

# Animaciones en Matlab y maple de ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática

G.M. Ortigoza Capetillo

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, Zona Universitaria,

Apartado Postal 270, 91090 Xalapa, Ver.

e-mail: gortigoza@uv.mx

Recibido el 22 de mayo de 2006; aceptado el 23 de agosto de 2006

En este trabajo se presentan soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales que dependen del tiempo; estas soluciones son de la forma  $u(x, t)$ , con  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Las gráficas de las soluciones a diferentes tiempos permiten la creación de animaciones de las soluciones. Se muestra de manera general la forma de crear animaciones en Maple y Matlab. Estas animaciones pueden utilizarse como herramienta didáctica para presentar fenómenos físicos como son: la propagación de ondas de un medio a otro, superposición de ondas, difusión, etc; así mismo pueden usarse para despertar el interés de los estudiantes por el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones. Para las animaciones se eligió un subconjunto importante de ecuaciones de la física matemática, entre las que se cuentan: la ecuación del transporte, la ecuación de ondas (vibración de cuerdas y membranas, problema de transmisión), las ecuaciones de Klein Gordon, Korteweg de Vries (no lineal), del calor y de Maxwell. Brevemente se describen algunas de las técnicas de solución analítica de edps como son: escalamiento, método de características, separación de variables, etc. Más aun, el contar con soluciones analíticas puede ser útil para la verificación de implementaciones numéricas.

*Descriptor:* Enseñanza de la física; herramientas didácticas; ecuaciones diferenciales parciales.

In this work we present some exact solutions of time dependent partial differential equations (pdes); these solutions have the general form  $u(x, t)$ , with  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . The plots of the solutions at different times allow us to create animations of the solutions. We show in a general framework how to make animations in Maple and Matlab. These animations can be used as a didactic tool in order to introduce some physical phenomena such as: wave propagation, superposition, transmission from one medium to another, diffusion, etc. They can also be used to motivate the students to the study of partial differential equations and its applications. A representative subset of differential equations of mathematical physics was chosen that includes: the transport equation, wave equation, heat equation and equations of Klein Gordon, Korteweg de Vries, and Maxwell. We briefly present some of the analytical methods for the solutions of pdes: scaling, characteristics and separation of variables. Finally exact solutions can be very useful for code testing in numerical implementations.

*Keywords:* Physics education; education aids; partial differential equations.

PACS: 02.30Jr; 01.40Fk; 01.50Fr; 01.50Ht

## 1. Introducción

Recientemente ha surgido un creciente interés por incorporar, a la enseñanza de conceptos físicos y matemáticos, el uso de nuevas tecnologías, como son: paquetes computacionales de cálculos simbólicos, animaciones y ambientes gráficos. Así podemos encontrar algunas fuentes bibliográficas donde se estudia la física clásica, las ecuaciones diferenciales y el análisis numérico usando los paquetes Maple, Matlab y Mathematica [3, 6–8, 11–13].

Estas herramientas computacionales han mostrado su utilidad al presentar conceptos físicos y matemáticos en forma amena y novedosa. Mediante el uso de animaciones se puede capturar la atención de los estudiantes y despertar su interés por incursionar en áreas de la física y las matemáticas aplicadas, tales como: mecánica celeste, teoría de vibraciones, mecánica de fluidos, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales (edps), métodos numéricos, etc.

En este trabajo se presentan animaciones en Matlab y Maple de soluciones exactas de edps que dependen del tiempo, es decir, funciones de la forma  $u(x, t_k)$  con  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $t_k \in \mathcal{R}^{>0}$ ; se introducen de manera sencilla algunas de las técnicas más comunes de solución de edps y se describen ejemplos

de códigos para realizar animaciones en Matlab y Maple; para que el lector, de acuerdo a sus propios intereses, pueda crear sus propias animaciones. El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2 se presentan los elementos básicos para realizar animaciones en 1, 2 y 3 dimensiones en Matlab y Maple; en la Sec. 3 introducimos las animaciones de ejemplos de una dimensión: la ecuación de transporte, la ecuación de onda (sin fronteras, caso de intervalo finito, y un problema de transmisión), la ecuación de Klein-Gordon y se concluye la sección con la ecuación de Korteweg de Vries, el cual es un ejemplo de una ecuación no lineal. En la Sec. 3 se muestran los ejemplos de dimensiones 2 y 3; entre los bidimensionales se presentan el enfriamiento de una placa metálica cuadrada y las vibraciones de una membrana circular, para los ejemplos tridimensionales se muestran la propagación de ondas electromagnéticas generadas por un dipolo eléctrico y el enfriamiento de un cubo metálico. Finalmente incluimos algunas conclusiones.

## 2. Ejemplos de códigos para crear animaciones en Matlab y Maple

En esta sección mostraremos el uso de algunos comandos básicos para crear animaciones en Matlab y Maple.

## 2.1. Código para animaciones unidimensionales

Supongamos que deseamos hacer la animación de la función  $u(x, t) = e^{-(x-2t)^2}$ , la cual corresponde a la solución del problema de valor inicial:

$$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Veamos cómo se realiza esta animación en Matlab [16]:

La función de dos variables  $u(x, t)$  puede animarse graficando en un mismo marco (plano x-u) sus valores a diferentes tiempos. Así definimos  $t=0 : 0.05 : 6$  el vector de los diferentes tiempos que toma como tiempo inicial 0, como tiempo final 6 e incremento en tiempo de tamaño 0.05. Graficaremos en espacio (digamos en el intervalo  $[-2, 10]$ ), así el vector

$x=-2:0.1:10$ ; nos define los valores de  $x$ . La animación se obtiene como una secuencia de los valores de  $u$  a diferentes tiempos, todos ellos graficados en un mismo marco; para ello utilizamos el comando **set(gca,'nextplot','replacechildren')**; el cual mantiene las propiedades de los ejes. Para crear nuestra animación (secuencia de gráficos) usamos un ciclo **for** dentro del cual graficamos la solución al tiempo  $t(i)$  mediante el comando **plot(u,x)** y guardamos el cuadro en una matriz  $M$  con la ayuda del comando **M(i)=getframe**; en el transcurso de la evaluación de este ciclo **for**, las gráficas a diferentes tiempos han sido guardadas en la matriz  $M$  y hemos visualizado la animación. El siguiente código (mfile) muestra la implementación de los comando anteriormente descritos:

```
% Animacion de la solucion de la ecuacion del transporte
% U_t + 2 U_x = 0
% con condicion inicial U(x,0)=exp(-x^2)
x=-2:0.1:10; t=0:0.05:6; set(gca,'nextplot','replacechildren');
axis([-2 10 0 1]); for i=1:length(t)
    u=exp(-(x-2*t(i)).^2);
    plot(x,u);
    M(i)=getframe;
end
```

Para ver nuestra animación, abrimos el editor de Matlab y copiamos las instrucciones anteriores, grabamos el archivo con extensión m, digamos *ejemplo.m*; para la ejecución introducimos *ejemplo* en la ventana de comandos de Matlab. Una vez ejecutado este código veremos nuestra animación, y si usamos el comando `movie(M,0)` ejecutaremos una vez más la animación.

Realizar la misma animación en Maple [14, 15] resulta más sencillo, para ello usamos las instrucciones. `with(plots); animate(plot, [exp(-(x-2*t)^2), x = -2 .. 10], t= 0 .. 6);`

Tecleando estas instrucciones en la ventana de comandos de Maple se generará una gráfica, damos un *click* en el botón derecho del del ratón sobre ella y elegimos del menú **Animate** seguido por **Play** y de esta manera se obtendrá la animación. La instrucción **with(plots)** le dice a Maple que debe usar el paquete **plots**, note que la forma de definir el espacio está dada por  $x = -2..10$  mientras que los valores para el parámetro  $t$  se definen como  $t = 0..6$ . Aquí el incremento del tiempo no fue definido y Maple toma un valor por *default*, el cual hará nuestra animación más rápida o lenta (dependiendo de la velocidad de procesamiento de nuestro sistema).

## 2.2. Código para animaciones bidimensionales

Mostraremos ahora un ejemplo de un código para simulaciones en 2 dimensiones; para ello consideremos la función  $u(x, y, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$  la cual resuelve el problema de valor inicial con condiciones en la frontera:

$$u_t = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y). \quad (2)$$

La animación en Matlab se consigue mediante un código muy similar al caso unidimensional, a continuación mostramos un código bidimensional donde mediante el uso del símbolo %, se han incluido comentarios breves acerca de los comandos más importantes.

```
% Animacion de la solucion de la ecuacion del calor 2d
% U_t = 1/8(U_xx + U_yy)
% en el dominio 0 < x, y < 1
% condicion inicial u(x,y,0)=Sin(pix) Sin(pi*y)
% para 0<t<3
```

```
[x y]=meshgrid(0:.01:1,0:.01:1);
%define una malla para [0,1]x[0,1] con incremento en x y y de 0.01
title('Animacion de la temperatura');
set(gca,'nextplot','replacechildren'); caxis manual;
% permite que todos los gráficos usen los mismos límites en colores.
caxis([-1 1]);
% define los valores maximos para los limites como -1 y 1
axis equal;
%usa la misma escala para los ejes x y
t=0:0.05:3;
%vector de valores para los diferentes tiempos
for j=1:length(t) z=exp(-1/8*pi^2.*t(j)).*sin(2*pi*x).*sin(2*pi*y);
%evaluacion de la funcion de dos variables
axis off;
%remueve los ejes
pcolor(x,y,z);
%grafica en dos dimensiones
shading interp;
%interpolacion de colores
colorbar;
% agrega la barra de colores
M(j) = getframe(gcf);
% captura los graficos y los guarda en la matriz M
end
```

Para obtener la misma animación en Maple, usamos la siguiente instrucción:

```
animate(plot3d, [exp(-Pi*Pi*t)*sin(2*Pi*x)*sin(2*Pi*y), x = 0 .. 1, y = 0 .. 1], t = 0 .. .02, orientation = [-90, 0], style = patchngrid, axes = boxed, shading = zhue);
```

Explicuemos un poco esta instrucción; el comando básico para hacer animaciones en Maple es **animate** y su sintaxis es la siguiente:

```
animate(plotcommand, plotargs, t=a..b, options);
```

aquí **plotcommand** es el procedimiento Maple con el cual se obtiene un gráfico 2D o 3D; **plotargs** es la lista de argumentos del comando de gráfico, **t** es el parámetro mediante el cual se consigue la animación el cual varía entre los valores **a** y **b** y finalmente **options** especifica opciones del comando para graficar o de animación.

Para nuestra animación el comando para graficar es **plot3d**, sus argumentos aparecen entre corchetes cuadrados la función de dos variables espaciales y del parámetro tiempo (se incluye el rango de definición de las variables espaciales); con respecto a las opciones incluidas mencionamos que en

---

realidad tenemos una gráfica en 3d pero la visualizamos en el plano xy, esto se logra cambiando la orientación **orientation** $[\theta, \phi, ]$ , **patchngrid** usa un reticulado para colorear sin mostrarlo, **axes** muestra los ejes coordenados y finalmente **shading=zhue** ajusta los colores de acuerdo al valor de la función en cada punto del reticulado. Una vez ejecutada esta instrucción la figura obtenida se anima con el ratón de la misma manera que para el caso unidimensional.

### 2.3. Código para Animaciones Tridimensionales

Para presentar los ejemplos de códigos de animaciones tridimensionales usaremos la función:

$$U(x, y, z, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z),$$

que corresponde a la solución exacta del problema de la Sec. 4.4. El parámetro  $t$  corresponde al tiempo, el dominio espacial es  $\Omega = [0, 1]^3$  y para la visualización usaremos cortes definidos por la intersección de  $\Omega$  con planos paralelos. El siguiente código Matlab es muy similar a los dados anteriormente.

```
[x,y,z] = meshgrid(0:.05:1,0:0.05:1,0:.05:1);
set(gca,'nextplot','replacechildren'); caxis manual; caxis([0,1]);
t=0:0.01:0.5; for j=1:length(t)
    v=exp(-pi*pi*t(j)).*sin(pi*x).*sin(pi*y).*sin(pi*z);
    h = slice(x,y,z,v,[0.25 .5 .75],[],[0]);
caxis([0,1]); alpha('color')
set(h,'EdgeColor','none','FaceColor','interp',...
```

```
'FaceAlpha','interp')
alphanmap('rampdown') alphanmap('increase',.1) colormap(hsv);
colorbar; F(j)=getframe(gcf); end;
```

Para la visualización los cortes se obtienen mediante la instrucción  $\mathbf{h} = \text{slice}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, [0.25 \ .5 \ .75], [], [0])$  que corresponde a  $\Omega$  intersectado con  $x = 0.25$ ,  $x = 0.5$  y  $x = 0.75$  ([16]). La instrucción **set** se usa para definir las opciones del gráfico **h**, **alpha** y **alphanmap** para definir las propiedades de transparencia del gráfico mientras que **colormap** define los colores empleados. Para la misma animación en Maple usamos el siguiente código:

```
with(plots):N := 200:anim := array(1..N): for i to 25 do t := i/N:
P1[i] := plot3d(.25, x = 0..1, y = 0..1, color =
exp(-Pi*Pi*t)*sin(Pi*x)*sin(Pi*y)*sin(.25*Pi), style = patchnogrid);
P2[i] := plot3d(.5, x = 0..1, y = 0..1, color =
exp(-Pi*Pi*t)*sin(Pi*x)*sin(Pi*y)*sin(.5*Pi), style = patchnogrid);
P3[i] := plot3d(.75, x = 0..1, y = 0..1, color =
exp(-Pi*Pi*t)*sin(Pi*x)*sin(Pi*y)*sin(.75*Pi), style = patchnogrid);
anim[i] := display([P1[i], P2[i], P3[i]]) od;
display([seq(anim[i], i = 1..25)], insequence = true, axes =
boxed, transparency = .5)
```

En este caso hemos utilizado un arreglo para guardar la solución a diferentes tiempos; la solución se compone de los gráficos  $P1$ ,  $P2$  y  $P3$  que corresponden a los diferentes cortes mediante los planos  $z = 0.25$ ,  $z = 0.5$  y  $z = 0.75$ . El comando **display** nos da como resultado una gráfica, la cual se puede animar con los botones del ratón. Se ha utilizado el comando **color** para asignar el color correspondiente a cada punto del espacio tridimensional y nótese que para nuestra animación el incremento del tiempo está dado por  $t = i/N$  [14, 15].

### 3. Animaciones de edps en una dimensión

#### 3.1. La ecuación de transporte

Considere el problema de valor inicial

$$u_t + cu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad c \text{ constante.} \quad (3)$$

Para resolver este problema utilizaremos el *método de características*:

La Ec. (3) puede escribirse como

$$(c, 1) \cdot (u_x, u_t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{V}} = \nabla u \cdot \vec{V} = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación nos dice que  $u$  es constante en el plano  $x - t$  a lo largo de las rectas paralelas al vector  $\vec{V} = (c, 1)$ . A estas curvas se les llama curvas **Características**.

Considere la recta que al tiempo  $t = 0$  corta al eje  $x$  en  $x_0$ , su parametrización está dada por

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ct \\ t = t. \end{cases}$$

La función

$$v(t) = u(x(t), t)$$

es constante; en efecto

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} c + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Así,

$$v(t) = v(0) \quad v(t) = u(x(t), 0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

Por lo tanto la solución del problema de valor inicial (3) es

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

La solución se obtiene desplazando  $ct$  unidades a la derecha la condición inicial ( $c > 0$ ). En la animación consideramos  $c = 2$  y  $f(x) = e^{-x^2}$ . La Fig. 1 muestra la solución para  $t = 0, 1, 2, 3$ . Observamos así que la ecuación de transporte tiene el efecto de mover la condición inicial a la derecha sin distorsionarla.

#### 3.2. La ecuación de ondas (sin fronteras)

Considere las ecuaciones

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (5)$$

Usaremos en este ejemplo el método de cambio de variables [2]. Definimos

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct;$$

con este cambio de variables las Ecs. (5) se transforman en

$$u_{\xi\eta} = 0$$

cuya solución esta dada por:

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Por lo tanto,  $u$  expresada en las variables  $x$ ,  $t$  tiene la forma

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

De acuerdo con las condiciones iniciales,

$$f(x) = F(x) + G(x), \quad g(x) = -cF'(x) + cG'(x)$$

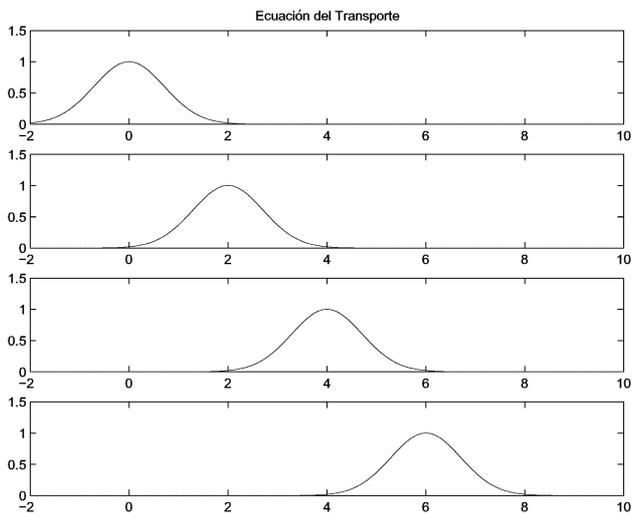


FIGURA 1.

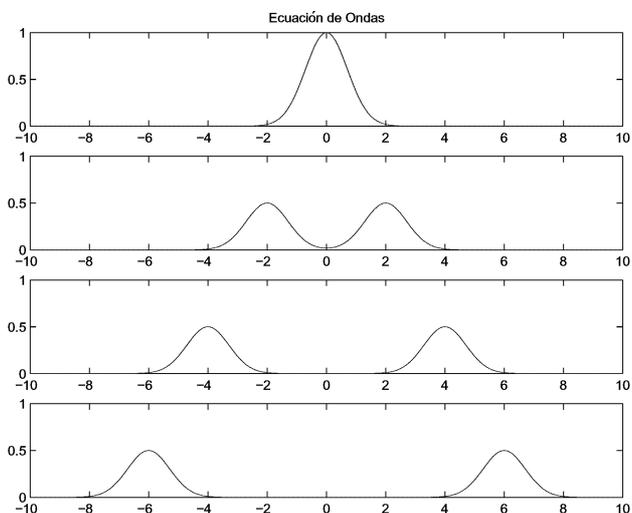


FIGURA 2.

y resolviendo para  $F$  y  $G$  obtenemos

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \quad G(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds.$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial (5) tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

A la expresión anterior se le conoce como fórmula de D'Alembert. [2] En la animación consideramos  $c=1$ ,  $f(x) = e^{-2(x-2)^2}$  y  $g = 0$ , así la solución es

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{-2(x-t-2)^2} + e^{-2(x+t-2)^2}]$$

La Fig. 2 muestra la solución para  $t = 0, 1, 2, 3$ .

En este caso tenemos que la condición inicial se divide en dos ondas propagándose a la misma velocidad en direcciones opuestas.

### 3.3. La ecuación de ondas en un intervalo finito (vibración de una cuerda)

Considere el problema de valor inicial con condiciones de frontera

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (8)$$

Para obtener la solución usaremos el método de separación de variables

Supongamos que  $u$  tiene la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (9)$$

al substituir (9) en (6) obtenemos

$$XT'' = a^2 X''T \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda, \quad \lambda \text{ constante}$$

$$\begin{cases} T'' - \lambda a^2 T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Supongamos que  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = -\beta^2$ . Las soluciones de (10) están dadas por

$$T(t) = A \sin(a\beta t) + B \cos(a\beta t), \quad (11)$$

$$X(x) = C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x).$$

Usando las condiciones de frontera (7) tenemos que

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Así,  $X(0) = 0$  implica que  $D = 0$  y  $X(L) = 0$  implica que  $\beta L = n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , con lo cual

$$T_n(t) = A \sin\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right), \quad (12)$$

$$X_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

y por superposición tenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \times [A_n \sin\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)].$$

Usando ahora las condiciones iniciales (8) tenemos que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

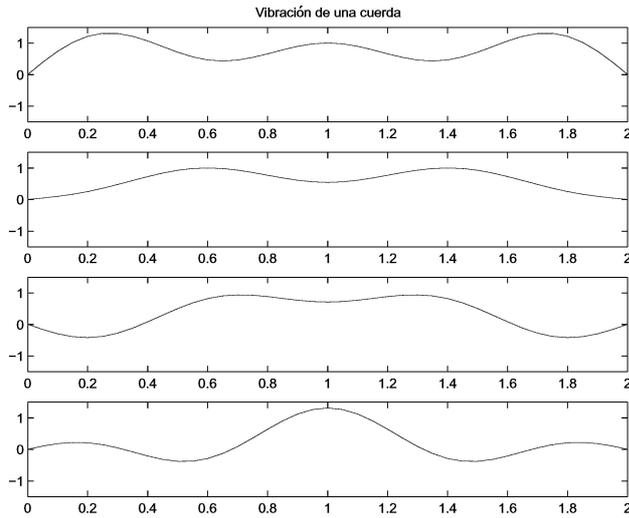


FIGURA 3.

donde

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Para la animación tomamos  $L = 2, a = 1, g \equiv 0$  y

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right).$$

Por lo tanto, la solución está dada por

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{5\pi t}{2}\right).$$

La Fig. 3 muestra la solución para  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ . Notamos que los extremos de la cuerda están fijos y cualquier otro punto de la cuerda oscila verticalmente.

### 3.4. Un problema de transmisión

Considere dos resortes de diferentes materiales unidos en  $x = 0$ , sujetos a una misma tensión  $T_0$  pero de diferentes densidades  $\rho_l$  y  $\rho_r$  [3]. Así las velocidades de propagación son

$$c_l = \sqrt{T_0/\rho_l}, \quad c_r = \sqrt{T_0/\rho_r}.$$

Supongamos que tenemos una onda incidente  $G(x + c_r t)$  moviéndose a la izquierda con  $G(x) = 0, x \leq 0$ . Además de la onda reflejada  $F(x - c_r t)$  obtendremos una onda transmitida  $H(x + c_l t)$  moviéndose a la izquierda. La solución estará dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} F(x - c_r t) + G(x + c_r t), & x > 0 \\ H(x + c_l t), & x \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

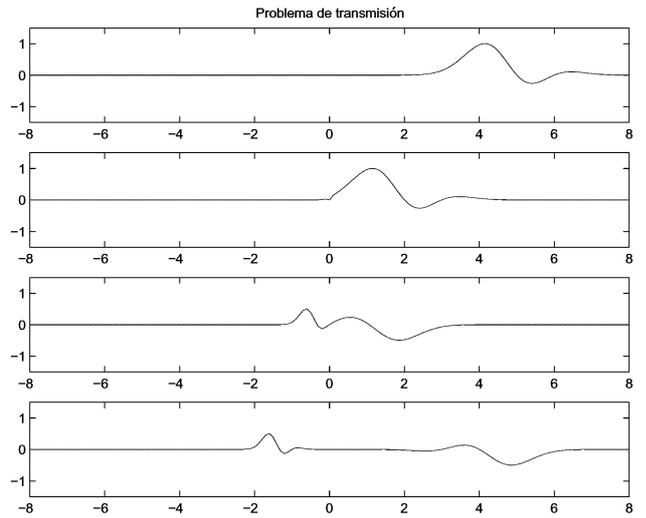


FIGURA 4.

Las condiciones para unir las soluciones son la continuidad de  $u$  y  $u_x$  en  $x = 0$ ,

$$\begin{cases} H(c_l t) = F(-c_r t) + G(c_r t), & \forall t, \\ H'(c_l t) = F'(-c_r t) + G'(c_r t) & \forall t. \end{cases} \quad (14)$$

resolviendo estas ecuaciones para  $F$  y para  $H$  obtenemos

$$F(z) = \frac{c_l - c_r}{c_l + c_r} G(-z),$$

$$H(z) = \frac{2c_l}{c_l + c_r} G\left(\frac{c_r z}{c_l}\right), \quad z = c_l t.$$

Por lo tanto la solución  $u$  se escribe como

$$u(x, t) = \begin{cases} G(x + c_r t) + RG(c_r t - x), & x > 0, \\ TG\left(\frac{c_r}{c_l}(x + c_l t)\right), & x \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Con  $R = (c_l - c_r)/(c_l + c_r)$  y  $T = 2c_l/(c_l + c_r)$ .

Para la animación consideramos  $c_l = 1, c_r = 3$  y

$$G(x) = \frac{(x - 5)(x - 6)e^{-(x-5)^2}}{0.7635}.$$

La Fig. 4 muestra la solución para  $t = 0, 1, 2, 3$ . Inicialmente una onda que se mueve a la izquierda, al alcanzar el punto  $x = 0$ , se divide en una onda transmitida (hacia la izquierda) y una onda reflejada (hacia la derecha). Este ejemplo permite mostrar el fenómeno de transmisión de ondas de un medio a otro.

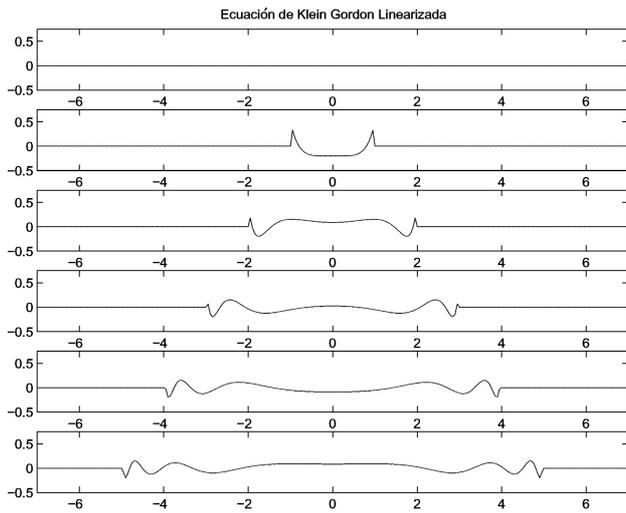


FIGURA 5. Pie de figura.

### 3.5. Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la ecuación de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2u = 0, \quad m \text{ constant.} \quad (16)$$

Definamos el cambio de variables

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x,$$

y consideremos

$$U(\xi, \eta) = u(x, t).$$

Si  $u$  satisface (16), entonces  $U(\xi, \eta)$  satisface

$$U_{\xi\eta} + \frac{m^2}{4}U = 0. \quad (17)$$

Esta ecuación es invariante bajo la transformación  $\xi \rightarrow \alpha\xi$ ,  $\eta \rightarrow \alpha^{-1}\eta$  (método de escalamiento), así proponemos una solución de la forma

$$U(\xi, \eta) = f(z), \quad z = \xi\eta,$$

teniendo así que  $f(z)$  satisface

$$zf''(z) + f'(z) + \frac{m^2}{4}f = 0$$

y tomando  $s = m\sqrt{z}$  obtenemos la ecuación de Bessel de orden cero:

$$sf'' + f' + sf = 0.$$

$J_0(s)$  es una solución regular para  $s = 0$ . Así, proponemos la solución

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}J_0(m(\sqrt{t^2 - x^2})), & x^2 < t^2, \\ 0, & x^2 > t^2. \end{cases} \quad (18)$$

Para la animación consideramos  $m = 4$ . La Fig. 5 muestra la solución para  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Esta solución se comporta de manera similar a la ecuación de ondas: dos ondas se propagan en direcciones opuestas; sin embargo se tiene el efecto de fuente en el punto  $x = 0$ , donde se generan ondas que se propagan a la derecha y a la izquierda.

### 3.6. Korteweg de Vries

Consideremos la ecuación no lineal

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (19)$$

Buscamos soluciones de la forma  $u(x, t) = v(x - \sigma t) = v(s)$  (onda viajera [1]). Al substituir en (19) obtenemos

$$\begin{aligned} -\sigma v' + 6vv' + v''' &= 0, \\ -\sigma v + 3v^2 + v'' &= c_1, \\ -\frac{\sigma v^2}{2} + v^3 + \frac{v'^2}{2} &= c_1v + c_2. \end{aligned}$$

Si requerimos que  $v, v', v'' \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 0$ . Resolviendo para  $v'$  en la última expresión obtenemos

$$v' = \pm v\sqrt{\sigma - 2v},$$

tomando el signo menos e integrando obtenemos

$$s = - \int_0^{v(s)} \frac{dz}{z\sqrt{\sigma - 2z}} + c. \quad (20)$$

Considerando el cambio de variable  $z = (\sigma/2)\text{sech}^2(\theta)$  tenemos que  $dz/d\theta = -\sigma\text{sech}^2(\theta)\tanh(\theta)$  y después de integrar (20) obtenemos

$$s = \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\theta + c, \quad \frac{\sigma}{2}\text{sech}^2(\theta) = v(s).$$

combinando estas expresiones tenemos que

$$v(s) = \frac{\sigma}{2}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s - c)\right),$$

y así finalmente tenemos que la solución  $u(x, t)$  tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{2}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c)\right).$$

La expresión anterior de la solución nos dice qué ondas viajeras con velocidad de propagación  $\sigma$  tienen amplitud proporcional a  $\sigma$ . Ondas de mayor amplitud viajan con mayor velocidad. En la animación se consideran dos ondas con velocidades de propagación  $\sigma_1 = 5$  y  $\sigma_2 = 2$ , la primera centrada en  $x = 0$  y la segunda en  $x = 5$ . La Fig. 6 muestra la solución para  $t = 0, 1, 2, 3, 4$ . Notamos que la onda de mayor amplitud (y mayor velocidad) alcanza y cruza a la de menor amplitud.

Las gráficas de las animaciones de esta sección fueron obtenidos modificando la función  $u(x, t)$ , los vectores espacio y tiempo  $x, t$  del código Matlab dado en la Sec. 2.1.

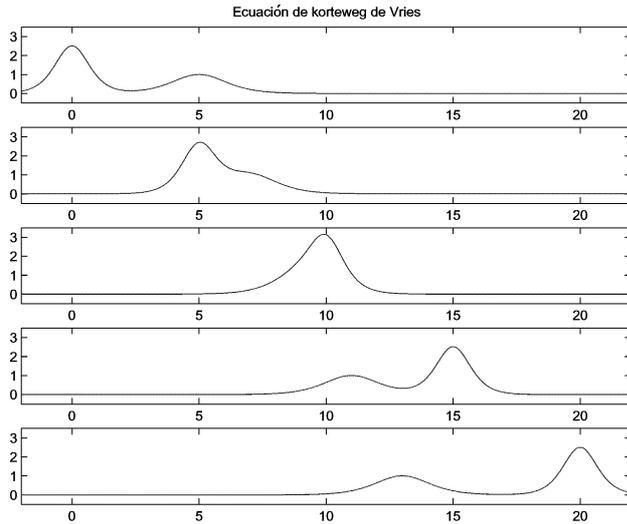


FIGURA 6.

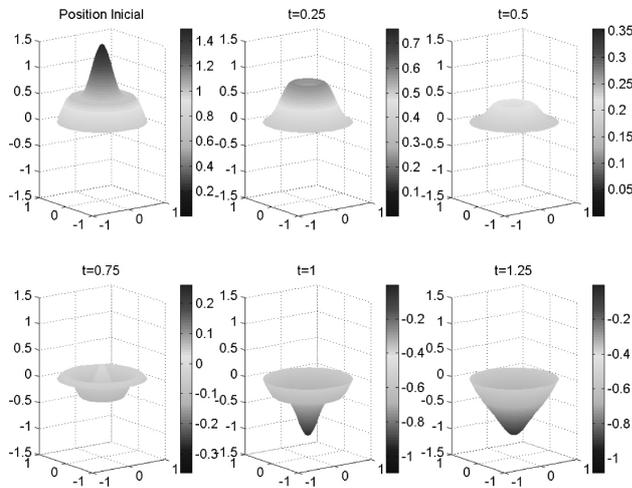


FIGURA 7.

## 4. Ejemplos en dos y tres dimensiones

### 4.1. La ecuación de ondas en coordenadas polares: vibración de una membrana circular

Considere el problema de valor inicial con valores en la frontera:

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \right), \quad (21)$$

$$u(1, \theta, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (22)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta). \quad (23)$$

Usaremos nuevamente el método de *separación de variables* [4].

Supongamos que  $u$  tiene la forma

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t),$$

substituyendo esta expresión en 21 tenemos

$$R\Theta T'' = c^2 \left( R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta''T \right), \quad (24)$$

es decir,

$$\frac{T''}{c^2 T} = \left( \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \right) = -\lambda^2. \quad (25)$$

Para separar  $R$  y  $\Theta$  consideramos:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda^2 r^2 = 0, \quad (26)$$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2. \quad (27)$$

De las Ecs. (25) y (27) obtenemos

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0, \\ \Theta'' + n^2 \Theta = 0, \\ T'' + c^2 \lambda^2 T = 0, \end{cases} \quad (28)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\begin{cases} R(r) = a_1 Y_n(\lambda r) + a_2 J_n(\lambda r), \\ \Theta(\theta) = b_1 \cos(n\theta) + b_2 \sin(n\theta), \\ T(t) = c_1 \cos(\lambda ct) + c_2 \sin(\lambda ct). \end{cases} \quad (29)$$

Las condiciones iniciales (22) nos dan que

$$\begin{aligned} R(0) < \infty &\Rightarrow a_1 = 0 \quad \wedge \quad R(1) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = k_{nm} \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Así, por superposición,  $u$  está dada por

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}r) \cos(n\theta) \\ &\quad \times [A_{nm} \sin(k_{nm}ct) + B_{nm} \cos(k_{nm}ct)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Consideraremos el caso

$$u(r, \theta, 0) = f(r), \quad u_t(r, \theta, 0) = 0,$$

de esta manera (30) se reduce a

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r) \cos(k_{0m}ct). \quad (31)$$

Por la condición inicial

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r),$$

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(k_{0m})} \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0m}r) dr.$$

Para la animación asumiremos

$$c = 1, \quad u(r, \theta, 0) = J_0(2.4r) + \frac{1}{2}J_0(8.65r),$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0.$$

Por lo tanto la solución  $u$  es

$$u(r, t) = J_0(2.4r) \cos(2.4t) + \frac{1}{2}J_0(8.65r) \cos(8.65t).$$

La Fig. 7 muestra la solución para  $t=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  y  $1.25$ . Notamos que la membrana oscila verticalmente.

### 4.2. La ecuación del calor

Considere el problema de valor inicial con condiciones de frontera:

$$u_t = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{32}$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t > 0, \tag{33}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \tag{34}$$

Este problema de valor inicial modela la variación de la temperatura de una placa cuadrada, cuya frontera se mantiene a temperatura cero. Usando *separación de variables* [5] obtenemos:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} e^{-k(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y), \tag{35}$$

donde

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

$$B_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx dy.$$

Para la animación tomamos

$$k = \frac{1}{8} \quad f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

Así, la solución  $u$  está dada por

$$u(x, y, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

La Fig. 8 muestra la temperatura para  $t=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ . La temperatura toma el valor mínimo  $-1$  y máximo  $1$ . Conforme pasa el tiempo los puntos más fríos (azul) aumentan su temperatura (rojo) y los más calientes disminuyen hasta alcanzar el estado estacionario de temperatura cero.

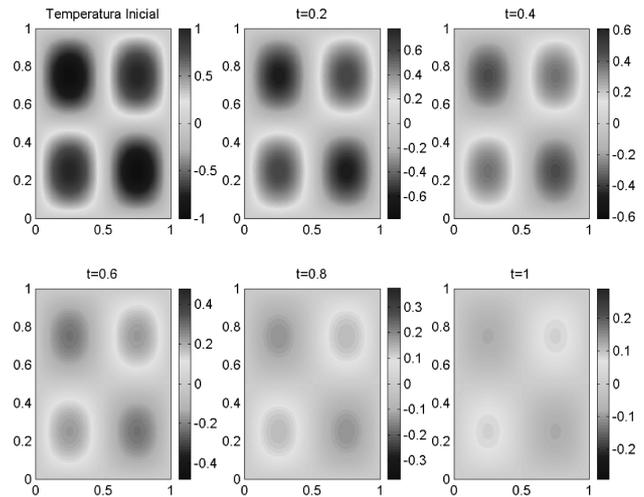


FIGURA 8.

### 4.3. Ecuaciones de Maxwell : dipolo eléctrico

Las ecuaciones de Maxwell en espacio libre en ausencia de cargas están dadas por

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0. \tag{36}$$

En este ejemplo usaremos el método de *potenciales* [9]. Supongamos que el dipolo es pequeño y que la corriente  $I$  es uniforme sobre su longitud. Sea  $dl$  la longitud del dipolo. Consideremos un sistema en coordenadas esféricas. Supongamos que la corriente varía en forma sinusoidal y así el vector potencial está dado por

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J(r) \frac{e^{-j\beta r}}{r} dv.$$

Supongamos además que la corriente está encerrada en un cable cuya sección transversal  $ds$  es pequeña. Así,  $Jdv = Jdsdl = Idl\hat{z}$  para un dipolo localizado en el origen y orientado en la dirección del eje  $\hat{z}$ , el vector potencial se reduce a

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \hat{z},$$

donde  $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ .

El vector  $A$  en coordenadas esféricas está dado por

$$A = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cos(\theta)\hat{r} - \frac{\mu_0 Idl}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin(\theta)\hat{\theta}.$$

Los vectores de fase magnético y eléctrico están dados por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathcal{H},$$

Los vectores magnético y eléctrico se obtienen como

$$\vec{H} = Re\{e^{j\omega t}\mathcal{H}\}, \quad \vec{E} = Re\{e^{j\omega t}\mathcal{E}\},$$

$$\vec{H} = \frac{Idl}{4\pi} \left[ \frac{\cos(\omega t - \beta r)}{r^2} - \frac{\beta \sin(\omega t - \beta r)}{r} \right] \sin(\theta)\hat{\phi},$$

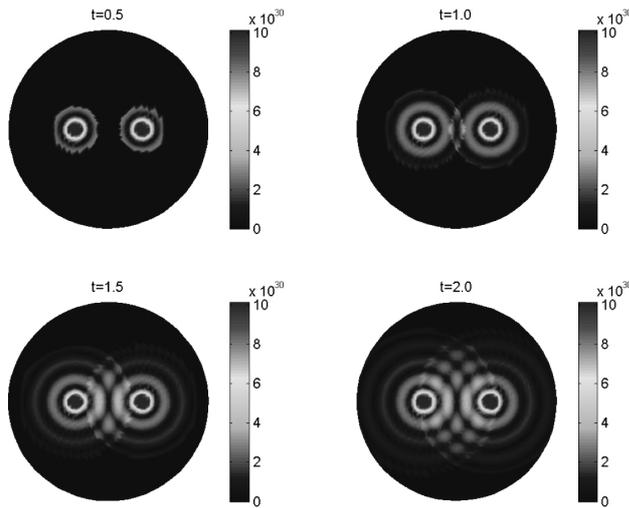


FIGURA 9.

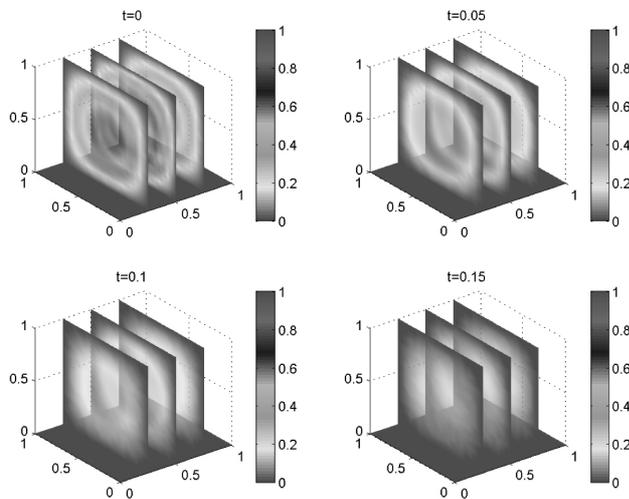


FIGURA 10.

$$\vec{E} = \frac{Idl}{2\pi\epsilon_0\omega} \left[ \frac{\beta \cos(\omega t - \beta r)}{r^2} + \frac{\sin(\omega t - \beta r)}{r^3} \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{Idl}{4\pi\epsilon_0\omega} \left[ -\frac{\beta \sin(\omega t - \beta r)}{r} + \frac{\beta \cos(\omega t - \beta r)}{r^2} + \frac{\sin(\omega t - \beta r)}{r^3} \right] \sin(\theta)\hat{\theta}$$

Para la animación consideramos  $Idl = 4\pi$ ,  $\beta = \omega = 2\pi$ ,  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  y por simetría usamos la proyección sobre el eje  $xy$ . La Fig. 9 muestra la superposición de dos dipolos para  $t=0.5, 1.0, 1.5$ , y  $2.0$ , donde se ha graficado la intensidad del campo magnético. Observamos cómo se generan las ondas electromagnéticas esféricas propagándose hacia afuera y se superponen de manera similar a las ondas en el agua. Por simetría se graficó un corte por un plano, pero en realidad éste es un ejemplo de una solución exacta de las ecuaciones de Maxwell en 3 dimensiones [10].

#### 4.4. Una solución de la ecuación del calor en 3 dimensiones

Consideremos el problema de valor en la frontera con condiciones iniciales

$$U_t = \nu(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) \quad \text{en } \Omega,$$

$$U(x, y, z, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad U(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \quad (37)$$

donde asumiremos que  $\Omega=[0, 1]^3$ . Usando separación de variables de manera similar al ejemplo bidimensional, y suponiendo que la condición inicial es  $g(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$ , concluimos que

$$U(x, y, z, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$$

es la solución de (37) con  $\nu = 1/3$ . La Fig. 10 muestra la temperatura a tiempos:  $t=0, 0.5, 0.1$  y  $1.5$ . Conforme el tiempo avanza el cubo se enfría hasta alcanzar el estado estacionario de temperatura cero. Para la visualización se usaron cortes con 3 planos.

Los gráficos de las Secs. 4.1, 4.2 y 4.3 fueron obtenidos con códigos Matlab muy similares al código bidimensional dado en la Sec. 2.2, mientras que el ejemplo tridimensional de la Sec. 4.4 fue obtenido con el código Matlab de la Sec. 2.3.

### 5. Conclusiones

En este trabajo se han presentado animaciones en Matlab de soluciones exactas de edps de la forma  $u(x, t_k)$  con  $x \in \mathcal{R}^n, t_k \in \mathcal{R}^{>0}$ . Se ha seleccionado un conjunto de las ecuaciones más representativas de la física matemática. Estas animaciones pueden utilizarse para explicar fenómenos físicos como superposición de ondas, transmisión de ondas de un medio a otro, etc; así como para despertar el interés de los estudiantes y encaminarlos en el área de las edps y sus aplicaciones. Se han incluido códigos en Matlab y Maple para crear animaciones en 1, 2 y 3 dimensiones, así como brevemente se describen algunas de las técnicas de solución de las edps: escalamiento, cambio de variables, método de características, separación de variables, etc.

La mayoría de las veces las edps halladas en las aplicaciones no tiene soluciones analíticas, en cuyo caso se tienen que emplear métodos numéricos de aproximación. Contar con algunas soluciones exactas nos permite verificar la veracidad de los métodos numéricos ([10]). Por otra parte, el uso de animaciones de ecuaciones puede ser útil en el modelado: modificando determinados parámetros en las ecuaciones o en sus soluciones pueden ajustarse las animaciones a una mejor representación de un fenómeno físico, obteniendo de esta manera modelos matemáticos que describan con mayor exactitud un fenómeno.

### Agradecimientos

Trabajo realizado con apoyo de proyecto Promep 103.5/05/1955.

1. L.C. Evans, *Partial Differential Equations* (Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1998).
2. J.D. Logan, *Applied Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1998).
3. J. Cooper, *Introduction to Partial Differential Equations with Matlab* (Birkhäuser, 1998).
4. S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (Dover, 1993).
5. P. Duchateau and D.W. Zachmann, *Partial Differential Equations* (Schaum's Outline series, McGraw-Hill, 1986).
6. I.P. Stavroulakis and S.A. Tersian, *Partial Differential Equations: An Introduction with Mathematica and Maple* (World Scientific Publishing Company, 2004).
7. L. Elden, L. Wittmeyer-Koch, and H.B. Nielsen, *Introduction to Numerical Computation - Analysis and MATLAB Illustrations* (Studentlitteratur, 2004).
8. M.L. Abell and J.P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica* (Elsevier Science & Technology Books, 2004).
9. D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, 1999).
10. G. Ortigoza, *The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for Maxwell equations*, Ph. D. thesis, 2003.
11. K.A. Lonngren and Sava Savov *Fundamentals of Electromagnetics with MATLAB* (SciTech Publishing, Incorporated, 2005).
12. F. Wang, *Physics with MAPLE: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics* (Wiley, John and Sons Incorporated, 2006).
13. Gerd Baumann, *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and Nonlinear Dynamics* (Springer-Verlag New York, 2005).
14. Maple 10 *user manual*, maplesoft, 2005.
15. J. Putz, *Maple Animation* (CRC Press, May 2003).
16. D. Hanselman and B. Littlefield, *Mastering Matlab 7*, (Pearson/Prentice Hall, 2005).