

Fenómeno de lentes gravitacionales en el espacio-tiempo de Janis, Newman y Winicour

E. Román-Hernández, J.G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Suárez-Xique y B. Zenteno-Mateo
*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla,
 Apartado Postal 1152, 72001. Puebla, Pue., México.*

Recibido el 26 de agosto de 2005; aceptado el 27 de marzo de 2006

En el presente trabajo integramos las ecuaciones que describen las geodésicas luxoides del cono de luz de un punto arbitrario en el espacio-tiempo de Janis, Newman y Winicour y construimos, en forma exacta, las ecuaciones que describen el fenómeno de lentes gravitacionales. Demostramos que bajo ciertas aproximaciones nuestros resultados exactos se reducen a la ecuación de lente delgada. Además, usamos nuestras ecuaciones exactas para reobtener los resultados obtenidos por Virbhadra y Ellis usando su ecuación, la cual, es aplicable en el límite de campo fuerte [18]. Es decir, mostramos que para, $0 < q/M < \sqrt{3}$, el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW es cualitativamente similar al que aparece en el agujero negro de Schwarzschild, y, para $q/M > \sqrt{3}$, el fenómeno de lentes gravitacionales, en estas dos soluciones, es totalmente diferente.

Descriptor: Lentes gravitacionales.

In the present work we integrate the null geodesic equations of the light cone of an arbitrary point in the Janis, Newman and Winicour space-time and we construct, in an exact way, the equations that describe the gravitational lensing phenomenon. We show that under certain conditions our exact results reduce to the thin lens equation. Furthermore, we use our exact equations to reobtain the results obtained by Virbhadra and Ellis by using their strong field limit equation [18]. That is, we show that for, $0 < q/M < \sqrt{3}$, the gravitational lensing phenomenon in the JNW solution is qualitatively similar to that due to a Schwarzschild black hole and that for, $q/M > \sqrt{3}$, the gravitational lensing phenomenon, in these two solutions, is totally different.

Keywords: Gravitational lensing.

PACS: 04.20.Cv; 04.70.-s; 95.30.Sf

1. Introducción

El fenómeno que resulta de la deflexión de la luz en un campo gravitacional es conocido como *fenómeno de lentes gravitacionales*, y a un objeto que produce una deflexión detectable se le conoce como *lente gravitacional*. En la actualidad este fenómeno se describe empleando la teoría general de la relatividad. Sin embargo, mucho antes del establecimiento de esta teoría, Newton (1704) sospechaba que el campo gravitacional podría afectar a los rayos de luz. Más tarde, usando la teoría corpuscular de la luz y la teoría newtoniana de la gravitación, Cavendish (1784) y posteriormente Soldner (1801), entre otros, encontraron el ángulo de deflexión que debería experimentar la luz debido al campo gravitacional de un cuerpo esférico de masa M . En 1911, Einstein, [1], usando el principio de equivalencia y suponiendo que la métrica espacial es euclídeana volvió a obtener este mismo resultado (ver también la Ref. 2). Cuatro años más tarde establece la teoría general de la relatividad [3] y calcula en forma aproximada el ángulo de deflexión que experimenta un rayo de luz en el campo gravitacional del Sol. Este resultado fue verificado en 1919 durante un eclipse solar por un grupo encabezado por Eddington. Es importante remarcar que el ángulo de deflexión obtenido por Einstein usando la teoría linealizada de la relatividad general es dos veces el resultado que obtuvo en 1911.

Parece ser que Eddington (1920) [4] fue el primero en señalar que el fenómeno de lentes gravitacionales puede dar lugar a la formación de imágenes múltiples correspondientes a una sola fuente. Estudiando el fenómeno de la deflexión de

la luz de estrellas a causa del campo gravitacional de estrellas, en 1924, Chwolson [5], estableció las condiciones bajo las cuales se puede observar lo que actualmente se conoce como anillo de Einstein. Este mismo cálculo fue realizado, a mediados de los años 30, por Einstein [6] y de sus resultados concluyó que este fenómeno no podría ser observado. Sin embargo, en 1937, Zwicky [7], estableció de forma clara que las galaxias podrían ser usadas como lentes gravitacionales y predijo que este fenómeno podría ser observado. Aún así, durante un buen periodo el interés por las lentes gravitacionales había permanecido en una etapa casi inactiva, hasta que Klimov [8], Liebes [9] y Refsdal [10, 11], de forma independiente, reabrieron el estudio de este fenómeno con sus trabajos en la década de los años 60. Klimov, en 1963, investigó la deflexión de la luz, proveniente de galaxias, a causa de otras galaxias. Liebes, en 1964, investigó el mismo problema pero con estrellas como fuentes de radiación y con cúmulos globulares y estrellas en nuestra galaxia como deflectores. Refsdal, en 1964, fue el primero en remarcar que la óptica geométrica paraxial podría usarse para el estudio de las propiedades de las lentes gravitacionales puntuales.

Un cuasar es una fuente ideal para estudiar el fenómeno de lentes gravitacionales debido a su alta luminosidad, apariencia puntual y a su gran distancia a la Tierra (de esta forma habrá mayor probabilidad de encontrar uno o más deflectores entre la fuente y el observador), su descubrimiento, en 1963 por Schmidt [12], cimentó el camino para la observación de este fenómeno. En 1979, Walsh, Carswell y Weymann [13] descubrieron el primer ejemplo de lente gravitacional. En es-

te caso la fuente es el cuasar 0957+561, y se observaron dos imágenes separadas por 5.7 segundos de arco.

Para entender la formación de imágenes múltiples en el fenómeno de lentes gravitacionales, consideremos el sistema más simple; es decir, la lente de Schwarzschild. En este caso, se supone que la lente es una masa puntual M , que junto con la fuente puntual y el observador se encuentran en un espacio de fondo, el cual es R^3 . Además se supone que los rayos de luz emitidos por la fuente antes y después de pasar por la masa puntual son geodésicas del espacio de fondo, es decir, son líneas rectas, y que sufren una deflexión abrupta en el instante que pasan por la lente puntual. En este sistema los rayos de luz emitidos por la fuente puntual permanecen en un plano. Esto significa que de todos los rayos de luz que son emitidos por la fuente, los únicos que podría detectar el observador se deben de encontrar en el plano definido por la lente, la fuente y el observador. En la Fig. 1, β denota la posición angular de la fuente, S , en ausencia de la lente gravitacional, ψ denota la posición angular de la imagen de la fuente, I . D_{OL} , D_{LS} y D_{OS} denotan las distancias del observador a la lente, de la lente a la fuente y del observador a la fuente, respectivamente. Mientras que $\hat{\alpha}$ es el ángulo de desviación de Einstein. La línea que une al observador con la fuente se llama eje óptico del sistema. Usando la figura 1, un cálculo directo muestra que la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales, en la aproximación de ángulos pequeños, está dada por [14, 15]

$$\psi^2 - \beta\psi - \psi_E^2 = 0, \tag{1}$$

con

$$\psi_E \equiv \sqrt{\frac{4D_{LS}GM}{D_{OS}D_{OL}c^2}}, \tag{2}$$

donde G es la constante de gravitación universal y c es la rapidez de la luz en el vacío.

De la Ec. (1), encontramos que dada β , la posición de la fuente, las posiciones de sus imágenes están dadas por

$$\psi_{\pm} = \frac{\beta}{2} \pm \psi_E \sqrt{\frac{\beta^2}{4\psi_E^2} + 1}. \tag{3}$$

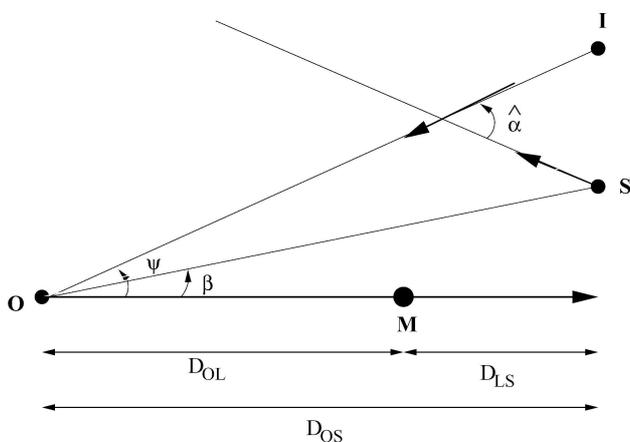


FIGURA 1. Sistema de lente puntual.

De este último resultado es claro que si $\beta > 0$, entonces $\psi_+ > 0$ y $\psi_- < 0$. Esto significa que la fuente tiene una imagen en cada lado de la lente. Cuando la fuente se encuentra sobre el eje óptico, es decir, existe una alineación perfecta, entonces $\psi_+ = \psi_E = -\psi_-$. Para entender este resultado recordemos que de todos los rayos de luz que emite la fuente, los únicos que podrá detectar el observador se encuentran en el plano definido por la fuente, la lente y el observador. En este caso de alineación perfecta, se tiene simetría axial respecto al eje óptico y, por lo tanto, el observador podrá registrar una cantidad de rayos de luz equivalente al número de puntos que se encuentran en un círculo. La imagen que se obtiene bajo estas condiciones es el denominado anillo de Einstein y su posición angular respecto al eje óptico está dada por ψ_E [14, 15].

En la derivación de la Ec. (1) se hacen aproximaciones que únicamente son consistentes con la versión linealizada de la teoría de la relatividad general. Esto, en parte, es completamente justificado debido a la consistencia entre los datos que predice esta ecuación y las observaciones actualmente realizadas. Este hecho es una de las pruebas experimentales de la teoría general de la relatividad en la aproximación de campo débil. Sin embargo, la teoría general de la relatividad no se ha probado en el régimen de campos gravitacionales intensos, tales como los generados en la vecindad de un agujero negro o una estrella de neutrones. Así que, el estudio del fenómeno de lentes gravitacionales producido por campos gravitacionales intensos podría ser una herramienta para este propósito. Debido a que en estas condiciones el carácter no lineal de la teoría general de la relatividad es fundamental, se requiere de la generalización de la Ec. (1). En esta línea de investigación, Virbhadra y Ellis [16], presentaron una ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales que es aplicable al espacio-tiempo de Schwarzschild. El inconveniente de este resultado es que en su derivación aún se hacen aproximaciones. Virbhadra, Narasimha y Chitre [17] aplicaron un procedimiento análogo al espacio-tiempo descrito por la solución de Janis, Newman y Winicour [18]. Recientemente, Newman y colaboradores describieron un procedimiento para construir una ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma exacta en un espacio-tiempo arbitrario y lo aplicaron al espacio-tiempo de Schwarzschild [19–21]. Para establecer este resultado se parte de una variedad de dimensión cuatro con métrica lorentziana, (\mathcal{M}, g_{ab}) y una línea de mundo, \mathcal{L} , temporaloide que representa la historia de un observador. En \mathcal{M} se toma una distribución arbitraria de fuentes puntuales que son tratadas como partículas de prueba que no afectan la geometría del espacio-tiempo. Esta distribución puede interpretarse como un conjunto de fuentes puntuales individuales cada una moviéndose sobre una línea de mundo temporaloide, o bien como una fuente con extensión espacial. En este enfoque se supone que todos los parámetros que caracterizan el fenómeno de lentes gravitacionales en el espacio-tiempo se determinan de las propiedades de la métrica, g_{ab} . Además, se hace uso del siguiente hecho: de todos los rayos de luz que emite cada una de las fuentes los úni-

cos que podrá detectar un observador son los que intersectan su línea de mundo. De esta manera, la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma exacta en un espacio-tiempo arbitrario se obtiene de la familia de conos de luz pasados de cada uno de los puntos de la línea de mundo del observador.

Los objetivos del presente trabajo son:

- establecer la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales, en forma exacta, en el espacio-tiempo descrito por la solución de Janis, Newman y Winicour (JNW), la cual describe el campo gravitacional externo de un cuerpo estático esféricamente simétrico de masa M y carga escalar q ;
- demostrar que bajo ciertas condiciones esta ecuación se reduce a la Ec. (1); y
- estudiar las diferencias que aparecen en el fenómeno de lentes gravitacionales en las soluciones de JNW y de Schwarzschild usando nuestras ecuaciones exactas.

Con el propósito de facilitar la comprensión de nuestro trabajo, en la Sec. 2, siguiendo la Ref. 22, se integran las ecuaciones que describen las geodésicas del cono de luz de un punto arbitrario x_0^a , del espacio-tiempo de Minkowski de dimensión tres, ya que éste es el caso más sencillo que se puede tratar. En la Sec. 3 establecemos nuestros resultados. Finalmente, se presentan las conclusiones.

2. Conos de luz en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski

En esta sección mostramos cómo obtener el cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski. Para este propósito, comenzamos con la métrica de Minkowski en coordenadas minkowskianas, es decir,

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = dt^2 - (dx^2 + dy^2), \quad (4)$$

donde $-\infty < t, x, y < \infty$ proporciona el rango de las coordenadas. Un cálculo directo muestra que todas las componentes del tensor de Riemann para este espacio-tiempo son cero, lo cual significa que el espacio-tiempo de Minkowski es plano. Es importante remarcar que para integrar las ecuaciones que describen las geodésicas luxoides del cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, en principio se puede usar un conjunto de coordenadas arbitrario; por ejemplo, se podrían usar las coordenadas minkowskianas, sin embargo existe un conjunto de coordenadas más apropiado para este propósito. Para clarificar este punto supongamos que se tiene una partícula puntual constreñida a moverse sobre un círculo de radio 2 en \mathcal{R}^2 . Si usamos un sistema coordenado cartesiano tal que el centro del círculo coincide con el origen de coordenadas, entonces la ecuación de constricción estará dada por $x^2 + y^2 = 4$; pero si usamos coordenadas polares entonces la ecuación de constricción toma una forma más simple, es decir, $r = 2$. Este

ejemplo pone de manifiesto que para ciertos propósitos un conjunto de coordenadas es más apropiado que otro. El conjunto de coordenadas que usaremos para integrar las ecuaciones que describen las geodésicas luxoides del cono de luz futuro de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, que denotaremos por u, l y θ , se obtiene realizando la siguiente serie de transformaciones de coordenadas:

$$\begin{cases} a) & x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta, \\ b) & t = \sqrt{2}u + r, \\ c) & l = 1/\sqrt{2}r. \end{cases} \quad (5)$$

Antes de continuar mostraremos que este conjunto de coordenadas está intrínsecamente asociado con una familia particular de conos de luz del espacio-tiempo de Minkowski. Para este propósito, recordemos que usando coordenadas minkowskianas el cono de luz con vértice en el origen de coordenadas se describe por $t^2 - x^2 - y^2 = 0$, o usando las Ecs. (5a) por $(t - r)(t + r) = 0$. Esto significa que $t - r = 0$, o bien $t + r = 0$; los puntos del espacio-tiempo de Minkowski que cumplen con la primera condición definen el cono de luz futuro del origen de coordenadas, mientras que los puntos que cumplen con la segunda condición definen el cono de luz pasado. Restrigiéndonos al cono de luz futuro y usando la Ec. (5b) es claro que éste queda definido, usando las coordenadas u, r , y θ , por todos los puntos del espacio-tiempo tales que $u = 0$. De esto y las Ecs. (5) concluimos que la coordenada u etiqueta cada uno de los conos de luz futuros de los puntos del espacio-tiempo $(\sqrt{2}u, 0, 0)$; por ejemplo, $u = 0$ corresponde al cono de luz futuro del punto $(0, 0, 0)$, mientras que $u = 1$ corresponde al cono de luz futuro del punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$. La coordenada θ etiqueta cada una de las geodésicas que forman el cono de luz futuro etiquetado por un valor dado de u (recuerde que en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski el número de geodésicas que forman el cono de luz de un punto arbitrario es igual al número de puntos que definen un círculo); por ejemplo, si $u = 1$ y $\theta = \pi/4$, entonces estamos describiendo la geodésica luxoide del cono de luz futuro del punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$ tal que su vector tangente hace un ángulo $\theta = \pi/4$ con eje x positivo. Finalmente, si $u = u_0$ y $\theta = \theta_0$ son fijos, la coordenada r etiqueta los puntos sobre la geodésica luxoide del cono de luz futuro con $u = u_0$ y $\theta = \theta_0$. En la Fig. 2 se presenta el cono de luz futuro del punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$ mientras que en la Fig. 3 se presenta la geodésica luxoide de este cono de luz etiquetada con $\theta = \pi/4$. En esta misma figura se puede observar el punto con coordenadas $u = 1, r = 1$ y $\theta = \pi/4$. En forma análoga uno puede mostrar que los conos de luz pasados de los puntos del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski con coordenadas $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ están descritos por $t = \sqrt{2}u - r$. Observe que esta última ecuación se obtiene de la Ec. (5b) reemplazando t y u por $-t$ y $-u$ respectivamente. Respecto a la Ec. (5c) observe que en este caso se trata de una nueva parametrización de los puntos sobre las geodésicas. Este último cambio de variable es más útil cuando se requiere obtener la

intersección del cono de luz futuro de un punto arbitrario del espacio-tiempo con nulidad infinita [20,22]. Sin embargo, hemos incluido este cambio de variable en este caso para hacer la analogía más transparente con el caso del espacio-tiempo de Janis, Newman y Winicour tratado en la siguiente sección, en donde este cambio de variable permite realizar algunas integrales, en el caso aproximado, en una forma más directa, tal y como ocurre en el problema de Kepler en la mecánica clásica al obtener las ecuaciones de las trayectorias [23, 24].

Usando las Ecs. (5) encontramos que el elemento de línea (4), se puede reescribir de la siguiente forma:

$$ds^2 = 2du^2 - \frac{2}{l^2} du dl - \frac{1}{2l^2} d\theta^2. \tag{6}$$

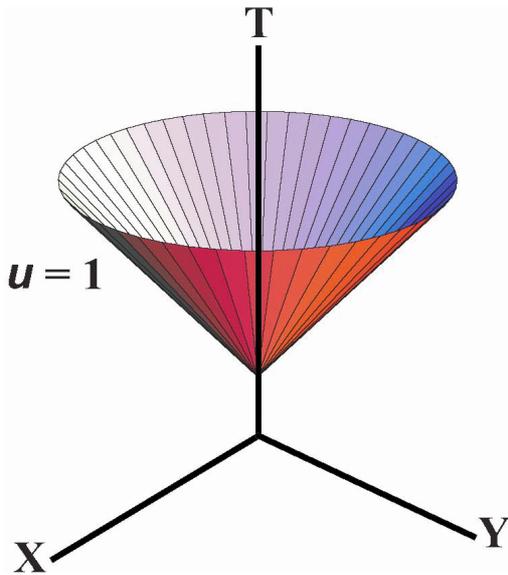


FIGURA 2. Cono de luz futuro del punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$. Esta gráfica se obtiene usando las Ecs. (5a) y (5b) con $u = 1$.

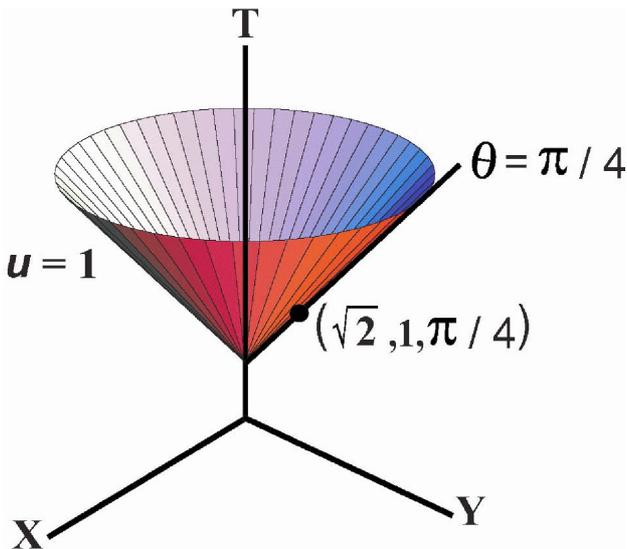


FIGURA 3. Cono de luz futuro del punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$. En esta figura se puede observar la geodésica con puntos $(u = 1, r, \theta = \pi/4)$, y el punto con coordenadas $u = 1, r = 1$ y $\theta = \pi/4$.

De esta ecuación es claro que las geodésicas luxoides radiales, es decir, las líneas de mundo tales que $\theta = \text{constante}$ y $ds^2 = 0$, están descritas por $u = \text{constante}$.

Por otra parte, es bien conocido que las ecuaciones que describen las geodésicas de un espacio con métrica g_{ab} , y coordenadas locales x^a , están dadas por [25–35]

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0, \tag{7}$$

donde (\cdot) , denota la derivada con respecto a un parámetro afín λ , y

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} [g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}] \tag{8}$$

son los denominados símbolos de Christoffel. Además, es inmediato demostrar que las Ecs. (7) son las ecuaciones de Euler-Lagrange para la función lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b. \tag{9}$$

En el caso especial de una métrica lorentziana, para obtener las geodésicas nulas uno debe de resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, Ecs. (7) e imponer la condición adicional de que el vector tangente sea luxoide, es decir,

$$\dot{x}^a \dot{x}_a = 0. \tag{10}$$

Por lo tanto, de la Ec. (6), se obtiene que una lagrangiana que describe las geodésicas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski está dada por

$$L = \dot{u}^2 - \frac{\dot{l}^2}{l^2} - \frac{\dot{\theta}^2}{4l^2}. \tag{11}$$

Un cálculo directo demuestra que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con esta lagrangiana están dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \left(2\dot{u} - \frac{\dot{l}}{l^2} \right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{u}}{l^2} \right) + \left(\frac{2\dot{u}\dot{l}}{l^3} + \frac{\dot{\theta}^2}{2l^3} \right) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{\theta}}{2l^2} \right) = 0, \tag{14}$$

y la condición para buscar las geodésicas nulas está dada por

$$\dot{u}^2 - \frac{\dot{l}^2}{l^2} - \frac{\dot{\theta}^2}{4l^2} = 0. \tag{15}$$

De las Ecs. (12) y (14), obtenemos que

$$\dot{u} = \frac{c_1 l^2 + \dot{l}}{2l^2}, \tag{16}$$

$$\dot{\theta} = 2l^2 c_2, \tag{17}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes de integración.

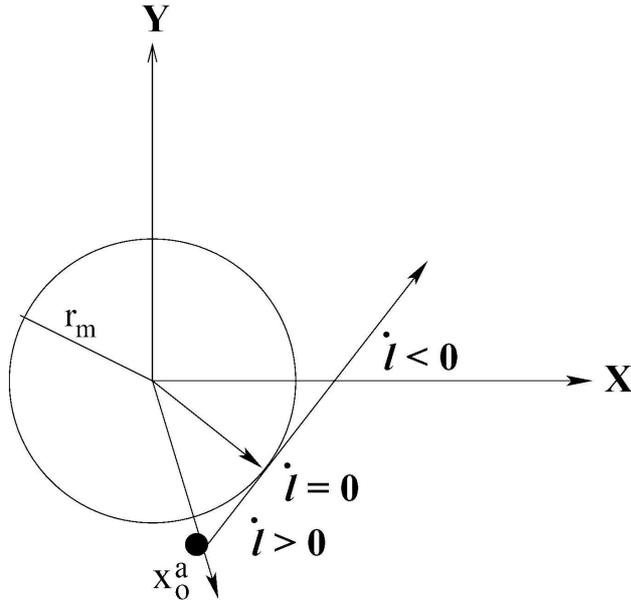


FIGURA 4. Proyección de una geodésica luxoide del cono de luz del punto x_0^a , a su parte espacial, donde $\dot{l} > 0$, $\dot{l} < 0$ y $\dot{l} = 0$ indican si la geodésica se acerca, se aleja, o si se encuentra a la distancia más cercana al origen, respectivamente.

No es difícil demostrar que la única constante importante en la integración de las ecuaciones diferenciales que describen a las geodésicas nulas es (c_2/c_1) , por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $c_1 = 1$, de esta manera la única constante importante es c_2 . Por otra parte, un cálculo directo demuestra que si (u, l, θ) satisfacen las Ecs. (15)-(17), entonces la Ec. (13) es una identidad; esto significa que sólo tres de las cuatro Ecs. (12)-(15) son independientes.

Sustituyendo las Ecs. (16) y (17) en la condición para las geodésicas nulas, Ec. (15), tenemos que

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}. \quad (18)$$

Así que las ecuaciones que describen las geodésicas nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski son

$$\dot{\theta} = 2l^2 c_2, \quad (19)$$

$$\dot{u} = \frac{l^2 + \dot{l}}{2l^2}, \quad (20)$$

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}. \quad (21)$$

De la Ec. (21) podemos notar que \dot{l} puede ser negativo, positivo o cero. Si inicialmente \dot{l} es negativo, entonces el rayo de luz se moverá alejándose del origen de coordenadas; para ver esto recordemos que $l = 1/\sqrt{2}r$, entonces $\dot{l} = -\dot{r}/\sqrt{2}r^2$. De esta manera, $\dot{l} < 0$ cuando $\dot{r} > 0$, esto significa que la distancia del origen a la posición final del rayo de luz es mayor que la distancia del origen a la posición inicial. Si inicialmente $\dot{l} > 0$, entonces el rayo de luz se moverá hacia el origen del sistema coordenado ($r = 0, l = \infty$) y después de acercarse hasta una distancia mínima r_m , donde $\dot{l} = l_m^2 \sqrt{1 - 4l_m^2 c_2^2} = 0$; es decir, hasta que l toma el valor $l_m = 1/2c_2$, el rayo de luz comenzará a alejarse del origen y nuevamente $\dot{l} < 0$ (ver Fig. 4).

Usando el parámetro l en lugar del parámetro afín λ las Ecs. (19)-(21) pueden reescribirse como

$$du = \pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}}{2l^2 \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}} \right) dl, \quad (22)$$

$$d\theta = \pm \left(\frac{2c_2}{\sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}} \right) dl, \quad (23)$$

$$l = l. \quad (24)$$

Si inicialmente $\dot{l} < 0$, de las Ecs. (22) y (23), encontramos que la geodésica del cono de luz que conecta el punto inicial (el vértice) $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$ con el punto final $x^a = (u, l, \theta)$, está dada por

$$\begin{aligned} u^- &= u_0 \\ &+ \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4l_0^2 c_2^2}}{2l_0} \right) - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}}{2l} \right), \\ \theta^- &= \theta_0 + \arcsen(2c_2 l_0) - \arcsen(2c_2 l), \\ l &= l. \end{aligned} \quad (25)$$

Por otro lado, cuando inicialmente $\dot{l} > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} u^+ &= u_0 + \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4l_0^2 c_2^2}}{2l_0} \right) - \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_m, 0), \end{cases} \\ \theta^+ &= \theta_0 - \arcsen(2c_2 l_0) + \begin{cases} \arcsen(2c_2 l), & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \pi - \arcsen(2c_2 l), & \text{si } l \in (l_m, 0). \end{cases} \\ l &= l. \end{aligned} \quad (26)$$

Por lo tanto, el cono de luz futuro de un punto arbitrario x_0^a , del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski está dado por las Ecs. (25) y (26).

Para obtener el cono de luz pasado de un punto arbitrario, x_0^a , del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski uno tiene que realizar prácticamente la misma serie de transformaciones (5) sobre la métrica de Minkowski (4). La única diferencia es que, en este caso, se requiere tomar $t = \sqrt{2}u - r$ en lugar de $t = \sqrt{2}u + r$. El resultado es que la función lagrangiana ahora está dada por

$$L = \dot{u}^2 + \frac{\dot{u}\dot{l}}{l^2} - \frac{\dot{\theta}^2}{4l^2}. \quad (27)$$

Si reemplazamos \dot{u} por $-\dot{u}$ en la Ec. (27) obtenemos la Ec. (11). Esto significa que las ecuaciones que describen el cono de luz pasado de un punto arbitrario, x_0^a , del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski están dadas por

$$\dot{\theta} = 2l^2 c_2, \quad (28)$$

$$\dot{u} = -\frac{l^2 + \dot{l}}{2l^2}, \quad (29)$$

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4l^2 c_2^2}. \quad (30)$$

Por lo tanto, las geodésicas luxoides del cono de luz que conectan el punto inicial $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$, con el punto final $x^a = (u, l, \theta)$, del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, están dadas por

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (-1)^\varepsilon u^\pm, \\ \theta &= \theta^\pm, \\ l &= l, \end{aligned} \quad (31)$$

donde $\varepsilon = 0$ corresponde al cono de luz futuro y $\varepsilon = 1$ corresponde al cono de luz pasado. El signo (+) describe las geodésicas tales que la parte espacial de su vector tangente tiene una componente que apunta hacia el origen de coordenadas, es decir, describe las geodésicas que inicialmente se acercan al origen de coordenadas. Mientras que el signo (−) describe a las geodésicas que se alejan del origen de coordenadas.

Antes de concluir esta sección es importante remarcar que la constante de integración, c_2 , la cual resulta ser la única constante relevante en la integración de las ecuaciones que describen las geodésicas nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, está relacionada con la dirección inicial de las geodésicas que constituyen el cono de luz de un punto arbitrario, x_0^a , del espacio-tiempo. Por definición, la dirección inicial de una geodésica está dada por ψ , el ángulo que forman la parte espacial de su vector tangente y la parte espacial de un vector que se encuentra sobre la línea que une el origen del espacio-tiempo y el vértice del cono de luz. Un cálculo directo muestra que [22, 36]

$$c_2 = \frac{\sin \psi}{2l}. \quad (32)$$

3. Fenómeno de lentes gravitacionales en el espacio-tiempo de Janis, Newman y Winicour

En esta sección presentamos los resultados originales de nuestro trabajo. Es decir, se obtiene la ecuación exacta que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en el espacio-tiempo de Janis, Newman y Winicour (JNW). Se demuestra que bajo ciertas aproximaciones ésta se reduce a la ecuación comúnmente usada en aplicaciones prácticas, es decir, la Ec. (1); y se vuelven a deducir los resultados obtenidos por Virbhadra y Ellis usando su ecuación, la cual es aplicable en el límite de campo fuerte [18]. Es decir, mostramos que para $0 < q/M < \sqrt{3}$, el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW es cualitativamente similar al que aparece en el agujero negro de Schwarzschild; y para $q/M > \sqrt{3}$, el fenómeno de lentes gravitacionales, en estas dos soluciones, es totalmente diferente.

El espacio-tiempo de JNW es una solución exacta asintóticamente plana, esféricamente simétrica y estática de las ecuaciones de Einstein (campo escalar sin masa). Es decir, es una solución de $R_{ab} = 8\pi\Phi_{,a}\Phi_{,b}$ donde R_{ab} es el tensor de Ricci y Φ denota el campo escalar sin masa. El elemento de línea está dado por [37, 38]

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^\nu dt^2 - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\nu} dr^2 - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1-\nu} \\ &\times r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (33)$$

y el campo escalar por

$$\Phi = \frac{q}{b\sqrt{4\pi}} \ln\left(1 - \frac{b}{r}\right), \quad (34)$$

donde

$$\nu = \frac{2M}{b}, \quad (35)$$

$$b = 2\sqrt{M^2 + q^2}. \quad (36)$$

Observe que $b < r < \infty$.

Los parámetros M y q que caracterizan a la solución de JNW denotan la masa total y carga escalar, respectivamente. Claramente se observa que cuando $q = 0$ esta solución se reduce a la solución de Schwarzschild. La solución de JNW describe el campo gravitacional exterior de un objeto estático esféricamente simétrico de masa M , carga escalar q y radio mayor que b [37, 38].

Nuestro primer propósito es obtener el cono de luz de un punto arbitrario x_0^a del espacio-tiempo de JNW. Por lo tanto, para obtener el cono de luz futuro, realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} a) & u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \int \frac{dr}{(1-\frac{b}{r})^\nu} \right), \\ b) & l = \frac{1}{\sqrt{2}r}. \end{cases} \quad (37)$$

Observe que cuando q y M son cero la Ec. (37a) se reduce a la Ec. (5b). Es decir, este conjunto de transformaciones es análogo al realizado en el espacio-tiempo de Minkowski en la sección anterior. Es importante mencionar que todos los conos de luz en el espacio-tiempo de Minkowski son iguales debido a su homogeneidad. En el espacio-tiempo de JNW esto no es cierto. Sin embargo, debido a la simetría esférica de esta solución, para el estudio del fenómeno de lentes gravitacionales es útil usar la coordenada, u , definida por la Ec. (37a). Esta coordenada aparece en forma natural al considerar los rayos de luz radiales futuros del espacio-tiempo de JNW. Es decir, la coordenada u definida en las Ecs. (37a) y (60) aparece cuando consideramos las curvas del espacio-tiempo de JNW tales que $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$ y $ds^2 = 0$.

De esta manera, encontramos que el elemento de línea dado por la Ec. (33) se puede reescribir en la siguiente forma:

$$ds^2 = 2(1 - \sqrt{2bl})^\nu du^2 - \left(\frac{2}{l^2}\right) dudl - \frac{1}{2l^2} (1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (38)$$

Puesto que la solución de JNW tiene simetría esférica, es conveniente integrar las ecuaciones que describen las geodésicas nulas en un plano particular y después rotar la solución a un plano arbitrario para poder obtener el cono de luz futuro completo de un punto arbitrario del espacio-tiempo. Por lo tanto, primero integraremos las ecuaciones que describen las geodésicas luxoides del cono de luz futuro de un punto que se encuentra sobre el eje z negativo y el plano que escogeremos será el plano $y = 0$. Recordemos que normalmente en coordenadas esféricas (r, θ, φ) , el plano $y = 0$ está definido por $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$. Con el propósito de facilitar la integración de las ecuaciones diferenciales introduciremos una nueva variable, Θ , tal que $0 \leq \Theta \leq 2\pi$. Bajo estas consideraciones se tiene que una lagrangiana que describe las geodésicas nulas que forman el cono de luz futuro con $y = 0$ de un punto que se encuentra sobre el eje z negativo está dada por

$$L = (1 - \sqrt{2bl})^\nu \dot{u}^2 - \frac{\dot{l}^2}{l^2} - \frac{1}{4l^2} (1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu} \dot{\Theta}^2. \quad (39)$$

Un cálculo directo muestra que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con esta lagrangiana están dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ 2(1 - \sqrt{2bl})^\nu \dot{u} - \frac{\dot{l}}{l^2} \right\} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{\dot{u}}{l^2} \right\} - \sqrt{2b\nu} \xi^{\nu-1} \dot{u}^2 + \frac{2\dot{u}\dot{l}}{l^3} + \frac{\dot{\Theta}^2}{4l^2} \left\{ \frac{2\xi}{l} + \sqrt{2b}(1-\nu) \right\} \xi^{-\nu} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{\xi^{1-\nu} \dot{\Theta}}{2l^2} \right\} = 0, \quad (42)$$

donde

$$\xi = (1 - \sqrt{2bl}).$$

En este caso la condición para encontrar las geodésicas nulas está dada por

$$(1 - \sqrt{2bl})^\nu \dot{u}^2 - \frac{\dot{l}^2}{l^2} - \frac{1}{4l^2} (1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu} \dot{\Theta}^2 = 0. \quad (43)$$

De las Ecs. (40) y (42) se obtiene que

$$2(1 - \sqrt{2bl})^\nu \dot{u} - \frac{\dot{l}}{l^2} = A, \quad (44)$$

$$\frac{1}{2l^2} (1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu} \dot{\Theta} = C, \quad (45)$$

donde A y C son constantes de integración.

No es difícil demostrar que si (u, l, Θ) satisfacen las Ecs. (43)-(45), entonces la Ec. (41) es una identidad. Esto significa que únicamente tres de las cuatro ecuaciones (40)-(43) son independientes. Además, al igual que en el caso del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski tratado en la sección anterior, la única constante importante en la integración de las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas es (C/A) , por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $A = 1$.

Sustituyendo las Ecs. (44) y (45) en la condición que garantiza que el vector tangente a las geodésicas sea luxoide, Ec. (43), se obtiene que

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2bl})^{2\nu-1}}. \quad (46)$$

Así que las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas con $y = 0$, en el espacio-tiempo cuya métrica está dada por la solución de Janis, Newman y Winicour son

$$\dot{u} = \frac{l^2 + \dot{l}}{2(1 - \sqrt{2bl})^\nu l^2}, \quad (47)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{2l^2 C}{(1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu}}, \quad (48)$$

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2bl})^{2\nu-1}}. \quad (49)$$

De la Ec. (49) observamos que \dot{l} puede ser positivo, cero o negativo. Al igual que en el caso del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, uno también puede demostrar que si inicialmente $\dot{l} < 0$, entonces se trata de una geodésica tal que la parte espacial de su vector tangente no tiene componente que apunta hacia el origen espacial de coordenadas definido por $r = 0$ ó $l = \infty$. Esto significa que se trata de una geodésica que se aleja del origen de coordenadas. Por otra parte, si inicialmente, $\dot{l} > 0$, entonces se trata de una geodésica tal que la parte espacial de su vector tangente tiene una componente que apunta hacia el origen espacial de coordenadas. En este caso la geodésica es tal que se acerca al origen de coordenadas hasta una distancia mínima, $r_m = 1/\sqrt{2l_m}$, dada por la solución a

$$\dot{l} = l_m^2 \sqrt{1 - 4C^2 l_m^2 (1 - \sqrt{2bl_m})^{2\nu-1}} = 0 \quad (50)$$

(en este caso se elige la solución real positiva que proporcione el valor más pequeño para r_m). Después de este punto la geodésica comenzará a alejarse del origen y nuevamente $\dot{l} < 0$.

Si en lugar de usar el parámetro afín λ , usamos el parámetro l , entonces las Ecs. (47)-(49) pueden reescribirse en la siguiente forma

$$du = \pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2bl})^{2\nu-1}}}{2l^2 (1 - \sqrt{2bl})^\nu \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2bl})^{2\nu-1}}} \right) dl, \quad (51)$$

$$d\Theta = \pm \left(\frac{2C}{(1 - \sqrt{2bl})^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2bl})^{2\nu-1}}} \right) dl, \quad (52)$$

$$l = l. \quad (53)$$

Si inicialmente $\dot{l} < 0$, de las Ecs. (51) y (52), encontramos que la geodésica del cono de luz futuro, con $y = 0$, que conecta el punto inicial $x_0^a = (u_0, l_0, \Theta_0 = \pi)$ con el punto final $x^a = (u, l, \Theta)$, está dada por

$$\begin{aligned} u^{(-)} &= u_0 + U^{(-)}, \\ \Theta^{(-)} &= \pi - \int_{l_0}^l \left(\frac{2C}{(1 - \sqrt{2bl'})^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}} \right) dl', \\ l &= l, \end{aligned} \quad (54)$$

donde

$$U^{(-)} = - \int_{l_0}^l \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}}{2l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^\nu \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}} \right) dl'. \quad (55)$$

Si inicialmente $\dot{l} > 0$, entonces

$$u^{(+)} = u_0 + U^{(+)}, \quad (56)$$

$$\Theta^{(+)} = \pi + \begin{cases} \int_{l_0}^l \left(\frac{2C}{(1 - \sqrt{2bl'})^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}} \right) dl', & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{2C}{(1 - \sqrt{2bl'})^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}} \right) dl' \\ - \int_{l_m}^l \left(\frac{2C}{(1 - \sqrt{2bl'})^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2bl'})^{2\nu-1}}} \right) dl', & \text{si } l \in (l_m, 0), \end{cases} \quad (57)$$

$$l = l, \quad (58)$$

donde

$$U^{(+)} = \begin{cases} U^{(2)}, & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ U^{(3)}, & \text{si } l \in (l_m, 0), \end{cases} \quad (59)$$

con

$$U^{(2)} = \int_{l_0}^l \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}}{2l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^\nu \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl', \text{ si } l \in (l_0, l_m),$$

$$U^{(3)} = \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}}{2l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^\nu \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl'$$

$$- \int_{l_m}^l \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}}{2l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^\nu \sqrt{1 - 4C^2 l'^2 (1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl', \text{ si } l \in (l_m, 0).$$

De esta forma, las geodésicas luxoides del cono de luz futuro con $y = 0$ de un punto sobre el eje z negativo, $x_0^a = (u_0, l_0, \Theta_0 = \pi, \varphi_0 = 0)$, están dadas por las Ecs. (54) y (58).

Para obtener la parte del cono de luz pasado con $y = 0$ del punto, $x_0^a = (u_0, l_0, \Theta_0 = \pi, \varphi_0 = 0)$, se tiene que realizar un procedimiento análogo al presentado previamente, con la diferencia de que en lugar de hacer el cambio de variable (37a) ahora se toma

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \int \frac{dr}{(1 - \frac{b}{r})^\nu} \right), \quad (60)$$

de esta forma uno encuentra que en este caso una lagrangiana apropiada es

$$L = (1 - \sqrt{2}bl)^\nu \dot{u}^2 + \frac{\dot{l}^2}{l^2} - \frac{1}{4l^2} (1 - \sqrt{2}bl)^{1-\nu} \dot{\Theta}^2. \quad (61)$$

Así, las ecuaciones que describen las geodésicas de nuestro interés son

$$\dot{u} = -\frac{l^2 + \dot{l}}{2(1 - \sqrt{2}bl)^\nu l^2}, \quad (62)$$

Es importante mencionar que debido a la simetría esférica de la solución de JNW el cono de luz de un punto arbitrario x_0^a , es axialmente simétrico en torno a la línea espacial que une la parte espacial del vértice x_0^a , y el origen espacial angular, con respecto al eje de definido por $r = 0$. El ángulo γ

$$\dot{\Theta} = \frac{2l^2 C}{(1 - \sqrt{2}bl)^{1-\nu}}, \quad (63)$$

$$\dot{l} = \pm l^2 \sqrt{1 - 4C^2 l^2 (1 - \sqrt{2}bl)^{2\nu-1}}. \quad (64)$$

Un cálculo directo demuestra que la parte del cono de luz, con $y = 0$, de un punto sobre el eje z negativo está dada por

$$u = u_0 + (-1)^\varepsilon U^{(\pm)}, \quad (65)$$

$$\Theta = \Theta^{(\pm)}, \quad (66)$$

$$l = l, \quad (67)$$

donde $\varepsilon = 0$ describe las geodésicas que se encuentran en el cono de luz futuro, mientras que $\varepsilon = 1$ describe las geodésicas luxoides del cono de luz pasado. Los signos (+) y (-) indican si la geodésica se acerca al origen de coordenadas, (+), o si ésta se aleja del origen coordenado, (-).

Finalmente, para obtener el cono de luz completo de un punto arbitrario $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0, \varphi_0)$, del espacio-tiempo descrito por la solución de JNW uno tiene que realizar una rotación rígida espacial a la parte angular, Ec. (66). Siguiendo las Refs. 20 y 21, uno encuentra que el cono de luz completo está dado por

$$u = u_0 + (-1)^\varepsilon U^{(\pm)}, \quad (68)$$

$$\cos \theta = -\cos \theta_0 \cos \Theta + \text{sen } \theta_0 \text{sen } \Theta \cos \gamma, \quad (69)$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \theta_0 - \tan \Theta (\cos \varphi_0 \text{sen } \gamma - \text{sen } \varphi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}{\cos \varphi_0 \text{sen } \theta_0 + \tan \Theta (\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \gamma + \cos \varphi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}, \quad (70)$$

$$l = l. \quad (71)$$

que aparece en las Ecs. (69) y (70) define la orientación angular, con respecto al eje de simetría, del plano espacial definido por una geodésica y el eje de simetría. Observe que cuando el vértice del cono de luz se encuentra sobre el eje z negativo

entonces γ es simplemente φ . Para generar todo el cono de luz de un punto arbitrario se requiere que $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. La dirección inicial de las geodésicas, ψ , que se encuentran sobre el plano definido por un valor particular de γ está relacionada con la constante de integración C que apareció al integrar las ecuaciones que describen a las geodésicas luxoides del cono de luz, con $y = 0$. En este caso se encuentra que [36]

$$C = \frac{\text{sen } \psi}{2l_0 \sqrt{(1 - \sqrt{2}bl_0)^{2\nu-1}}}. \quad (72)$$

Es decir, γ y C proporcionan la dirección inicial de las geodésicas luxoides del cono de luz de un punto arbitrario, x_0^a , del espacio-tiempo de JNW.

Uno de los objetivos de la teoría de lentes gravitacionales es construir ecuaciones que describan el fenómeno de la deflexión de la luz por campos gravitacionales. Es decir, obtener ecuaciones que expresen la posición de la fuente en términos de alguna "distancia" medida respecto al observador y las direcciones con las que el observador "ve" las geodésicas de su cono de luz pasado. En nuestro caso estas ecuaciones están dadas por las Ecs. (69) y (70). En estas ecuaciones, las direcciones de observación están dadas por los parámetros (C, γ) y l proporciona la distancia. Por lo tanto, las ecuaciones que describen el fenómeno de lentes gravitacionales en forma exacta en el espacio-tiempo de JNW son

$$\theta = \arccos(-\cos \theta_0 \cos \Theta + \text{sen } \theta_0 \text{sen } \Theta \cos \gamma^*), \quad (73)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \theta_0 - \tan \Theta (\cos \varphi_0 \text{sen } \gamma^* - \text{sen } \varphi_0 \cos \gamma^* \cos \theta_0)}{\cos \varphi_0 \text{sen } \theta_0 + \tan \Theta (\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \gamma^* + \cos \varphi_0 \cos \gamma^* \cos \theta_0)} \right), \quad (74)$$

donde

$$\Theta = \pi - 2 \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{2C^*}{(1 - \sqrt{2}bl')^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^{*2}l'^2(1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl' - \int_l^{l_0} \left(\frac{2C^*}{(1 - \sqrt{2}bl')^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^{*2}l'^2(1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl'. \quad (75)$$

En estas ecuaciones, la localización espacial de la fuente puntual está dada por (l, θ, φ) y la del observador por $(l_0, \theta_0, \varphi_0)$. Además, estamos denotando por $(C = C^*, \gamma = \gamma^*)$ la dirección de la geodésica que conecta a la fuente con el observador. Observe que únicamente estamos considerando las geodésicas nulas cuyo vector tangente tiene una componente que apunta hacia el origen de coordenadas y $l < l_m$, puesto que bajo estas condiciones se presenta el fenómeno de lentes gravitacionales. Es claro que cuando $q = 0$ estas ecuaciones describen el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de Schwarzschild.

Con el establecimiento de las ecuaciones exactas que describen el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW, aplicables aun en regiones donde la curvatura del espacio es grande, hemos cumplido con parte del objetivo de este trabajo. Ahora demostraremos que cuando el observador se encuentra sobre el eje z negativo y se cumplen ciertas condiciones, estas ecuaciones exactas se reducen a la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma aproximada. Para este propósito observemos que cuando el observador se encuentra sobre el eje z negativo $\theta = \Theta$ y $\gamma = \varphi$. Por lo tanto, debido a la simetría del espacio-tiempo de JNW es suficiente considerar el caso cuando $\varphi = 0$. Ahora demostraremos que bajo ciertas condiciones la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma aproximada se obtiene de

$$\Theta = \pi - \Delta(M, C^*, l_0, l), \quad (76)$$

donde

$$\Delta = 2 \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{2C^*}{(1 - \sqrt{2}bl')^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^{*2}l'^2(1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl' + \int_l^{l_0} \left(\frac{2C^*}{(1 - \sqrt{2}bl')^{1-\nu} \sqrt{1 - 4C^{*2}l'^2(1 - \sqrt{2}bl')^{2\nu-1}}} \right) dl'. \quad (77)$$

En esta última ecuación, l_0 y l determinan la distancia radial del observador y de la fuente puntual, respecto al origen espacial de coordenadas, respectivamente. Mientras que, tal y como se mencionó previamente, l_m es el valor de l para el cual la geodésica se encuentra más cerca de la lente y es determinado de la condición, (50), la cual es equivalente a

$$C^{*2} = \frac{1}{4l_m^2(1 - \sqrt{2}bl_m)^{2\nu-1}}. \quad (78)$$

De esta ecuación y la Ec. (72) se encuentra que la posición angular de la imagen, ψ , y l_m están relacionadas por

$$\text{sen } \psi = \frac{l_0 \sqrt{(1 - \sqrt{2}bl_0)^{2\nu-1}}}{l_m \sqrt{(1 - \sqrt{2}bl_m)^{2\nu-1}}}. \quad (79)$$

Si se supone que las cantidades $Ml \equiv \epsilon$ y $Ml_0 < \epsilon$ son pequeñas, entonces el desarrollo en serie de Taylor a primer orden en ϵ de Δ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon, C^*, l_0, l) &= \Delta(\epsilon = 0, C^*, l_0, l) + \epsilon \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \\ &\equiv \Delta_0 + \Delta_1. \end{aligned} \quad (80)$$

De la Ec. (37)b se obtiene que $\epsilon = M/(2r)$. Es decir, la Ec. (80) será aplicable en regiones donde el campo gravitacional es débil. Además, no es difícil demostrar que la carga, q , no aparece a primer orden. Por lo tanto, para obtener Δ_0 y Δ_1 , primero sustituimos la Ec. (78) en la Ec. (77), después evaluamos en $q = 0$ y reemplazamos Ml por ϵ . Es decir, partimos de

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon, l_m(\psi), l_0, l) &= 2 \int_{l_0}^{l_m} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{(l - 2\sqrt{2}\epsilon l_m)l_m^2 - l'^2(l - 2\sqrt{2}\epsilon l')}} dl' \\ &+ \int_l^{l_0} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{(l - 2\sqrt{2}\epsilon l_m)l_m^2 - l'^2(l - 2\sqrt{2}\epsilon l')}} dl', \end{aligned} \quad (81)$$

donde $l_m(\psi)$ se obtiene de la Ec. (79) con $q = 0$ y $Ml = \epsilon$. Es decir de

$$\text{sen } \psi = \frac{l_0 \sqrt{l - 2\sqrt{2}\epsilon l_0}}{l_m \sqrt{l - 2\sqrt{2}\epsilon l_m}}. \quad (82)$$

Para calcular Δ_0 , evaluamos la Ec. (81) en $\epsilon = Ml = 0$, realizamos las integrales, usamos la Ec. (82) con $\epsilon = 0$ y aplicamos la aproximación de ángulos pequeños. Se encuentra que

$$\Delta_0 = \pi - \psi - \frac{l}{l_0} \psi. \quad (83)$$

Ahora calcularemos el término a primer orden; Δ_1 , el cual está dado por

$$\Delta_1 = \epsilon \left(\frac{d}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} \left(2 \int_{l_0}^{l_m} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{A}} dl' + \int_l^{l_0} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{A}} dl' \right), \quad (84)$$

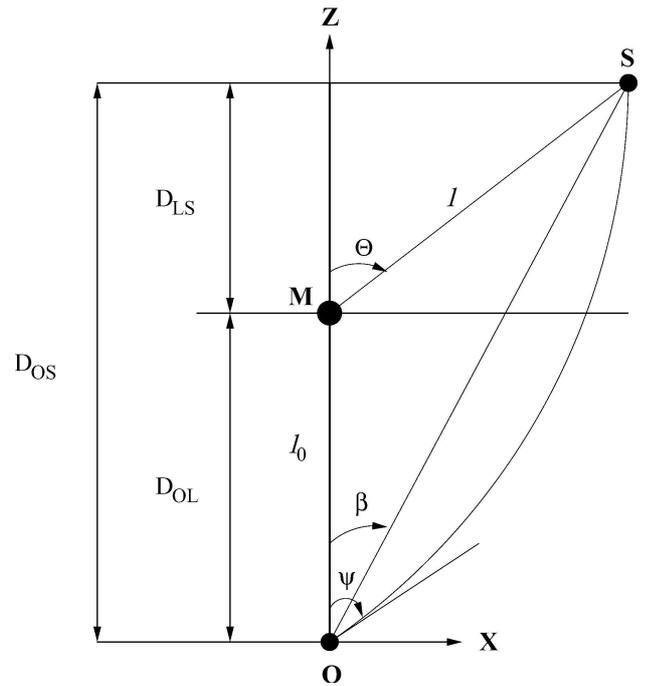


FIGURA 5. Representación esquemática de una geodésica observada en el fenómeno de lentes gravitacionales. En este gráfico D_{LS} y D_{OL} denotan las distancias entre la lente y la fuente, y la lente y el observador respectivamente, y ψ denota el ángulo de observación.

donde

$$A = l_m^2(l - 2\sqrt{2}\epsilon l_m) - l'^2(l - 2\sqrt{2}\epsilon l'). \quad (85)$$

En la Ec. (84) la derivada con respecto a ϵ actúa sobre los integrandos y sobre l_m . Usando la aproximación de ángulos pequeños, se encuentra que la corrección de Θ a primer orden es

$$\Delta_1 = 2\sqrt{2}R_s \frac{l_0}{\psi}, \quad (86)$$

donde $R_s = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild.

Usando las Ecs. (76), (83) y (86) se tiene que

$$\Theta = \psi \left(1 + \frac{l}{l_0} \right) - \frac{2\sqrt{2}R_s l_0}{\psi}. \quad (87)$$

A este orden de aproximación las distancias físicas en la Fig. 5 son las distancias coordenadas inversas, es decir,

$$\begin{aligned} l &\approx \frac{1}{\sqrt{2}D_{LS}}, \\ l_0 &\approx \frac{1}{\sqrt{2}D_{OL}}, \end{aligned} \quad (88)$$

y de geometría euclídeana se obtiene que Θ está relacionada con β de la siguiente forma:

$$\Theta = \beta \frac{D_{OS}}{D_{LS}}. \quad (89)$$

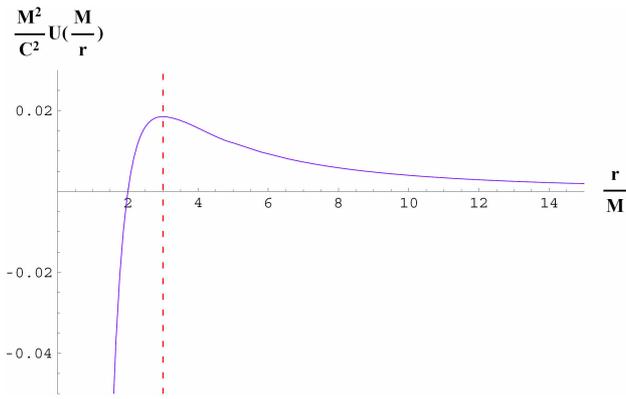


FIGURA 6. Gráfica del potencial efectivo (94) como función de r/M .

Usando las Ecs. (88) y (89) en la Ec. (87) se obtiene la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma aproximada, es decir,

$$\beta = \left(\frac{D_{LS} + D_{OL}}{D_{OS}} \right) \psi - \frac{2R_s D_{LS}}{D_{OS} D_{OL} \psi}. \quad (90)$$

Cuando $D_{OL} + D_{LS} = D_{OS}$, esta última ecuación se reduce a la Ec. (1), con $G = 1 = c$, lo cual es el resultado deseado.

En la Ref. 18, Virbhadra y Ellis obtienen una ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW en la región de campo gravitacional fuerte. Para la derivación de esta ecuación se usa geometría Euclídea y el ángulo de deflexión que sufren los rayos de luz es obtenido suponiendo que el observador y la fuente se encuentran en el infinito. Entre otras cosas, estos autores, demuestran que para valores pequeños de q/M el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW es similar al que ocurre en la solución de Schwarzschild. Sin embargo, para valores grandes existen diferencias radicales.

Antes de finalizar con este trabajo, usando nuestras ecuaciones, analizaremos las diferencias que aparecen en el fenómeno de lentes gravitacionales en las soluciones de Schwarzschild y de JNW. Para este propósito, usando la Ec. (37),

un cálculo directo muestra que la Ec. (49) es equivalente a

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{C^2}{2r^2} \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{2\nu-1} = \frac{1}{4}, \quad (91)$$

la cual, formalmente describe el movimiento de una partícula de masa unidad y energía total $1/4$, bajo la acción de un potencial efectivo unidimensional dado por

$$U(r) = \frac{C^2}{2r^2} \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{2\nu-1}. \quad (92)$$

Si $r > b$, el único punto crítico de (92), para todo valor de ν , es

$$r = \frac{(1 + 2\nu)b}{2}. \quad (93)$$

Ahora demostraremos que la naturaleza de este punto crítico, la cual depende del valor de q/M , y la condición $r > b$, determinan la naturaleza del fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW. Para este propósito, primero estudiemos el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de Schwarzschild. En este caso, $q = 0$, $b = 2M$ y $\nu = 1$, de donde el potencial efectivo, (92), se reduce a

$$U(r) = \frac{C^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (94)$$

y el punto crítico se encuentra en $r_{ps} = 3M$. De hecho este punto crítico corresponde al máximo del potencial efectivo (94), y define el radio de la denominada fotosfera. Recordemos que para la solución de Schwarzschild el radio del horizonte de eventos está dado por $R_s = 2M$ [25–35]. Por lo tanto, en el caso de la solución de Schwarzschild el horizonte de eventos se encuentra cubierto por la fotosfera. En la Fig. 6 se muestra la grafica del potencial efectivo (94) como función de r/M .

De las Ecs. (76) y (78) con $q = 0$ y restringiéndonos, sin pérdida de generalidad, al caso especial $l = l_0$, se encuentra que la ecuación que describe el fenómeno de lentes gravitacionales en forma exacta, en la solución de Schwarzschild, cuando el observado se encuentra sobre el eje z negativo, está dada por

$$\Theta = \pi - 2 \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{dl'}{\sqrt{l_m^2(1 - 2\sqrt{2}Ml_m) - l'^2(1 - 2\sqrt{2}Ml')}} \right). \quad (95)$$

Cuando $l_0 = 0$; es decir cuando el observador se encuentra en el infinito, esta ecuación se reduce al resultado obtenido en la Ref. 16. Observe que la integral en (95) diverge cuando $l' = l_m$. Haciendo el cambio de variable, $l' = l_m - \tilde{q}$, se encuentra que [20]

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{l_m - l_0} \frac{d\tilde{q}}{\sqrt{2l_m(1 - 3\sqrt{2}Ml_m)\tilde{q} + (6\sqrt{2}Ml_m - 1)\tilde{q}^2 - 2\sqrt{2}M\tilde{q}^3}}, \quad (96)$$

de donde se obtiene que la divergencia es proporcional a

$$\frac{1}{\sqrt{2l_m(1 - 3\sqrt{2}Ml_m)\tilde{q}}}, \quad (97)$$

la cual se puede integrar para proporcionar un resultado finito, siempre que $l_m < 1/3\sqrt{2}M$. En términos de la coordenada radial, r , esta última condición es equivalente a $r_m > 3M = r_{ps}$. Es decir, que conforme la distancia mínima $r_m = 1/\sqrt{2}l_m$, a la cual pasa el rayo de luz del origen de coordenadas, tiende al radio de la fotoesfera $r_{ps} = 3M$, Θ , tiende a menos infinito. Físicamente, este resultado indica que este rayo de luz emitido por la fuente se quedará orbitando a la lente exactamente en la fotoesfera [16, 20]. Usando las Ecs. (87), (96) y (78) evaluada en $q = 0$, en la Fig. 7 presentamos un gráfico de Θ como función de ψ , el ángulo de observación de la imagen, para el caso aproximado y exacto.

Ahora retornemos al caso de la solución de JNW; es decir, cuando $q \neq 0$. En este caso el punto crítico corresponde al radio de la fotoesfera, r_{ps} , y $r_H = b$, corresponde al radio del horizonte de eventos. De las ecuaciones

$$r_{ps} = \frac{(1 + 2\nu)b}{2} = M \left[2 + \sqrt{1 + \left(\frac{q}{M}\right)^2} \right], \quad (98)$$

$$r_H = b = 2M\sqrt{1 + \left(\frac{q}{M}\right)^2}, \quad (99)$$

se encuentra que, dependiendo del valor de $\frac{q}{M}$; r_{ps} y r_H tienen el siguiente comportamiento:

- a) si $0 \leq \frac{q}{M} < \sqrt{3} \Rightarrow r_{ps} > r_H$, y $\frac{1}{2} < \nu \leq 1$,
 - b) si $\frac{q}{M} = \sqrt{3} \Rightarrow r_{ps} = r_H$, y $\nu = \frac{1}{2}$,
 - c) si $\frac{q}{M} > \sqrt{3} \Rightarrow r_{ps} < r_H$, y $0 < \nu < \frac{1}{2}$.
- (100)

En la Fig. 8 mostramos las gráficas de r_{sp} y r_H como función de q/M .

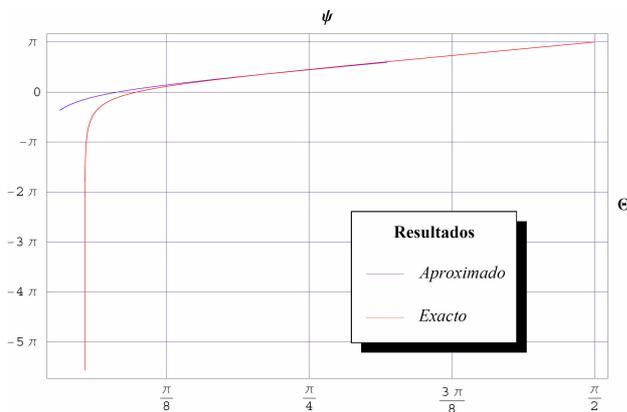


FIGURA 7. Gráfico de Θ como función de ψ , el ángulo de observación de la imagen, para la solución de Schwarzschild. Los resultados aproximados son obtenidos usando la Ec. (87) y los exactos de las Ecs. (96) y (78) evaluada en $q = 0$.

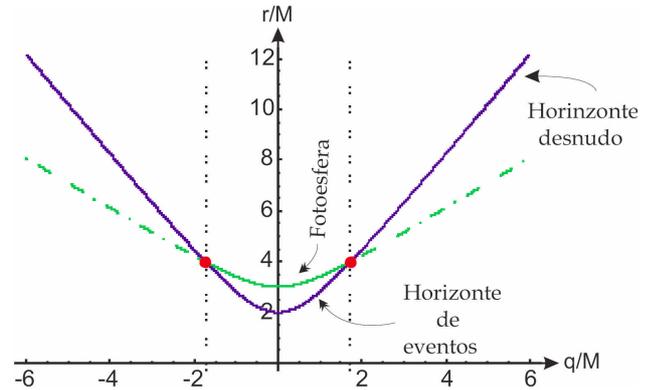


FIGURA 8. Comportamiento de r_{sp} y r_H como función de q/M .

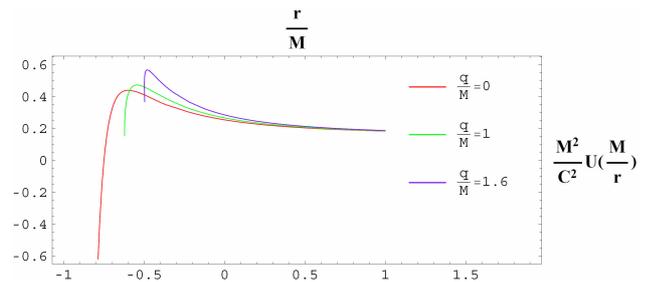


FIGURA 9. Comportamiento del potencial efectivo (92) para: $q/M = 0, 1, 1.6$.

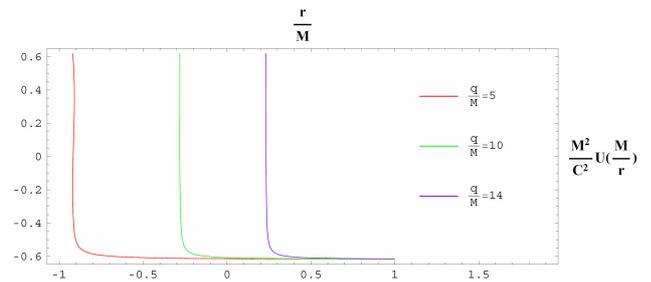


FIGURA 10. Comportamiento del potencial efectivo (92) para: $q/M = 5, 10, 14$.

Un cálculo directo muestra que en el caso a), el horizonte de eventos está cubierto por la fotoesfera y el potencial efectivo tiene un máximo en $r = r_{ps}$. Por lo tanto, el fenómeno de lentes gravitacionales en la solución de JNW será cualitativamente similar al que se presenta en la solución de Schwarzschild siempre que $0 \leq (q/M) < \sqrt{3}$. Sin embargo, los casos b) y c) son radicalmente diferentes al caso a). En el caso b), el radio de la fotoesfera es igual al radio del “horizonte de eventos”, y para $r > 4$ el potencial efectivo se reduce a $C^2/(2r^2)$. Observe que cuando q tiende a $\sqrt{3}$ y r tiende a 4 el potencial efectivo no está bien definido. Finalmente, en el caso c) se tiene un horizonte desnudo en el sentido de que no está cubierto por la fotoesfera. En este caso la fotoesfera desaparece y cuando r tiende al radio del horizonte desnudo el potencial tiende a infinito. En las Figs. 9 y 10 mostramos el comportamiento del potencial efectivo para diferentes valores de q/M .

Estos resultados ponen de manifiesto que para ciertos valores de q/M el fenómeno de lentes gravitacionales es radicalmente diferente al que aparece en la solución de Schwarzschild. Finalizamos analizando el comportamiento de nuestras ecuaciones exactas y de paso mostramos que se reducen, bajo ciertas condiciones, a la ecuación obtenida en la Ref. 18. De las Ecs. (76) y (78), con $l_0 = l$, se encuentra que la ecuación que describe el fenómeno de lentes en la solución de JNW, cuando el observado se encuentra sobre el eje z negativo, está dada por

$$\Theta = \pi - 2 \int_{l_0}^{l_m} \left(\frac{dl'}{\sqrt{l_m^2(1 - \sqrt{2}bl_m)^{2\nu-1}(1 - \sqrt{2}bl')^{2-2\nu} - l'^2(1 - \sqrt{2}bl')}} \right).$$

Es importante remarcar que cuando, $l_0 = 0$, la Ec. (99), se reduce al resultado obtenido en la Ref. 18 bajo la condición de que el observador y la fuente se encuentran en el infinito. De esto concluimos que los resultados reportados en la literatura se obtienen de los obtenidos en este trabajo como casos especiales.

Al igual que en la solución de Schwarzschild, la integral en (99) diverge cuando $l' = l_m$. Realizando el cambio de variable, $l' = l_m - \tilde{q}$, se encuentra que para cualquier valor de, ν , el radical tiene el siguiente comportamiento

$$\tilde{A}\tilde{q} + \tilde{B}\tilde{q}^2 + \tilde{C}\tilde{q}^3 + \tilde{D}\tilde{q}^4 \dots, \tag{101}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= l_m[2 - \sqrt{2}bl_m(1 + 2\nu)], \\ \tilde{B} &= -1 + 3\sqrt{2}bl_m + \frac{2(\nu - 1)(2\nu - 1)b^2l_m^2}{1 - \sqrt{2}bl_m}, \\ \tilde{C} &= -\frac{\sqrt{2}b}{3} \left[3 + \frac{4\nu(\nu - 1)(2\nu - 1)b^2l_m^2}{(1 - \sqrt{2}bl_m)^2} \right], \\ \tilde{D} &= -\frac{2}{3}(\nu - 1)(2\nu - 1)b^2(1 - \sqrt{2}bl_m)^{2\nu-5} \\ &\quad \times \{3 + \nu[(2\nu + 1)bl_m - 4\sqrt{2}bl_m]\}. \end{aligned} \tag{102}$$

De donde concluimos que la integral proporcionará un resultado finito, siempre y cuando $l_m < \sqrt{2}/(1 + 2\nu)b$. Expresando esta última condición en términos de la coordenada radial se requiere que

$$r_m = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} > r_{sp} = \frac{(1 + 2\nu)b}{2}. \tag{103}$$

Es decir, la integral de la Ec. (99) proporcionará un resultado finito en el caso a) siempre y cuando la distancia mínima a la cual pasa el rayo de luz del origen de coordenadas sea mayor que el radio de la fotosfera. Si el rayo de luz es tal que $r_m = r_{ps}$, entonces la integral diverge y esto, físicamente, corresponde al hecho de que el rayo de luz emitido por la fuente quedará orbitando a la lente precisamente en la fotosfera. Por lo tanto, concluimos que bajo esta restricción sobre q/M el fenómeno de lentes gravitacionales es similar al que ocurre en la solución de Schwarzschild. En el caso b), cuando $\nu = (1/2)$ y $b = 4$, la Ec. (99) proporcionará un resultado finito para $r_m > 4$. En el caso c), la condición (103) siempre

se cumple puesto que la distancia mínima a la cual se pueden acercar los rayos de luz emitidos por la fuente a la lente, en estas condiciones, es $r_m = b$, la cual es mayor que $(1 + 2\nu)b/2$ para $0 < \nu < (1/2)$. Finalmente, en este último caso, un cálculo directo muestra que, cuando r_m tiende a b la integral (99) tiende a cero y Θ tiende a π . Usando las Ecs. (99) y (78), en las Figs. 11 y 12 presentamos gráficas de Θ , posición angular de la fuente, como función de la posición angular de la imagen dada por ψ , para diferentes valores de q/M .

4. Conclusiones

En este trabajo hemos integrado las ecuaciones que describen las geodésicas del cono de luz de un punto arbitrario, x_0^a , del espacio-tiempo descrito por la solución de JNW para obtener las ecuaciones que describen el fenómeno de lentes gravita-

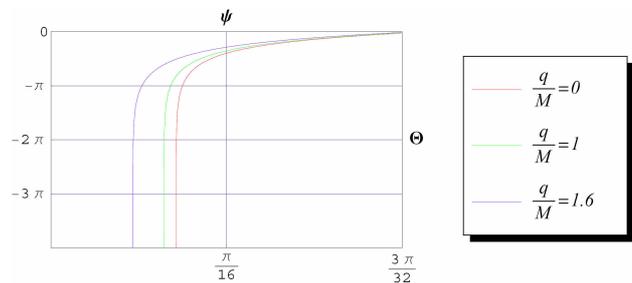


FIGURA 11. Gráfica de Θ , posición angular de la fuente, como función de la posición angular de la imagen dada por ψ , para $q/M = 0, 1, 1.6$. Estos resultados fueron obtenidos usando las Ecs. (99) y (78).

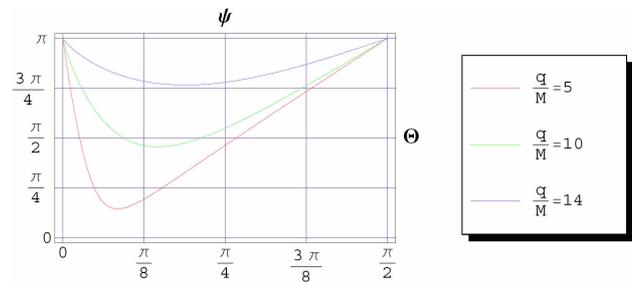


FIGURA 12. Gráfica de Θ , posición angular de la fuente, como función de la posición angular de la imagen dada por ψ , para $q/M = 5, 10, 14$. Estos resultados fueron obtenidos usando las Ecs. (99) y (78).

cionales en forma exacta. Hemos demostrado que bajo ciertas condiciones, nuestras ecuaciones se reducen a la ecuación que describe el fenómeno en forma aproximada o ecuación de lente delgada. Finalmente, aplicando nuestros resultados exactos, estudiamos las diferencias que aparecen en el fenómeno de lentes gravitacionales en las soluciones de JNW y Schwarzschild. De esta forma hemos mostrado que la ecuación y los resultados obtenidos por Virbhadra y Ellis en la Ref. 18, se obtienen de nuestros resultados generales. Es importante remarcar que en este trabajo se han establecido las bases para comenzar con un estudio detallado de las cantidades físicamente relevantes que toman lugar en tal fenómeno

en forma exacta. Este estudio será presentado en un trabajo futuro.

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios de un árbitro para mejorar la presentación de los resultados. Los autores agradecen el apoyo económico recibido de CONACyT a través del proyecto 44515-F. Además G.S.O. agradece el apoyo económico recibido del Sistema Nacional de Investigadores (México). Este trabajo también fue apoyado parcialmente por la VIEP-BUAP por medio del proyecto 17/I/EXC/05.

1. A. Einstein, *Annalen der Physik* **35** (1911) 898.
2. G.F. Torres del Castillo and C.I. Pérez Sánchez, *Rev. Mexi. Fís.* **52** (2006) 70.
3. A. Einstein, *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie* (Sitzungber. Preuß. Akad. Wissensch, erster Halbband, 831, 1935).
4. A.S. Eddington, *Space, time and gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1920).
5. O. Chwolson, *Astr. Nachrichten* **221** (1924) 319.
6. A. Einstein, *Science* **84** (1936) 506.
7. F. Zwicky, *Phys. Rev.* **51** (1937) 290.
8. Yu. G. Klimov, *Sov. Phys. Doklady* **8** (1963) 119.
9. S. Jr. Liebes, *Phys. Rev. B* **133** (1964) 835.
10. S. Refsdal, *M.N.R.A.S.* **129** (1964) 295.
11. S. Refsdal, *M.N.R.A.S.* **134** (1966) 315.
12. M. Schmidt, *Nature* **197** (1963) 1040.
13. D. Walsh, R.F. Carswell, and R.J. Weymann, *Nature* **279** (1979) 381.
14. S. Mollerach and E. Ruolet, *Gravitational Lensing and Microlensing* (World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong 2002).
15. P. Schneider, J. Ehlers, and E.E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1992).
16. K.S. Virbhadra and G.F.R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 084003.
17. K.S. Virbhadra, D. Narasimha, and S.M. Chitre, *Astron. Astrophys.* **337** (1998) 1.
18. K.S. Virbhadra and G.F.R. Ellis, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 103004.
19. S. Frittelli and E.T. Newman, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 124001.
20. T.P. Kling and E.T. Newman, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 124002.
21. S. Frittelli, T.P. Kling, and E.T. Newman, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 064021.
22. G. Silva-Ortigoza y P. García-Godínez, *Rev. Mex. Fís.* **50** (2004) 70.
23. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition (Addison Wesley, Massachusetts, California, London, Amsterdam, Ontario, Sydney, 1980).
24. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Third Edition (Butterworth Heinemann, 2000).
25. H. Stephani, *General Relativity an introduction to the theory of gravitational fields*, Second Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
26. C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *GRAVITATION* (Freeman, New York 1973).
27. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Fourth Edition (Butterworth Heinemann, 2000).
28. R.M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984).
29. J.B. Hartle, *GRAVITY An introduction to Einstein's general relativity* (Addison Wesley, San Francisco, Boston, New York, 2003).
30. I. Ciufolini and J.A. Wheeler, *Grvitation and Inertia* (Princeton University Press, Newjersey, 1995).
31. J. Foster and J.D. Nightingale, *A short course in General Relativity* (Springer, Second Edition, New York, Berlin, Heidelberg, 1995).
32. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity* (Springer, Second Edition, New York, 1995).
33. W. Rindler, *Essential Relativity* (Springer-Verlag, Second Edition, New York, Heidelberg, Berlin, 1977).
34. B.F. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
35. E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Exploring Black Holes Introduction to General Relativity* (Addison Wesley Longman, San Fransisco, Boston, New York, 2000).
36. E. Román-Hernández, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2005).
37. A.I. Janis, E.T. Newman, and J. Winicour, *Phys. Rev. Lett* **20** (1968) 878.
38. M. Wyman, *Phys. Rev. D* **24** (1981) 839.