollado como parte de un curso de laboratorio de física.

2. Modelo teórico

Toda sustancia es magnetizada al ser expuesta a un campo magnético externo. Si la magnetización es en la dirección del campo, se dice que es una sustancia paramagnética, en tanto que si es en la dirección opuesta se conoce como diamagnética.

Del mismo modo, ya sea que la sustancia en consideración sea diamagnética o paramagnética, ésta se comporta como si fuese otro imán y ejercerá una fuerza de atracción o repulsión sobre el imán original, la cual puede ser registrada en una balanza analítica de precisión.

Para calcular tales fuerzas, recordemos que la fuerza magnética que experimenta un dipolo \vec{m} debida a la presencia de un campo magnético no uniforme es [8]

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}. \tag{1}$$

Por otro lado, la inducción magnética \vec{B} debida a un dipolo de momento magnético \vec{m} está dada por la expresión

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}], \tag{2}$$

donde la constante $\mu_0/4\pi=10^{-7}$ N/A² y \hat{r} es el vector unitario en la dirección del vector \vec{r} que parte desde el dipolo. Si el momento dipolar \vec{m} y el vector \vec{r} se colocan en la dirección \hat{z} , entonces $\vec{m} \cdot \vec{r} = m_z$ y sólo tendremos la componente del campo en la dirección \hat{z} , esto es, la Ec. (2) se reduce a

$$B_z = \frac{\mu_0 m_z}{2\pi z^3}. \tag{3}$$

2.1. Modelo I: solución para un medio semi-infinito

Para deducir la fuerza en la Ec. (1), se propone utilizar el método de imágenes, considerando al sistema formado por el dipolo original (imán) sumergido en aire en presencia de un plano infinito magnetizable (muestra). Ahora introduzcamos un dipolo de momento magnético \vec{m}_i , el cual permite reemplazar la muestra y simplificar los cálculos. En la Fig. 1 se muestra el dipolo real \vec{m} (producido por el imán) y su

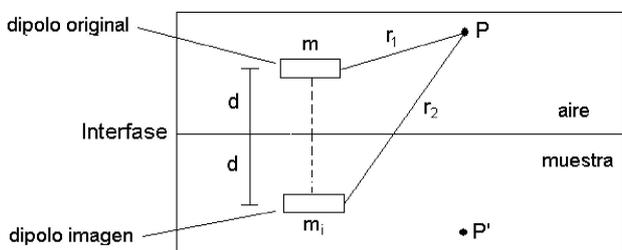


FIGURA 1. Representación esquemática del modelo I. Se muestra el dipolo real \vec{m} (producido por el imán) y su imagen \vec{m}_i (generado por la muestra), separados una distancia $2d$. Se muestran además un punto P fuera de la muestra y otro punto P' dentro de ella.

imagen \vec{m}_i (generado por la muestra), separados una distancia $2d$. Se muestran además un punto P fuera de la muestra y otro punto P' dentro de ella.

Si asumimos que el plano $z = 0$ coincide con la superficie de la muestra, la Ec. (1) nos da

$$F_z = m_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \right) \right],$$

la cual al ser evaluada en $z = 2d$, que corresponde a la distancia de separación entre los dos dipolos, nos da

$$F_z = 3m_i \frac{\mu_0 m}{32\pi d^4}. \tag{4}$$

Para encontrar la relación entre \vec{m} y \vec{m}_i , aplicamos condiciones en la frontera sobre la superficie de la muestra. Utilizando la forma integral de flujo en una pequeña “caja de píldoras” que encierra los dos medios

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} da = 0,$$

obtenemos que las componentes normales son continuas, esto es,

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} = 0. \tag{5}$$

Por otro lado, aplicando la ley integral de Ampère a un contorno rectangular entre los dos medios y asumiendo que la densidad de corriente superficial es cero, se llega a

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = 0, \tag{6}$$

es decir, las componentes tangenciales de la intensidad de campo magnético son continuas a través de la interfase. Como consecuencia de que $\vec{j} = 0$, se tiene que $\nabla \times \vec{H} = 0$.

Por lo tanto, \vec{H} puede expresarse como el gradiente del potencial escalar magnético φ_m , esto es, $\vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$.

De la Ec. (6) se tiene que

$$\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial t} = 0,$$

por lo que

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \tag{7}$$

donde hemos colocado la referencia en el infinito, es decir, si $r \rightarrow \infty$, $\varphi_{m1}(r) = \varphi_{m2}(r) = 0$. Por consiguiente, usando la Ec. (5) se obtiene

$$\mu_0 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n}. \tag{8}$$

Deduzcamos ahora la forma explícita de φ_{m1} y φ_{m2} . Para un punto P fuera de la muestra, el potencial φ_{m1} tiene la forma

$$\varphi_{m1} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m(z-d)}{r_1^3} + \frac{m_i(z+d)}{r_1^3} \right],$$

donde $r_1^2 = x^2 + y^2 + (z-d)^2$ y $r_2^2 = x^2 + y^2 + (z+d)^2$, (ver Fig. 1).

Para un punto P' localizado dentro de la muestra, podemos considerar el medio magnetizado como un blindaje apantallando el efecto del dipolo original, así

$$\varphi_{m2} = \frac{c}{4\pi} \frac{(z-d)}{r_1^3}, c = \text{constante.}$$

Aplicando condiciones de frontera para φ_{m1} y φ_{m2} en el origen y usando las ecuaciones (7) y (8), se obtiene que

$$\mu_0 \left[\frac{m}{d^3} + \frac{m_i}{d^3} \right] = \mu_1 \left[\frac{c}{d^3} \right]$$

y

$$\left[\frac{m(z-d)}{r_1^3} + \frac{m_i(z+d)}{r_2^3} \right]_{z=0} = \left[\frac{c(z-d)}{r_1^3} \right]_{z=0},$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones para determinar c y m_i

$$\mu_0 (m + m_i) = \mu_1 c,$$

$$m - m_i = c,$$

donde $\mu_{xg} = g\mu_{wg}\mu_r$, siendo μ_r la permeabilidad relativa. Por definición $\mu_1 = \mu_0(1+\chi)$, así que, $\mu_r = 1+\chi$. Por consiguiente, las soluciones del sistema de ecuaciones anterior son

$$m_i = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} m = \frac{\chi}{\chi + 2} m,$$

$$c = \frac{2}{\mu_r + 1} m = \frac{2}{\chi + 2} m.$$

Sustituyendo la primera solución de estas en la expresión para la fuerza (4) nos queda

$$F = 3 \frac{\mu_0 m^2}{32\pi d^4} \left(\frac{\chi}{\chi + 2} \right). \tag{9}$$

De esta expresión, haciendo $F = m_0g$, podemos despejar χ para obtener

$$\chi = \left[\frac{2\zeta d^4 F}{m^2 - \zeta d^4 F} \right], \tag{10}$$

donde

$$\zeta = \frac{32\pi}{3\mu_0} = \frac{8 \times 10^7}{3} A^2/N.$$

2.2. Modelo II: Solución para un medio finito (cilindro)

Las Ecs. (9) y (10) son válidas bajo algunas suposiciones importantes [3]:

1. La muestra se comporta como un medio semi-infinito.
2. El imán se comporta como un dipolo puntual.

Sin embargo, en el laboratorio el arreglo experimental utilizado no siempre reproduce estas condiciones. En particular, en la determinación de χ de sustancias líquidas, la muestra es un cilindro (medio finito) y el imán está lejos de comportarse como un dipolo puntual perfecto.

Debido a lo anterior, el modelo físico de las Ecs. (9) y (10) no siempre es aplicable. La solución a un cilindro interactuando magnéticamente con un dipolo es el modelo físico que debe entonces ser empleado en muchos casos. La Ref. 3 describe la expresión para la fuerza en este modelo, la cual está dada como

$$F = (\mu_r - 1) \mu_0 \frac{3m^2}{64\pi} \times \left(\frac{1}{z_0^4} - \frac{1}{z_1^4} - \frac{z_0^2 + R^2/3}{(z_0^2 + R^2)^3} + \frac{z_1^2 + R^2/3}{(z_1^2 + R^2)^3} \right), \tag{11}$$

donde $\chi = \mu_r - 1$, z_0 es la distancia del centro del imán a la cara inferior del cilindro (muestra), z_1 es la distancia del centro del imán a la parte superior de la columna de líquido y R es el radio del cilindro [3].

La Ec. (11) se reduce a la Ec. (9) para una muestra semi-infinita, esto es, para $R^4 \gg z_0^4/3$ y $z_1^4 \gg z_0^4$, como era de esperarse.

3. Materiales y métodos

El arreglo experimental utilizado consiste en una balanza analítica, sobre la cual se coloca un imán permanente y un recipiente en la parte superior conteniendo la muestra, la cual

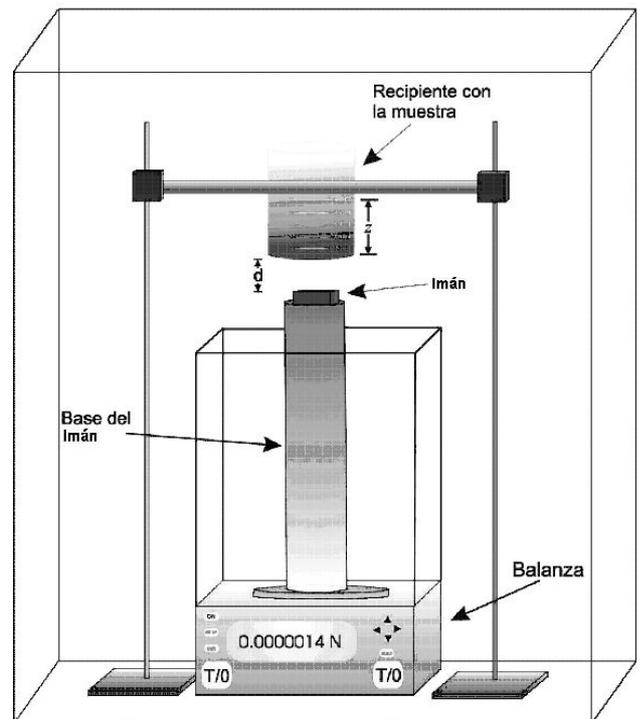


FIGURA 2. Diagrama esquemático del montaje experimental.

no está en contacto ni con el imán ni con la balanza. Un diagrama esquemático del sistema es mostrado en la Fig. 2. La balanza analítica empleada fue una Explorer OHAUS, la cual tiene una precisión de 0.1 mg y una capacidad máxima de 210 g. El imán permanente fue un paralelepípedo ($2.5 \times 2.5 \times 1.3$ cm) de NdFeB, el cual genera un campo magnético en su superficie cercano a 0.3 T.

Para determinar el momento dipolar m del imán, se midió la inducción magnética como función de la distancia, en un rango de 0.625 cm a 37.12 cm, colocando el sistema referencia en el centro del imán. La inducción magnética se midió utilizando un gaussmetro digital 2100 Magnetic Instruments, con precisión de 10^{-5} T, el cual mide la inducción magnética axialmente. Un ajuste de los datos experimentales al modelo de campo dipolar

$$B = \frac{2m \times 10^{-7}}{r^3} (T), \tag{12}$$

arrojó un valor de $m = 0.58 \pm 0.04$ A·m².

Para determinar los efectos en la medición, tanto del volumen de líquido empleado como del área en la cual se distribuye la sustancia frente al imán, se midió la fuerza magnética F como función del volumen, en dos recipientes cilíndricos de tamaños diferentes, con diámetros de 4.0 cm y 7.0 cm, respectivamente, manteniendo una distancia constante de 1.75 cm entre el imán y la muestra.

Así mismo, se realizaron mediciones de F para un volumen fijo de 10 ml de agua, en un recipiente de 7.0 cm de diámetro, variando la distancia del imán a la muestra desde 0.97 cm hasta 1.57 cm. Diversas mediciones de F como función de la distancia fueron también realizadas empleando distintos volúmenes de líquido en recipientes de diferentes diámetros.

3.1. Análisis de incertidumbres en el experimento

En el método experimental utilizado, las principales fuentes de errores sistemáticos que afectan la medición de χ son la determinación del momento magnético m del imán, la medida de la distancia d muestra-imán y la medición de la fuerza de interacción F .

Partiendo de la Ec. (9), para $\chi \ll 1$, la incertidumbre de se estima como

$$\Delta\chi = \frac{64\pi}{3\mu_0} \Delta \left(\frac{Fd^4}{m^2} \right), \tag{13}$$

o bien

$$\left(\frac{\Delta\chi}{\chi} \right)^2 = 16 \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F} \right)^2,$$

donde las incertidumbres relativas de cada una de las variables, debidas a los instrumentos de medición, han sido determinadas a ser

$$\left(\frac{\Delta d}{d} \right) \approx 4 \times 10^{-3}, \quad \left(\frac{\Delta m}{m} \right) \approx 4 \times 10^{-2}$$

y

$$\left(\frac{\Delta F}{F} \right) \approx 10^{-5}.$$

De aquí se obtiene que la incertidumbre en el valor medido de la susceptibilidad es

$$\left(\frac{\Delta\chi}{\chi} \right) \approx 4.4 \times 10^{-2}.$$

4. Resultados

Los valores de F obtenidos para diferentes condiciones experimentales, esto es, distintas distancias imán-muestra y diferentes volúmenes de líquidos, muestran que la fuerza magnética varía como función de estas cantidades, debido al cambio en la magnetización. En particular, F decrece como función de la distancia y crece como función del volumen siguiendo un comportamiento de una función logística, esto es, un crecimiento rápido al inicio y luego tiende a un valor constante.

En nuestro experimento se obtuvo el valor de χ_{gel} agua des-ionizada para todas las condiciones experimentales descritas arriba, utilizando los dos modelos teóricos discutidos en la Sec. 2.

Es importante enfatizar que los valores obtenidos para (no presentados en el texto) a partir del modelo I discutido arriba, muestran una dispersión muy amplia de los valores. Específicamente, el valor obtenido no fluctúa alrededor de algún valor promedio. Por consiguiente, la interpretación física es que el modelo I no es aplicable para la geometría empleada en nuestro experimento, ya que si bien la fuerza magnética cambia con la distancia y el volumen, por cambiar la magnetización, el valor de χ_{gel} debe ser constante, dentro del error experimental.

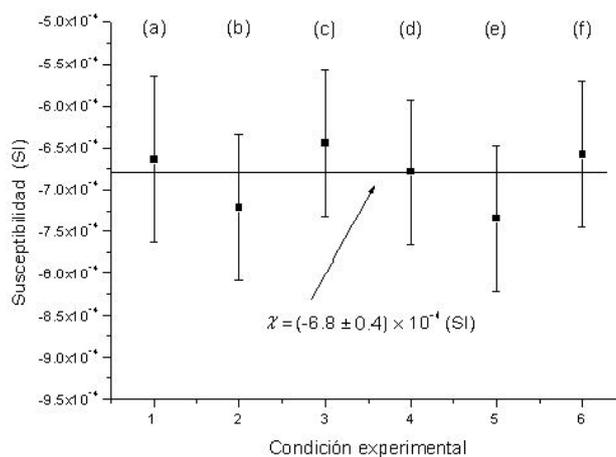


FIGURA 3. Susceptibilidad magnética del agua des-ionizada (calculada a partir del modelo II) para mediciones de la fuerza magnética hechas en seis condiciones experimentales diferentes. (a) $R=0.60$ cm, $Z_0 = 1.80$ cm, $Z_1 = 3.30$ cm. (b), (e) y (f) $R=1.77$ cm, $Z_0 = 2.17$ cm, $Z_1 =$ [variable] cm. (c) y (d) $R=1.77$ cm, $Z_0 =$ [variable] cm, $Z_1 =$ [variable] cm.

Por consiguiente, nos limitamos en lo que sigue a presentar los resultados del segundo modelo.

4.1. Resultados del modelo II

Debido a que el modelo teórico para un medio semi-infinito falla para describir los datos de este experimento, aplicamos ahora el modelo para un cilindro.

En la Fig. 3 se muestra el valor de χ para mediciones de la fuerza magnética hechas en seis condiciones experimentales diferentes, esto es, variando la distancia z_0 del centro del imán a la cara inferior del cilindro (muestra), la distancia z_1 del centro del imán a la parte superior de la columna de líquido y el radio R del cilindro [3].

Los datos obtenidos muestran que el valor de χ glucosa alrededor de un valor promedio, $\chi = (-6.8 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ (SI). Así, el modelo II describe adecuadamente la geometría del experimento planteado, arrojando valores que son independientes del montaje experimental.

5. Discusión y conclusiones

En este experimento hemos medido la susceptibilidad magnética del agua des-ionizada, mediante un arreglo expe-

rimental simple, fácil de implementar en un laboratorio de Física básica. La medición consiste en la determinación, a través de una balanza analítica, de la interacción magnética entre la muestra y un pequeño imán.

Se analizaron dos modelos teóricos para describir los datos experimentales. El primero basado en un medio semi-infinito y el segundo basado en un cilindro. Se demostró que para la geometría planteada, sólo el modelo del cilindro resultaba válido. Aplicando este modelo se obtuvo un valor promedio para la susceptibilidad del agua des-ionizada de $\chi = (-6.8 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ (SI). Este valor está dentro del orden de magnitud del reportado en la literatura [9].

Finalmente cabe destacar que valores del orden de hasta 10^{-6} para la susceptibilidad del agua han sido reportados por otros autores [6]. No obstante, esta discrepancia en la literatura puede fácilmente explicarse en términos del tipo de agua utilizada en los diversos experimentos, particularmente del contenido de minerales, lo cual afecta sus propiedades electromagnéticas.

* Alumnos.

1. R.B. White, *Determination of magnetic susceptibility for paramagnetic compound and Escherichia Coli* (Arkansas School for Mathematics and Sciences Report, 1996).
2. I. Ardelean, P. Pascuta y M. Peteanu, *Mod. Phys. Lett. B* **16** (2002) 231.
3. R.S. Davis, *American J. Phys.* **60** (1992) 365.
4. R.S. Davis, *Sci. Technol.* **4** (1993) 141.
5. M.E. Cano, *Caracterización de las propiedades magnéticas de*

la sangre: Mediciones experimentales y simulación computacional, Tesis de Maestría, Universidad de Guanajuato (2003).

6. A.A.O. Carneiro, A.T. Touse y O. Baffa, *Quimica Nova* **26** (2003) 952.
7. M.G. Espinosa, [comunicación privada, (2004)].
8. J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética* (Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, 1996).
9. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, (CRC Press Inc., Boca Raton, 1988).