Tiempo mínimo y trayectoria de movimiento

V. Aboites y A. Pisarchik
Centro de Investigaciones en Óptica,
Loma del Bosque 115, Col. Campestre, 37150 León, Gto.

Recibido el 28 de abril de 2006; aceptado el 29 de enero de 2007

Se presenta la aplicación del cálculo diferencial elemental a la solución de un problema de tiempo mínimo. Así mismo, bajo las condiciones experimentales aquí estudiadas, se muestra que los seres humanos elegimos trayectorias de movimiento que coinciden con las calculadas a partir del principio de tiempo mínimo. Lo anterior se concluye al analizar el movimiento de un grupo de estudiantes que deben correr a lo largo de una alberca y después nadar a través de ésta para alcanzar un objeto colocado en el extremo opuesto. Se presenta el análisis matemático del problema, su solución y la comparación con los resultados experimentales.

Descriptores: Mínima acción; tiempo mínimo.

The application of basic differential calculus to the solution of a minimum time problem is presented. Under the experimental conditions here discussed it is shown that human beings choose movement trajectories that agree with the ones calculated using the minimum time principle. These conclusions are obtained from the analysis of a group of students who must run along a swimming pool and then jump and swim through the pool to reach an object placed on the opposite side. The mathematical analysis of the problem is presented, its solution and comparison with experimental results.

Keywords: Least action principle; minimum time principle.

PACS: 45.20.-d; 45.10.Db; 01.40.gb; 01.50.My; 01.80.+b

1. Introducción

Richard Feynman [1] describe el principio de tiempo mínimo, conocido en óptica como principio de Fermat, que establece que: "de todos los caminos posibles para ir de un punto a otro se seguirá aquel que requiera el tiempo mínimo". Así mismo Feynman señala que las leyes fundamentales de la física pueden ser escritas en la forma de un principio de mínima acción, también conocido como principio de Hamilton, en donde una cantidad, llamada acción, toma siempre un valor extremo. La acción S se define como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{1}$$

donde L es el lagrangiano del sistema y la integral se realiza sobre el tiempo entre t_1 y t_2. El lagrangiano se define como la energía cinética T menos la energía potencial V del sistema, *i.e.*, L = T - V. Para una partícula de masa m tenemos

$$L\left(x, dx/dt\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x). \tag{2}$$

La importancia del principio de mínima acción la expresa Goldstein [2] señalando, en acuerdo con Feynmann, que: "*en casi todos los campos de la física principios variacionales, como el de mínima acción, pueden ser usados para expresar las 'ecuaciones de movimiento' del sistema, ya sea que se trate de las ecuaciones de Newton, de las de Maxwell o la ecuación de Schrödinger. Cuando un principio variacional se usa como base de la formulación, todos los diferentes campos de la física mostrarán al menos hasta cierto grado, una analogía estructural*". Históricamente es interesante notar que este principio, vinculado a elementos teológicos, fue planteado por Maupertius. La forma y planteamiento actual del mismo es debida a Euler, Lagrange y Hamilton. Como se ha mencionado, de entre todos los caminos posibles, una partícula seguirá aquel cuya integral de acción proporcione un mínimo (estrictamente, un valor extremo). Para una partícula o sistema sin fuerzas externas, el principio de mínima acción se puede escribir como [2]

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0, \tag{3}$$

donde Δ indica la variación. En este caso el principio de mínima acción toma la forma:

$$\Delta\left(t_2 - t_1\right) = 0. \tag{4}$$

Esta ecuación muestra que de todos los caminos posibles entre dos puntos el sistema se moverá sobre una trayectoria para la cual el tiempo sea un mínimo. Feynman narra su asombro cuando siendo estudiante de preparatoria su profesor le explico estos resultados por primera vez [1]. Es reconfortante saber que casi todo estudiante de preparatoria ve con sorpresa y admiración estos resultados. Preguntas típicas de algunos estudiantes son: ¿Por qué el Universo funciona de modo tal que el principio de mínima acción es válido? ¿El principio de mínima acción sólo funciona para describir el movimiento de objetos inanimados o también para el movimiento de los seres vivos? Es interesante mostrar de modo sencillo que el principio de mínima acción es obedecido también por los humanos. Algunos estudiantes con incredulidad preguntarán: ¿Cómo saben los seres humanos que la trayectoria óptima es la descrita por el principio de mínima acción?

¿Nacemos los seres humanos sabiendo física y entendiendo integrales de lagrangianos?

En seguida se presenta el trabajo realizado con un grupo de estudiantes de preparatoria que ya han llevado cursos de cálculo diferencial e integral y que manejan con soltura problemas de máximos y mínimos. La demostración de que el principio de tiempo mínimo "funciona" con los seres humanos, se hace mostrando que la trayectoria que una persona seguirá para alcanzar un objeto del cual está separado por tierra y agua será siempre con bastante precisión aquella que requiere el mínimo tiempo. La siguiente sección presenta el planteamiento del problema con su solución, así como los resultados experimentales. Finalmente se presenta la discusión y las conclusiones.

2. Planteamiento del problema

A lo largo de uno de los lados principales de una alberca olímpica (50 $\times$ 25 m) se coloca un objeto. Partiendo de un vértice opuesto un estudiante debe correr a lo largo de la alberca y después saltar al agua y nadar para alcanzar lo más rápidamente posible el objeto, como se muestra en la Fig. 1. El estudiante parte del punto A y el objeto se encuentra en el punto B. El estudiante corre la distancia AD y posteriormente nadar la distancia DB. Deseamos determinar la distancia "y" a la cual el estudiante salta a la alberca. Durante las pruebas todos los estudiantes estuvieron presentes y participaron en las mediciones de todos sus demás compañeros.

El tiempo en que el estudiante hace el recorrido total AD y DB es función de la distancia "y" y puede ser escrito como

$$T\left(y\right) = \frac{a-y}{v_t} + \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{v_a}, \tag{5}$$

donde v_t es la velocidad promedio del estudiante sobre la tierra y v_a la velocidad promedio del estudiante en el agua. El primer término de la Ec. (5) representa el tiempo transcurrido al desplazarse sobre la tierra y el segundo término el tiempo al desplazarse en el agua. Con el grupo de estudiantes participantes los valores medidos de v_ty $v_a$fueron aproximadamente 3 y 0.5m/s, respectivamente. Estos resultados se obtuvieron midiendo el tiempo empleado en correr 50 metros y en nadar 25 metros con un cronómetro cuya escala temporal mínima era de 0.5 segundos. Es decir, el valor de v_t es el promedio aritmético obtenido con las mediciones de los resultados de los alumnos al correr 50 metros a lo largo de la alberca. Probablemente debido al riesgo de resbalarse en el piso mojado las diferencias no fueron importantes (no hubo *sprinters*) y las mediciones se muestran en la Tabla I. De modo análogo, el valor de v_a es el promedio aritmético de las mediciones obtenidas al nadar cada alumno 25 metros y los resultados se muestran en la Tabla II. Dado que la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo, v = s/t, el error en las mediciones de v_t y v_a, denotado por Δv_t y Δv_a, es fácilmente obtenible de la expresión

$$\frac{s \pm \Delta s}{t \pm \Delta t} = v \pm \Delta v, \tag{6}$$

donde Δv es el error en la velocidad dado por

$$\Delta v = \frac{t\Delta s + s\Delta t}{t^2}. \tag{7}$$

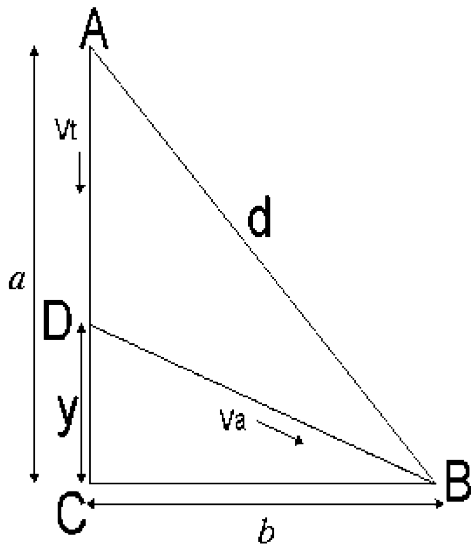

FIGURA 1. El estudiante inicia en la posición A y debe alcanzar un objeto localizado en la posición B. Los segmentos AC y CB miden 50 y 25 metros respectivamente. El estudiante corre a lo largo de AD con velocidad promedio v_t y nada a lo largo de DB con velocidad promedio v_a.

TABLA I. Mediciones obtenidas de los tiempos empleados por los estudiantes al correr 50 metros y las correspondientes velocidades. El promedio aritmético obtenido define el valor de v_t utilizado. La escala temporal mínima del cronómetro utilizado fue de 0.5 segundos.

Medición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Promedio
Tiempo [seg]	17	16.5	16	16.5	16.5	16	17.5	17	16.5	17	16.65
Velocidad [m/seg]	2.941	3.03	3.125	3.03	3.03	3.125	2.857	2.941	3.03	2.941	3.003

TABLA II. Mediciones obtenidas de los tiempos empleados por los estudiantes al nadar 25 metros y las correspondientes velocidades. El promedio aritmético obtenido define el valor de v_a utilizado. La escala temporal mínima del cronómetro utilizado fue de 0.5 segundos.

Medición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Promedio
Tiempo [seg]	49	46	51.5	49.5	50.5	49.5	52	51.5	50	50.5	50
Vel [m/seg]	0.51	0.543	0.485	0.505	0.495	0.505	0.48	0.485	0.5	0.495	0.500

TABLA III. Mediciones obtenidas del valor "y" al cual el estudiante salta al agua al realizar diez pruebas. El error experimental en las mediciones es Δ = 0.05 metros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Promedio	
y = [m]	4.1$\pm\Delta$	4.25$\pm\Delta$	4.25$\pm\Delta$	4.3$\pm\Delta$	4.15$\pm\Delta$	4.25$\pm\Delta$	4.2$\pm\Delta$	4.25$\pm\Delta$	4.2$\pm\Delta$	4.25$\pm\Delta$	4.22$\pm\Delta$

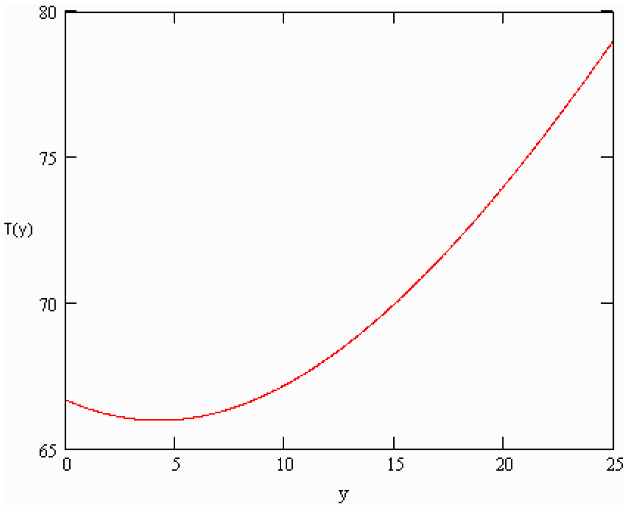

FIGURA 2. Gráfica de la Ec. (1), en donde es clara la existencia de un mínimo para la función T(y).

Suponiendo para v_t que la longitud de la alberca es 50 $\pm$ 0 metros y que el tiempo promedio requerido por los estudiantes para recorrer esta distancia es (de la Tabla I) 16.65 $\pm$ 0.5 segundos, obtenemos para la velocidad v_t el resultado v_t = 3 $\pm$ 0.09 m/s. Tomando en cuenta la desviación estándar para v_t obtenida de σ_{vt} = 0.00727, tenemos que el error absoluto ΔE_{vt} en la medición de v_t es $\Delta E_{vt} = [0.09^2 + .00727^2]^{1/2} \approx 0.0902$. Análogamente podemos obtener (de la Tabla II) que $v_a = 0.5 \pm 0.005$ m/s. La desviación estándar para v_a es σ_{va} = 0.00032 y el error absoluto en la medición de v_a es $\Delta E_{va} = [0.005^2 + 0.00032^2]^{1/2} \approx 0.005$.

Para obtener el valor de "y" que minimiza la función $T(y)$ hacemos $dT(y)/dy = 0$:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{a-y}{v_t}+\frac{\sqrt{b^2+y^2}}{v_a}\right]=0 \tag{8}$$

La Fig. 2 muestra la gráfica de la Ec. (5) tomando como parámetros constantes a v_t = 3m/s, v_z = 0.5m/s, a = 50m y b = 25m. De esta figura es claro que la Ec. (5) tiene un mínimo. Resolviendo para "y" de la Ec. (8) obtenemos

$$y=\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{v_t}{v_a}\right)^2-1}}. \tag{9}$$

Éste es el valor de "y" al cual se obtiene el mínimo tiempo de recorrido total. Sustituyendo valores de v_t, v_a y b obtenemos; y = 4.22m. (Igualmente podemos ver que la expresión (9) vista como función de "y" y "b" representa una recta *y = mb + B*, que pasa por el origen (B = 0) con pendiente m dada por $m = [(v_t/v_a)^2 - 1]^{-1/2}$. Para nuestros parámetros m tiene el valor de; m = 0.169. Dando a "b" en la ecuación de la recta el valor del ancho de la alberca b = 25 m, obtenemos nuevamente el valor de y = 4.22m). El valor calculado de "y" coincide sorprendentemente bien, dentro del error experimental, con el valor obtenido promediando los resultados medidos para las diez pruebas mostradas en la Tabla III, esto es, $y = 4.22 \pm 0.05$ m. Los resultados de esta tabla fueron obtenidos colocando a lo largo de la alberca una cinta graduada con escala mínima de 5 centímetros, por tanto tenemos un error en las mediciones debido al instrumento de medición de Δ = 0.05m, por otra parte la desviación estándar en las mediciones obtenidas de "y" es σ_y = 0.003. El error absoluto en la medición de "y" es por tanto $\Delta E_y = [0.05^2 + 0.003^2]^{1/2} \approx 0.05$.

Otra forma de analizar los resultados anteriores consiste en obtener el mínimo no de la función $T(y)$ sino de la distancia δ(t) entre el alumno y el objeto. Como podemos ver en la Fig. 1 el triangulo rectángulo formado por los catetos "$b(t)$" y "$a(t)$" tiene como hipotenusa "δ", es decir, $\delta(t) = [b(t)^2 + a(t)^2]^{1/2}$. Conforme el alumno corre a lo largo de la alberca a partir del punto A, la rapidez con la cual éste se acerca al objeto; *d*δ*(t)/dt* disminuye constantemente hasta ser cero al llegar al punto C. Antes de C en el punto $y = y_o$ en donde la velocidad con la cual el alumno se acerca al objeto iguala a su velocidad de desplazamiento en el agua v_a en ese punto el alumno saltara al agua. Es decir, en $y = y_o$ tenemos

$$\frac{d\delta\,(t)}{dt}=v_a. \tag{10}$$

Sustituyendo $\delta(t)$ en la expresión anterior y tomando en cuenta que en y_o tenemos; *db(t)/dt = 0* (velocidad a lo largo del lado CB) y que *da(t)/dt* = v_t (velocidad a lo largo del lado AC) obtenemos

$$v_a = \frac{v_t y_o}{\sqrt{b^2 + y_o^2}}, \tag{11}$$

en donde despejando para "y_o" se obtiene el mismo resultado que el mostrado en la Ec. (9).

3. Conclusión

De un modo bastante sencillo y estimulante para jóvenes de preparatoria se ha mostrado que los humanos satisfacemos en nuestros desplazamientos el principio de tiempo mínimo. Al discutir la pregunta ¿Cómo sabemos cual es el punto en el que debemos saltar para lograr un tiempo mínimo?, se hicieron varias observaciones. Una implica aceptar que cada persona tiene una razonable idea de su velocidad de desplazamiento en tierra y en agua y nuestro cerebro calcula con esta información intuitiva el punto en el que se debe saltar. La "prueba" de esto es que si una persona no sabe nadar seguramente ¡nunca saltará a la alberca! La necesidad de que haya información inicial para que el cerebro calcule el punto de salto puede resultar incomoda, debido a que una partícula o un rayo de luz no tienen cerebro para decidir su trayectoria de tiempo mínimo y sin embargo la siguen. Es interesante notar que mientras que la primera solución matemática dada al problema requiere que el participante conozca sus velocidades en tierra y en agua, la segunda solución sólo requiere conocer la velocidad en el agua, ya que como podemos ver en la Ec. (10) el estudiante saltará al agua cuando la velocidad a la que se acerque al objeto sea igual a su velocidad en el agua. Finalmente es también interesante discutir el principio de mínima acción desde el punto de vista de la energía [3], ya que se puede mostrar que la trayectoria seguida es también la trayectoria que requiere un mínimo de energía. Se ha presentado en este trabajo la discusión de un principio fundamental de la ciencia para estudiantes de nivel medio superior haciendo uso de recursos pedagógicos elementales de cálculo diferencial, así como correr y nadar. La motivación observada en los alumnos participantes hacia la física y la matemática durante la realización de este trabajo fue extraordinaria.

Agradecimientos

Se agradece ampliamente el apoyo del Ing. Mario Alberto Barrera en la realización del presente trabajo así como las observaciones de un árbitro anónimo.

1. R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley, 1998).
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 1965).
3. D.E. Neuenschwander, E.F. Taylor y S. Tuleja, *The Physics Teacher* **44** (2006) 146.