

Ecuaciones de advección-difusión, telégrafo y onda advectiva como superposiciones de transporte, difusión y onda: un enfoque didáctico

G.M. Ortigoza Capetillo
Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas,
e.mail: gortigoza@uv.mx

Recibido el 23 de febrero de 2006; aceptado el 26 de octubre de 2006

En este trabajo se presentan soluciones exactas de las ecuaciones de advección-difusión y del telégrafo. Estas ecuaciones se han considerado como combinaciones de tres ecuaciones básicas, a saber: la ecuación de onda, la ecuación del transporte y la ecuación de difusión. Así, de manera natural, se introduce una tercera combinación, la ecuación de *onda advectiva*; la cual, a pesar de no ser muy popular, es un ejemplo sencillo y de valor didáctico, ya que permite explicar relaciones físicas y matemáticas de la superposición de las ecuaciones de transporte y ondas.

Descriptores: Enseñanza; advección; difusión; ecuación de onda.

In this work we present exact solutions of the advection-diffusion and the telegraph equations. These equations are considered as combinations of the basic equations: wave, heat and transport equation. Thus, in a natural way, a third combination that we called advection-wave is introduced. Although this equation is not so popular like the other combinations, it is a simple example of didactical value that allow us to explain physical and mathematical relations for the superposition of transport and wave motion.

Keywords: Physics Education, advection, diffusion, wave equation.

PACS: 01.40Fk; 02.30Jr

1. Introducción

Existen en la naturaleza una amplia gama de fenómenos que se pueden modelar usando las ecuaciones de transporte, difusión y de onda, por esta razón es tan importante el estudio de la propagación e interacción de ondas en diversas ramas de la ciencia; entre algunos ejemplos podemos citar: ondas electromagnéticas, ondas sonoras, vibraciones de cuerdas o membranas, ondas sísmicas, ondas de densidad de tráfico, olas en la superficie de un líquido, señales en las líneas de transmisión, ondas viajeras en biología [10], etc. En este trabajo se presenta una solución exacta de una ecuación de onda advectiva. Para obtener esta solución se emplean herramientas matemáticas elementales, lo que permite utilizar este ejemplo para fines didácticos; además, esta solución exacta puede ser de utilidad para la verificación de métodos numéricos diseñados para la solución de este tipo de problemas. El desarrollo de este trabajo se distribuye de la siguiente manera: en la Sec. 2 se introduce la ecuación de onda advectiva como una consecuencia de combinaciones de ecuaciones diferenciales parciales clásicas, la Sec. 3 muestra como se obtiene una solución exacta y, finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. Tres ecuaciones clásicas y sus combinaciones

Para motivar nuestra ecuación de onda advectiva consideremos los siguientes problemas de valores iniciales [1,3,4], con sus respectivas soluciones:

Transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x),$$

$$u(x, t) = \phi(x - at). \quad (1)$$

Onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2)$$

Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy. \quad (3)$$

Dos ejemplos interesantes que se obtienen al combinar dos de las tres ecuaciones anteriores son: la ecuación de advección-difusión [2] (transporte con calor), y la ecuación del telégrafo [5] (onda con calor). Estas ecuaciones, además de ser interesantes desde los puntos de vista físico y matemático, tienen una variedad de aplicaciones entre las que podemos contar: modelos de dispersión de poblaciones, transferencia de contaminantes, calidad del aire, difusión en océanos y líneas de transmisión.

Consideremos la ecuación de advección-difusión:

$$U_t + cU_x - kU_{xx} = 0, \quad U(x, 0) = f(x). \quad (4)$$

Usando el cambio de variable $U(x, t) = e^{\alpha x - \beta t} W(x, t)$ la Ec. (4) se transforma en

$$W_t = kW_{xx}, \quad W(x, 0) = f(x)e^{-\frac{cx}{2k}}, \quad (5)$$

donde

$$\alpha = \frac{c}{2k}, \quad \beta = \frac{c^2}{4k}.$$

El problema (5) puede resolverse usando la fórmula (3) y así la solución del problema de valor inicial (4) es

$$U(x, t) = \frac{e^{\frac{c}{2k}x - (\frac{c^2}{4k})t}}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) e^{-\frac{c}{2k}y} dy. \quad (6)$$

Por otra parte, consideremos la ecuación del telégrafo:

$$U_{tt} + 2dU_t - c^2U_{xx} + d^2U = 0, \quad U(x, 0) = f(x), \\ U_t(x, 0) = g(x). \quad (7)$$

Con el cambio de variable $V(x, t) = e^{dt}U(x, t)$ el problema de valores iniciales (7) se transforma en

$$V_{tt} - c^2V_{xx} = 0, \quad V(x, 0) = f(x), \\ V_t(x, 0) = g(x) + df(x). \quad (8)$$

La solución de este último problema puede obtenerse de la fórmula de D'Alembert (2) y así la solución de la ecuación del telégrafo está dada por

$$U(x, t) = \frac{e^{-dt}}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] \\ + \frac{e^{-dt}}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} [g(y) + df(y)] dy.$$

En la expresión anterior, los términos $f(x + ct)$ y $f(x - ct)$ nos dicen que tendremos ondas propagándose en ambas direcciones, mientras que el término e^{-dt} nos dice que la amplitud de estas ondas disminuirá con la evolución del tiempo.

Analicemos más a detalle el comportamiento de las soluciones exactas de las ecuaciones de advección-difusión y del telégrafo anteriormente obtenidas. La Fig. 1 muestra la solución de la ecuación de advección-difusión para $t=0.05, 0.5, 1, 1.5,$ y 2 . La condición inicial se ha elegido como

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+2x} & \text{si } |x - 1| \leq 2, \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

con $k = 1, c = 4$; en este caso la solución exacta está dada por

$$U(x, t) = \frac{e^{2x-4t - \frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{4 + 16t}} \\ \times \left(erf\left(\frac{3 + 12t - x}{\sqrt{16t^2 + 4t}}\right) - erf\left(\frac{-1 - 4t - x}{\sqrt{16t^2 + 4t}}\right) \right),$$

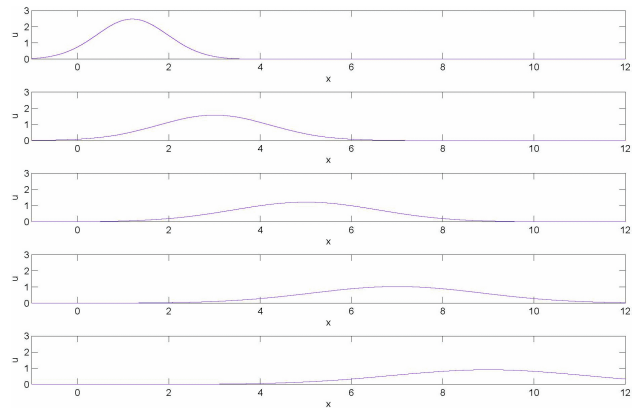


FIGURA 1. Advección-difusión.

donde $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-r^2} dr$ es la función error.

Observamos que el perfil inicial de la onda se mueve a la derecha (debido al transporte) y su amplitud disminuye (debido a la difusión).

Por otra parte la Fig. 2 muestra la solución de la ecuación del telégrafo para $t=0, 1, 1.5, 2,$ y 2.5 . Se han elegido los valores $c=1, d=1/2, f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x)=0$. Podemos observar un comportamiento similar a la ecuación de onda donde la condición inicial se divide en dos ondas una propagándose hacia la derecha y otra hacia la izquierda; sin embargo la amplitud de estas ondas decrece debido a la difusión. Las soluciones de los ejemplos anteriores pueden considerarse como superposiciones; transporte más difusión en el caso de la ecuación de advección difusión, mientras que onda más difusión en la ecuación del telégrafo. Así, parece natural considerar la combinación restante: advección más onda (onda advectiva). Esta última combinación no es una ecuación que goze de mucha popularidad entre los textos de ecuaciones diferenciales parciales, sin embargo es un ejemplo sencillo que, desde el punto de vista didáctico, es útil para explicar relaciones físicas y matemáticas de esta ecuación.

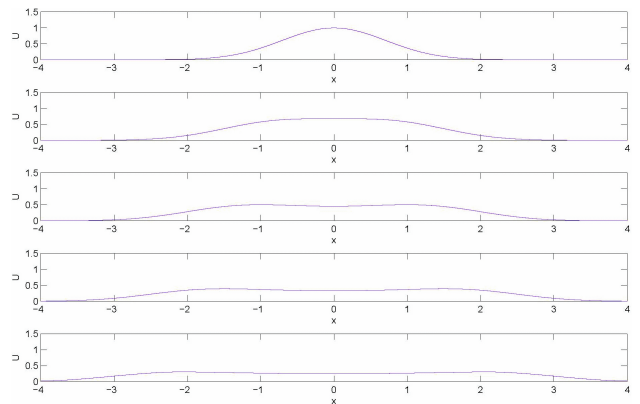


FIGURA 2. Ecuación del telégrafo.

3. Una onda advectiva

Consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación de onda advectiva:

$$\begin{aligned}
 U_t + aU_x + U_{tt} - c^2U_{xx} &= 0, \\
 U(x, 0) &= f(x), \\
 U_t(x, 0) &= g(x).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Note que la expresión anterior se obtiene sumando algebraicamente las ecuaciones de transporte y de onda. Podemos definir un cambio de variables de manera similar a los casos de las ecuaciones de advección-difusión y del telégrafo. Así, sea $U = e^{\alpha x + \beta t}W$ y substituyendo en (9) obtenemos

$$\begin{aligned}
 W_{tt} - c^2W_{xx} + (1 + 2\beta)W_t + (a - 2\alpha c^2)W_x \\
 + (\beta + a\alpha + \beta^2 - c^2\alpha^2)W &= 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Notemos que hemos obtenido la ecuación de onda, más otros términos de menor orden. Puesto que los coeficientes de estos términos contienen a los parámetros α y β , podemos elegir los parámetros para obtener simplificaciones importantes. Por ejemplo, si elegimos que se anulen los coeficientes de W_x y W_t , obtenemos

$$W_{tt} - c^2W_{xx} + \gamma W = 0, \tag{11}$$

donde hemos elegido

$$\alpha = \frac{a}{2c^2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

y

$$\gamma = 1/4(-1 + a^2/c^2).$$

Si la velocidad de advección a es diferente a la velocidad de propagación de onda c se tiene que $\gamma \neq 0$ y la Ec. (11) corresponde a la ecuación de Klein Gordon [8,9] para $\gamma > 0$ y a la ecuación del telégrafo modificada [9] para $\gamma < 0$.

En el caso que las velocidades de advección y propagación son iguales ($\gamma = 0$) el cambio de variables anterior transforma la ecuación de onda advectiva en la ecuación de onda. Consideremos primero el problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned}
 U_t + cU_x + U_{tt} - c^2U_{xx} &= 0, \\
 U(x, 0) &= f(x) \\
 U_t(x, 0) &= g(x).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Si definimos el cambio de variables $U = We^{(x-ct)/2c}$ la Ec. (12) se transforma en

$$\begin{aligned}
 W_{tt} - c^2W_{xx} &= 0, \quad W(x, 0) = f(x)e^{-\frac{x}{2c}}, \\
 W_t(x, 0) &= e^{-\frac{x}{2c}} [g(x) + \frac{1}{2}f(x)];
 \end{aligned}$$

la solución de este problema puede hallarse usando la fórmula de D'Alembert y así la solución general de (12) es

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \frac{1}{2} [e^{-t}f(x + ct) + f(x - ct)] \\
 &+ \frac{e^{-\frac{(x-ct)}{2c}}}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\frac{s}{2c}} \left[g(s) + \frac{1}{2}f(s) \right] ds
 \end{aligned} \tag{13}$$

Figura 3 muestra la solución del problema de valor inicial (12) para tiempos $t=0.5, 1, 1.5, 2, 2.5,$ y 3 . Aquí la velocidad de advección es igual a la velocidad de propagación $c = 1$, las condiciones iniciales son $u(x, 0) = e^{-x/2}$ y $u_t(x, 0) = 0$. Se observa que la condición inicial se divide en dos ondas, una propagándose a la derecha y otra a la izquierda; esta última onda a la izquierda es cancelada por el efecto de la advección a la derecha, dando como resultado una onda propagándose a la derecha. En los ejemplos anteriores se han mostrado gráficas de las soluciones a diferentes tiempos; sin embargo una presentación más detallada de la evolución de las soluciones puede conseguirse mediante el uso de animaciones [6, 7]. Para completar nuestra exposición presentaremos ahora la solución exacta en el caso más general, a saber el problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned}
 U_t + aU_x + U_{tt} - c^2U_{xx} &= 0, \quad U(x, 0) = f(x), \\
 U_t(x, 0) &= g(x).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Si tomamos el cambio de variable $U = e^{\frac{ax}{2c^2} - \frac{t}{2}}W$, el problema anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
 W_{tt} - c^2W_{xx} + \gamma W &= 0, \quad W(x, 0) = e^{-\frac{ax}{2c^2}} f(x), \\
 W_t(x, 0) &= e^{-\frac{ax}{2c^2}} \left(g(x) + \frac{f(x)}{2} \right),
 \end{aligned}$$

donde podemos identificar dos soluciones [9] dependiendo del signo de γ :

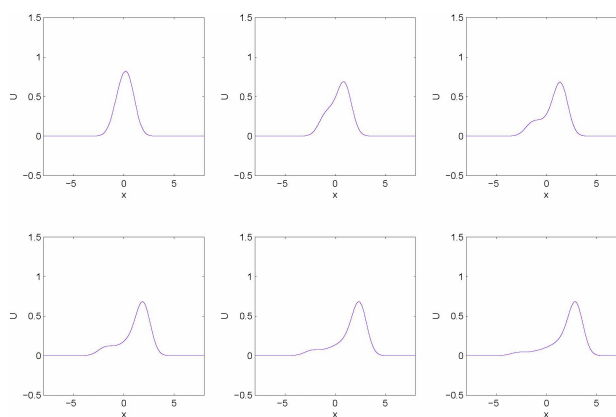


FIGURA 3. Onda advectiva.

Para $\gamma > 0$ la solución de (11) es

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \frac{e^{-\frac{t}{2}} \left[e^{\frac{at}{2c}} f(x - ct) + e^{-\frac{at}{2c}} f(x + ct) \right]}{2} \\
 & + \frac{e^{\frac{ax}{2c^2} - \frac{t}{2}}}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\frac{as}{2c^2}} \left(g(s) + \frac{f(s)}{2} \right) \\
 & \times J_0 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2} \right) ds \\
 & - \frac{e^{\frac{ax}{2c^2} - \frac{t}{2}} \sqrt{\gamma}}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\frac{as}{2c^2}} f(s) \\
 & \times \frac{J_1 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2}} ds,
 \end{aligned}$$

mientras que para $\gamma < 0$ la solución es:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \frac{e^{-\frac{t}{2}} \left[e^{\frac{at}{2c}} f(x - ct) + e^{-\frac{at}{2c}} f(x + ct) \right]}{2} \\
 & + \frac{e^{\frac{ax}{2c^2} - \frac{t}{2}}}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\frac{as}{2c^2}} \left(g(s) + \frac{f(s)}{2} \right) \\
 & \times I_0 \left(\frac{\sqrt{-\gamma}}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2} \right) ds \\
 & - \frac{e^{\frac{ax}{2c^2} - \frac{t}{2}} \sqrt{-\gamma}}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\frac{as}{2c^2}} f(s) \\
 & \frac{I_1 \left(\frac{\sqrt{-\gamma}}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - s)^2}} ds,
 \end{aligned}$$

aquí J_0, J_1, I_0 y I_1 son las funciones de Bessel de primera y segunda clases de ordenes 0 y 1.

4. Conclusiones

Inicialmente se han presentado soluciones exactas de las ecuaciones de advección-difusión y del telégrafo. Estas ecuaciones se han considerado como combinaciones de tres ecuaciones básicas, a saber: la ecuación de onda, la ecuación del transporte y la ecuación de difusión. Así, hemos introducido una tercera combinación, la ecuación de onda advectiva, la cual, a pesar de no ser muy popular, es un ejemplo sencillo y de valor didáctico, ya que permite explicar relaciones físicas y matemáticas de esta ecuación. La ecuación de onda advectiva se ha obtenido básicamente sumando las ecuaciones del transporte y de onda. El efecto físico de esta ecuación (en el caso de velocidad de advección igual a velocidad de propagación y cero velocidad inicial) es que la condición inicial se divide en dos ondas (fórmula de D'Alembert), una propagándose a la derecha y otra a la izquierda; esta última onda a la izquierda es cancelada por el efecto de la advección a la derecha, dando como resultado una onda propagándose a la derecha.

Fenómenos más complicados pueden modelarse con una ecuación que involucre transporte, onda y advección. Si se busca obtener soluciones numéricas de este tipo de ecuaciones, la solución dada para la ecuación de onda advectiva puede ser de utilidad para verificar el buen funcionamiento de los algoritmos numéricos. El uso de animaciones proporciona una herramienta didáctica útil para realizar observaciones detalladas de la evolución de las soluciones.

1. L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1998.
2. J.D. Logan, *Applied Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1998).
3. J. Cooper, *Introduction to Partial Differential Equations with Matlab* (Birkhäuser, 1998).
4. S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and engineers* (Dover, 1993).
5. P. Duchateau y D.W. Zachmann, *Applied Partial Differential Equations* (Dover, 2002).
6. G.M. Ortigoza, *Animaciones en Matlab y Maple de Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Física-Matemática*, aceptado para

su publicación en la revista Mexicana de Física, 23 Agosto del 2006.

7. website, *Useful Physics Simulations/Animations website*, http://cnr2.kent.edu/keane/teaching/c_mech/links2.html
8. M.A. Pinsky, *Introduction to Partial Differential Equations with applications* (McGraw Hill, 1984).
9. E. Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics* (Wiley-Interscience Series in Pure and applied mathematics, 1998).
10. L. Konstadia y T.G. Hallam, *Traveling Wave Solutions of a Nonlinear Reaction-Advection Equation* (Journal of Mathematical Biology) Vol. 38, p. 346.