La relación entre las derivadas con respecto al tiempo de integrales de volumen, de superficie y de línea y la derivada material

G. Ares de Parga, E.M. Pereyra y F. Gutiérrez-Mejía
Dpto. de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico nacional, U.P. Adolfo López Mateos, Zacatenco, 07738, México D.F., México.

Recibido el 31 de julio de 2006; aceptado el 10 de octubre de 2006

Sin recurrir al formalismo matemático de formas diferenciales y derivadas de Lie, se calculan por medio del análisis vectorial las derivadas con respecto al tiempo de integrales de volumen, de superficie y de línea. El concepto de derivada material se generaliza con las distintas integrales utilizadas.

Descriptores: Derivadas de integrales paramétricas; derivada material; ley de Faraday.

Without using the mathematical formalism of differential forms and Lie derivatives, the derivatives with respect to the time of volume, surface and line integrals are calculated by using vectorial analysis.

Keywords: Derivatives of parametric integrals; material derivatives; Faraday's law.

PACS: 03.50.De

1. Introducción

Es muy frecuente en física de fluidos [1, 2] o en electromagnetismo [3, 4] tener que realizar derivadas con respecto a un parámetro, que normalmente es el tiempo, de integrales de volumen, de superficie y de línea. En efecto, el cálculo de la variación de la masa o de la carga en un volumen dado es común al igual que el cambio con respecto al tiempo de un flujo magnético o la variación temporal de una fuerza electromotriz. Todos estos casos implican conocer la derivada con respecto al tiempo de una integral de volumen, de superficie o de línea. El confundir estas derivadas con la derivada material puede llevar a errores importantes. Más aún, como normalmente el cálculo de tales derivadas se realiza en forma intuitiva [3, 4], se presta a confusiones. Sin embargo, en la literatura sólo se encuentran cálculos de tales derivadas, conocidas como paramétricas, restringidos a situaciones especiales[5] o en general se recurre a métodos matemáticos fuera del alcance de estudiantes de los primeros años de la carrera como por ejemplo las deducciones de Frankel [6] que utiliza derivadas de Lie y formas diferenciales. El objetivo de este artículo es, en primer lugar, calcular tales derivadas utilizando un formalismo matemático sencillo pero rigoroso, a saber, el análisis vectorial [7]. En segundo lugar, utilizando el formalismo anterior, se define un operador material para cada una de las distintas derivadas de integrales que permite visualizar en general el problema y explicar los resultados utilizados en ciertas aplicaciones[9-11]. En la Sec. 2 de este artículo reproduciremos algunos de los cálculos realizados en forma poco rigurosa o intuitiva. Utilizando el análisis vectorial, en la Sec. 3 demostraremos los cálculos realizados en la segunda sección de una manera formal. Además se sentarán las bases para poder realizar con la misma técnica cualquier otro tipo de derivada de una integral. La Sec. 4 se dedicará a exponer una serie de resultados, ya conocidos, que podrían obtenerse utilizando el formalismo anterior y se generalizará el concepto de derivada material a operador material de una derivada de una integral. En la conclusión se citarán algunas aplicaciones obtenidas que aparecen en la literatura a partir de los resultados obtenidos.

2. Cálculos de derivadas con respecto al tiempo de integrales de manera no formal

Cuando uno quiere conocer el cambio con respecto al tiempo de la masa o de la carga contenida en un volumen que se mueve o se deforma es muy común utilizar el concepto de derivada material [1, 3]. Sin embargo, al aplicarlo en forma directa puede cometerse un error grave. Para entender esta posible equivocación, vale la pena revisar el cálculo de una de estas derivadas con respecto al tiempo de una integral. Por ejemplo, calculemos la razón de cambio de la masa o la carga contenida en un volumen. Si la masa o la carga en el volumen V se representa por A y la densidad volumétrica de masa o carga por $\rho(\overrightarrow{r},t)$, tenemos que

$$A = \int\limits_{V(t)} \rho(\overrightarrow{r},t)dV. \tag{1}$$

Si nuestro volumen se deforma o se mueve, es posible que pierda o gane masa o carga, es decir, A dependerá del tiempo no sólo debido a la dependencia temporal de ρ sino también por la deformación o movimiento del volumen. Por lo tanto podremos calcular la razón de variación de A con respecto al tiempo y la expresaremos como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int\limits_{V(t)} \rho dV\right]. \tag{2}$$

Para poder entender cómo actúa la derivada con respecto al tiempo en la integral debemos recurrir a las verdaderas definiciones de derivada e integral, es decir,

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}\right]; \tag{3}$$

y ahora incorporemos la integral

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\lim_{\Delta V_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)}\rho(\overrightarrow{r}_i,t+\Delta t)\Delta V_i\right] - \lim_{\Delta V_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t)}\rho(\overrightarrow{r}_i,t)\Delta V_i\right]\right], \tag{4}$$

donde $n(t)$ representa el número de divisiones que se consideran del volumen al tiempo t. Es claro que no existe dependencia temporal en la $\overrightarrow{r}$, pues aunque en realidad se tenga un fluido en movimiento para efectos de la integral la densidad $\rho(\overrightarrow{r},t)$ sólo lleva la dependencia temporal en la entrada del tiempo. Si restamos y sumamos al término de la derecha de la Ec. (4) la cantidad

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\lim_{\Delta V_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t)}\rho(\overrightarrow{r}_i,t+\Delta t)\Delta V_i\right].$$

la Ec. (4) queda igual a

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\lim_{\Delta V_i\to 0}\times\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)-n(t)}\rho(\overrightarrow{r}_i,t+\Delta t)\Delta V_i\right]\right] + \lim_{\Delta t\to 0}\lim_{\Delta V(t)\to 0}\sum_{i=1}^{n(t)}\frac{(\rho(\overrightarrow{r}_i,t+\Delta t)-\rho(\overrightarrow{r}_i,t))}{\Delta t}\Delta V_i. \tag{5}$$

Cabe hacer notar que hemos logrado separar la expresión en dos términos: el primero sólo considera la sumatoria de los términos que aparecen en el volumen al tiempo $t+\Delta t$ y no al tiempo t; el segundo que corresponde a la integral de la parcial con respecto al tiempo de la densidad ρ al tiempo t. Obviamente hemos supuesto funciones suaves que nos permitieron y nos permitirán permutar las sumatorias. Se tiene entonces que

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\lim_{\Delta V_i\to 0}\times\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)-n(t)}\rho(\overrightarrow{r}_i,t+\Delta t)\Delta V_i\right]\right] + \lim_{\Delta V(t)\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t)}\frac{(\partial\rho(\overrightarrow{r}_i,t))}{\partial t}\Delta V_i\right], \tag{6}$$

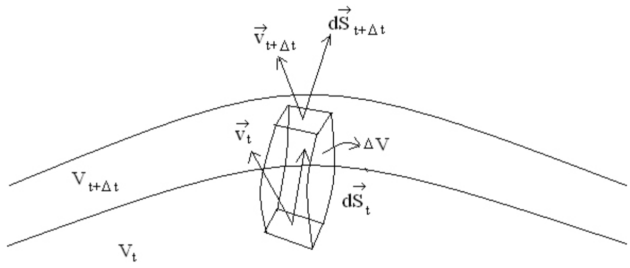

FIGURA 1. Volumen en movimiento o deformándose.

lo cual nos lleva a

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\Delta V}\rho(\overrightarrow{r},t)dV\right] + \left[\int_{V(t)}\frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}dV\right]. \tag{7}$$

Analicemos la primera integral del miembro derecho de la Ec. (7).

$$dV = d\overrightarrow{S}.\overrightarrow{v}\Delta t, \tag{8}$$

donde $\overrightarrow{v}$ representa la velocidad de cada diferencial de superficie del volumen (ver Fig. 1). Claro está que esto no es muy formal, pues no está muy bien definido. Sin embargo para efectos de una primera aproximación es suficiente. De este modo el primer término de la Ec. (7), se puede expresar como

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\Delta V}\rho(\overrightarrow{r},t)dV\right] = \int_{S(t)}\rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{S}, \tag{9}$$

y consecuentemente, utilizando el teorema de Gauss, llegamos a

$$\frac{d}{dt}A = \left[\int_{V(t)}\nabla\cdot(\rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{v})dV\right] + \left[\int_{v(t)}\frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}dV\right]. \tag{10}$$

Este resultado es conocido[5,6]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es mal interpretado, pues se entiende que la velocidad $\overrightarrow{v}$ en la integral corresponde al flujo de las partículas y en realidad solamente tiene que ver con el movimiento del volumen. Es decir, si la ρ representa a una densidad de masa o carga en movimiento y se cálcula la derivada con respecto a un volumen fijo, es decir $\overrightarrow{v}=0$, se tendrá

$$\frac{d}{dt}A = \int_{V=cte}\frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}dV, \tag{11}$$

independientemente si existe un flujo. De hecho, si consideramos un fluido en movimiento con velocidad $\overrightarrow{u}$ y calculamos $(d/dt)A$ para un volumen fijo, la Ec. (11) nos indicará el cambio de masa en ese volumen. Sin embargo, si consideramos que el volumen se mueve con el fluido, es decir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, tendremos que

$$\frac{d}{dt}A = \left[\int\limits_{V(t)} \nabla.(\rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{u})dV\right] + \left[\int\limits_{V(t)} \frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}dV\right], \quad (12)$$

siendo $\overrightarrow{u}$ la velocidad en cada punto del fluido. Por otro lado,

$$\nabla.(\rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}.\nabla)\rho + \rho\nabla.\overrightarrow{u}, \quad (13)$$

y si el fluido es incompresible, es decir, $\nabla.\overrightarrow{u} = 0$, la Ec. (13) se simplifica de tal suerte que la Ec. (12) se reduce a

$$\frac{d}{dt}A = \left[\int\limits_{V(t)} \frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}dV\right] + \left[\int\limits_{V(t)} (\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\rho(\overrightarrow{r},t)dV\right]. \quad (14)$$

Ahora bien, la derivada material se define como

$$\frac{D}{dt}F = \frac{\partial}{\partial t}F + (\overrightarrow{u}\cdot\nabla)F. \quad (15)$$

Esta última expresión calcula la razón de cambio con respecto al tiempo de una función $F = F(\overrightarrow{r},t)$ que se evalúa a lo largo de una trayectoria dada [1]. Sin embargo, uno podría pensar que se aplica directamente en la evaluación de $(d/dt)A$, pues de manera formal equivale solamente a introducir el operador $\partial/\partial t + (\overrightarrow{u}\cdot\nabla)$ en la integral. Pero esto sólo es válido cuando el movimiento del fluido coincide con el del volumen, o sea cuando $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ y cuando el fluido sea incompresible, es decir, $\nabla\cdot\overrightarrow{u} = 0$. Esto último es utilizado para expresar la conservación de la masa o de la carga pero hay que recordar que se están suponiendo las dos condiciones antes señaladas. En general la expression correcta está representada por la Ec. (10) [6] y utilizar la derivada material no tiene ningún sentido, pues no siempre el fluido es incompresible ni el volumen considerado se mueve o deforma a la par del fluido.

En el mismo orden de ideas, calculemos la derivada con respecto al tiempo de un flujo considerando que la superficie se mueve o deforma. Esto último se utiliza en la aplicación de la ley de Faraday [3]. Debemos hacer notar que esta demostración se basará, al igual que la anterior, en argumentos geométricos en forma un poco intuitiva y no muy rigurosa como la utilización de la Ec. (8). Sea una superficie abierta S cuya frontera es un circuito C. Se supone que tanto la superficie S como el contorno C se mueven y deforman, o sea, que $S = S(t)$ y $C = C(t)$. El flujo debido a un campo $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)$ a través de la superficie se define por

$$\Phi = \int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t).d\overrightarrow{S}. \quad (16)$$

Calculemos la razón de cambio del flujo Φ con respecto al tiempo. Es decir:,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}. \quad (17)$$

Utilizando la definición de derivada, tenemos

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle}{\triangle\, t}\int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\triangle\, t} \times \left[\int\limits_{S(t+\Delta t)} \overrightarrow{B}_{t+\Delta t}\cdot d\overrightarrow{S}_{t+\Delta t} - \int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}_{t}\cdot d\overrightarrow{S}_{t}\right], \quad (18)$$

donde los subíndices $t + \Delta t$ y t se refieren al tiempo de evaluación de los campos y a la posición de la superficie. Utilicemos primero la astucia de aplicar el teorema de Gauss a un tiempo t al volumen V encerrado por S_t, $S_{t+\Delta t}$ y la superficie barrida por el contorno debido al movimiento de la superficie del tiempo t al tiempo $t + \Delta t$ (ver Fig. 2):

$$\int\limits_{V} \nabla\cdot\overrightarrow{B}dV \simeq \left[\int\limits_{S(t+\Delta t)} \overrightarrow{B}_{t}\cdot d\overrightarrow{S}_{t+\Delta t} - \int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}_{t}\cdot d\overrightarrow{S}_{t}\right] - \oint\limits_{C(t)} \overrightarrow{B}_{t}\cdot\left[\overrightarrow{v}dt\times d\overrightarrow{l}\right], \quad (19)$$

donde $\overrightarrow{v}$ representa la velocidad de cada elemento de la superficie o del contorno y además se ha aproximado $-\overrightarrow{v}dt\times d\overrightarrow{l}$ como la diferencial de superficie barrida por el contorno de la superficie del tiempo t al tiempo $t + \Delta t$ [4]. Es decir que el último término que pretende representar el cambio de flujo a través de la superficie generada por el contorno debido al movimiento de la superficie S no está debidamente expresado. Sin embargo, como ya indicamos anteriormente, esta demostración consiste en utilizar este tipo de argumentos geométricos no muy formales. Por otro lado debemos notar que el flujo a través de las superficies S_t y $S_{t+\Delta t}$ se considera al tiempo t puesto que el teorema de Gauss sólo es válido para valores simultáneos del campo magnético $\overrightarrow{B}$. El valor de $\overrightarrow{B}$ en $S_{t+\Delta t}$ al tiempo $t + dt$ puede ser evaluado utilizando el teorema de Taylor. O sea,

$$\overrightarrow{B}_{t+dt} = \overrightarrow{B}_{t} + \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}dt + ... \quad (20)$$

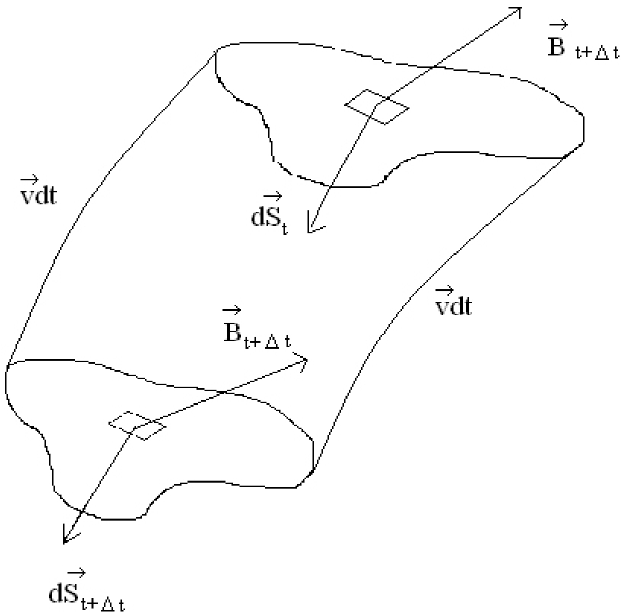

FIGURA 2. Superficie en movimiento o deformándose.

Sustituyendo las Ecs. (19) y (20) en la Ec. (18) y tomando el límite $\Delta t \to 0$ llegamos a

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{B}\cdot d\vec{S} \simeq \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_{C(t)} \vec{B}\times\vec{v}\cdot d\vec{l} + \lim_{\Delta t\to 0}\int_{V(t)} \frac{\nabla\cdot\vec{B}dV}{\Delta t}. \tag{21}$$

Aplicando el teorema de Stokes y el hecho de que aproximemos

$$dV \simeq \vec{v}\cdot d\vec{S}\Delta t, \tag{22}$$

obtenemos la relación deseada

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{B}\times\vec{v}) + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{v}\right]\cdot d\vec{S}, \tag{23}$$

Aunque el resultado se obtuvo en forma aproximada, se puede demostrar que es exacto [6] y por ello usamos el símbolo de igualdad en vez del de aproximación. Debemos hacer notar que en este caso uno no podría utilizar el concepto de derivada material de una función vectorial. En efecto, la derivada material de una función vectorial se define como

$$\frac{D}{dt}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{B}, \tag{24}$$

y significa el cambio con respecto al tiempo de un campo vectorial a través de una trayectoria dada cuya velocidad es $\vec{u}$. Sin embargo, aunque es evidente que sustituyendo el operador $\partial/\partial t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ en la Ec. (17) no obtendremos la Ec. (23), existe una situación particular que lo permite. En efecto supongamos primero que $\vec{u} = \vec{v}$, es decir, que la velocidad de cada trayectoria coincida con la velocidad de cada punto perteneciente a la superficie. En segundo lugar consideremos un campo $\vec{B}$ tal que su divergencia se anule, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, como es el caso del campo magnético. Luego, entonces

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\vec{B} &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{B}\\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\nabla\times\vec{B}\times\vec{v}) + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{v}\\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\nabla\times\vec{B}\times\vec{v}).\end{aligned} \tag{25}$$

Esto significa que el operador $\partial/\partial t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ se transforma en este caso en $\partial/\partial t - (\vec{v}\times\nabla)\times$ y para este caso en que $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, el sustituir al operador en la Ec. (17) coincidirá con el resultado de la Ec. (23). Esto último de nuevo pone en evidencia la tendencia a tratar de resolver el cálculo de una derivada de un flujo con respecto al tiempo por medio de la derivada material. Sin embargo el resultado general está representado por medio de la Ec. (23). En la siguiente sección utilizaremos el análisis vectorial para desarrollar una técnica formal y rigorosa que nos permita calcular este tipo de derivadas y que al mismo tiempo nos lleve a definir un operador material, en la Sec. 4, para cada caso.

3. Cálculo formal

Como hemos señalado en la Sec. 2, los cálculos anteriores se han realizado de manera poco formal confundiendo los incrementos y las diferenciales de manera intuitiva. En la mayoría de los libros de física [3, 4] se utilizan técnicas aún más intuitivas con el fin de no ahondar en el desarrollo matemático. Sin embargo, hemos hecho notar que por no realizar una demostración formal se pueden cometer ciertos errores como el confundir el papel que juega la derivada material. Desarrollemos ahora una técnica utilizando el análisis vectorial [7] que nos permitirá asegurar que los resultados antes obtenidos son exactos y que además sentará las bases para calcular la derivada con respecto a un parámetro de cualquier integral.

Habiendo hecho estas acotaciones, calculemos ahora la misma integral de la Ec. (2) considerando que el volumen se mueve o deforma independientemente del flujo. La técnica consiste primero en describir el volumen por medio de un cambio de coordenadas, es decir,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, w, t), \tag{26}$$

donde u, v y w son coordenadas que generan a cada instante un punto del volumen considerado $V(t)$ (ver Fig.3). El tiempo t queda como un parámetro y ahora debido al cambio de coordenadas $\vec{r}$ si depende del tiempo. Definamos ahora un conjunto de vectores $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$, $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ y $\hat{e}_w$ y las cantidades h_u, h_v y h_w que nos serán útiles.

$$\vec{r}_u(u,v,w,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \qquad \vec{r}_v(u,v,w,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$
$$\vec{r}_w(u,v,w,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}, \qquad h_u(u,v,w,t) = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|,$$

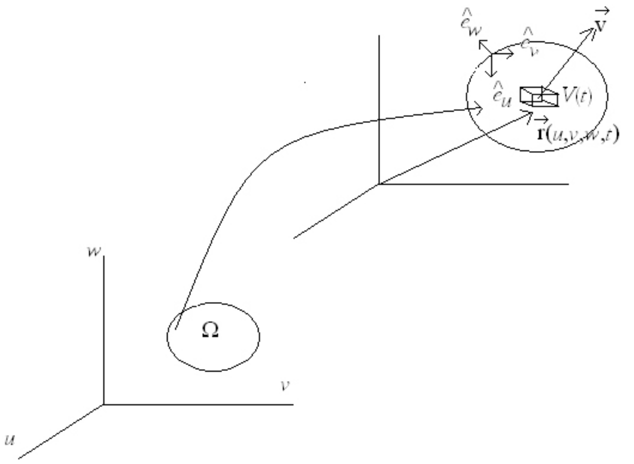

FIGURA 3. Volumen parametrizado.

$$
\begin{aligned}
h_v(u,v,w,t) &= \left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\right|, \quad h_w(u,v,w,t) = \left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}\right|, \\
\widehat{e}_u(u,v,w,t) &= \frac{\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}}{h_u}, \qquad \widehat{e}_v(u,v,w,t) = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}}{h_v}, \\
\widehat{e}_w(u,v,w,t) &= \frac{\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}}{h_w}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

donde hemos recalcado la dependencia de todas las cantidades en u, v, w y t. Supongamos además que el sistema formado por los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ forman una base ortonormal.

Una vez definidas estas cantidades podemos ver que

$$
\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho dV \tag{28}
$$

podrá escribirse como

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}A \\
&= \frac{d}{dt}\int\int\int\limits_{\Omega} \rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| dudvdw,
\end{aligned} \tag{29}
$$

donde

$$
\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| = \Lambda(u,v,w,t)
$$

representa al jacobiano y depende del tiempo, pero Ω que es el volumen generado por u, v y w tal que $\Omega \to V$ a cada instante, no depende del tiempo (ver Fig.3), pues recordemos que u, v y w son independientes del tiempo. Es decir, se parametrizó de tal forma que el parámetro, en este caso el tiempo, sólo se exhibe en los términos integrados y en los límites de integración y no en las diferenciales. Por lo tanto se llega a

$$
\frac{d}{dt}A = \int\int\int\limits_{\Omega} \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\left[\rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\right]\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| \\ +\left[\rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\right]\frac{d}{dt}\left[\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right|\right] \end{array} \right] dudvdw. \tag{30}
$$

Simplificando, tenemos

$$
\frac{d}{dt}A = \int\limits_{\Omega}\left[\frac{d}{dt}\left[\rho\right]\Lambda + \rho\frac{d}{dt}\Lambda\right] d\Omega, \tag{31}
$$

donde $d\Omega = dudvdw$. Cabe hacer notar que la dependencia temporal de la densidad ρ es especial. En efecto, ρ depende del tiempo en forma explícita e implícita, por lo que

$$
\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r},t) + (\overrightarrow{v}.\nabla)\rho(\overrightarrow{r},t). \tag{32}
$$

Realizando las derivadas, llegamos a

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}A \\
&= \int\limits_{\Omega}\left[\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r},t) + \Lambda(\overrightarrow{v}.\nabla)\rho(\overrightarrow{r},t) + \rho\frac{d}{dt}\Lambda\right] d\Omega.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Utilizando las definiciones expresadas en la Ec. (27), es fácil ver que Λ:

$$
\Lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w\right] = h_u h_v h_w, \tag{34}
$$

donde la última identidad sólo es válida para coordenadas ortogonales como ya hemos supuesto anteriormente. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda = &\left[\overrightarrow{r}_{ut}, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w\right] + \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_{vt}, \overrightarrow{r}_w\right] \\
&+ \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_{wt}\right],
\end{aligned} \tag{35}
$$

donde se ha utilizado la abrevación

$$
\frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial a \partial b} = \overrightarrow{r}_{ab}.
$$

Llegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda = &\left[\overrightarrow{v}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w\right] + \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{v}_v, \overrightarrow{r}_w\right] \\
&+ \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{v}_w\right],
\end{aligned} \tag{36}
$$

donde

$$
\overrightarrow{v}_b = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial b \partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial b}
$$

y que no debe confundirse con la proyección de la velocidad

$$\overrightarrow{v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t}$$

en la dirección de $\widehat{e}_b$. Por otro lado, utilizando las identidades vectoriales para coordenadas ortonormales [7] descritas también por la Ec. (27), llegamos a

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{v}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w] &= [\overrightarrow{v}_u, \widehat{e}_v, \widehat{e}_w]\, h_v h_w \\ &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} \cdot \widehat{e}_u h_u h_v h_w. \end{aligned} \tag{37}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Lambda = \Bigg[&\frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} \cdot \widehat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} \cdot \widehat{e}_v \\ &+ \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \cdot \widehat{e}_w\Bigg] h_u h_v h_w. \end{aligned} \tag{38}$$

Esto último se puede escribir como

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Lambda \\ &= h_u h_v h_w \left[\widehat{e}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \widehat{e}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} + \widehat{e}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right] \cdot \overrightarrow{v} \\ &= h_u h_v h_w \nabla \cdot \overrightarrow{v}. \end{aligned} \tag{39}$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_{\Omega} \rho \frac{d}{dt}\Lambda d\Omega = \int\limits_{\Omega} \rho(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\Lambda d\Omega, \tag{40}$$

donde hay que resaltar que la $\overrightarrow{v}$ corresponde a la velocidad de cada uno de los elementos del volumen. Aplicando este resultado a la Ec. (33), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A = \int\limits_{\Omega} \Bigg[&\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r}, t) + \Lambda(\overrightarrow{v}.\nabla)\rho(\overrightarrow{r}, t) \\ &+ \rho\,(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\,\Lambda\Bigg] d\Omega. \end{aligned} \tag{41}$$

Poniendo en factor común Λ y recordando que $\Lambda d\Omega = dV$, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + (\overrightarrow{v}.\nabla)\rho + \rho\,(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\right] dV \\ &= \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v})\right] dV, \end{aligned} \tag{42}$$

que no es más que la Ec. (10) que habíamos obtenido anteriormente. Como conclusión podemos afirmar que las Ecs. (10) y (42) representan la derivada con respecto al tiempo de la integral del volumen que se mueve o deforma y el resultado es exacto.

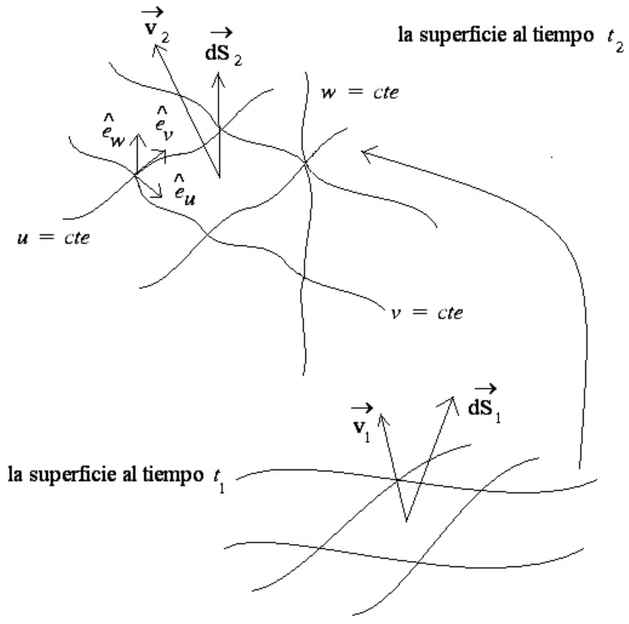

FIGURA 4. Evolución de la superficie.

El método anterior, aunque más largo que los descritos en la Sec. 2, es formal y obtiene el resultado exacto de manera directa sin suponer ninguna aproximación ni ninguna indefinición. Además de utilizar el cambio de coordenadas, el punto fino de este método es que parametriza a la velocidad del elemento de volumen en cada punto y esto es lo que se debe hacer en este tipo de cálculos. Si ahora queremos calcular la derivada de un flujo con respecto al tiempo, Ec. (17), se sigue un camino similar sólo que ahora no debemos parametrizar un volumen sino una superficie abierta en movimiento o deformándose. Para ello, consideraremos las coordenadas u y v que parametricen a la superficie $S(t)$ considerada a cada instante, es decir, el tiempo es un parámetro aparte. Sin embargo siempre podremos completar la parametrización dada con una tercera componente w, de tal forma que u, v y w formen simplemente un cambio de coordenadas y los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ forman una base ortonormal. Es decir, cualquier punto de la superficie se describe por

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v, t). \tag{43}$$

Los vectores $\overrightarrow{r}_u$ y $\overrightarrow{r}_v$ son paralelos a la superficie y $\overrightarrow{r}_w$ es perpendicular a $\overrightarrow{r}_u$ y $\overrightarrow{r}_v$, o sea a la superficie. No se debe confundir a $\overrightarrow{r}_w$ con la velocidad de cada elemento de la superficie $\overrightarrow{v}$ (ver Fig. 4), ni tienen porque ser paralelos estos últimos.

Es claro que a cada instante el elemento de superficie se puede describir por

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v du dv. \tag{44}$$

Por lo que

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} \overrightarrow{B}\left[(u,v,t),t\right]\cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv, \qquad (45)$$

donde Π representa a la superficie descrita por u y v, tal que $\Pi \rightarrow S(t)$ a cada instante. Recordamos en este caso que

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv = (h_u\widehat{e}_u)\times(h_v\widehat{e}_v)dudv$$
$$= h_u h_v \widehat{e}_w dudv. \qquad (46)$$

Por lo tanto, recurriendo al mismo razonamiento utilizado en la Ec. (32) para la derivada que incluye al campo $\overrightarrow{B}$, llegamos a

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v\right)}{\partial t}dudv, \qquad (47)$$

donde se ha utilizado en el segundo término la parcial con respecto al tiempo para enfatizar la dependencia explicita de $\overrightarrow{r}_u$ y $\overrightarrow{r}_v$. Si analizamos el producto cruz que aparece en el segundo término, utilizando la Ec. (46), podremos expresar a la Ec. (47) como

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(h_u h_v\widehat{e}_w\right)}{\partial t}dudv$$
$$=\int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\widehat{e}_w\frac{\partial\left(h_u h_v\right)}{\partial t}dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot h_u h_v\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}dudv. \qquad (48)$$

Continuando con el cálculo, se llega a

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\widehat{e}_w\left(h_u\frac{\partial h_v}{\partial t} + h_v\frac{\partial h_u}{\partial t}\right)dudv$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot h_u h_v\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}dudv. \qquad (49)$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial h_u}{\partial t} = \overrightarrow{v}_u\cdot\widehat{e}_u \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h_v}{\partial t} = \overrightarrow{v}_v\cdot\widehat{e}_v,$$

donde se ha definido a

$$\overrightarrow{v}_u = \frac{\partial^2\overrightarrow{r}}{\partial u\partial t} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{v}_v = \frac{\partial^2\overrightarrow{r}}{\partial v\partial t}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int\limits_{\Pi}B_w\left(h_u\overrightarrow{v}_v\cdot\widehat{e}_v + h_v\overrightarrow{v}_u\cdot\widehat{e}_u\right)dudv$$
$$+\int_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot h_u h_v\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}dudv, \qquad (50)$$

donde $B_w = \overrightarrow{B}\cdot\widehat{e}_w$. Factorizando $h_u h_v dudv$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int\limits_{\Pi}\left[B_w\left(\frac{\overrightarrow{v}_v}{h_v}\cdot\widehat{e}_v + \frac{\overrightarrow{v}_u}{h_u}\cdot\widehat{e}_u\right)\right.$$
$$\left.+\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}\right]h_u h_v dudv. \qquad (51)$$

Considerando que

$$\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v dudv$$
$$= \overrightarrow{B}\cdot\widehat{e}_w h_u h_v dudv = B_w h_u h_v dudv, \qquad (52)$$

llegamos a

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\left(\frac{\overrightarrow{v}_v}{h_v}\widehat{e}_v + \frac{\overrightarrow{v}_u}{h_u}\widehat{e}_u\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v dudv. \qquad (53)$$

Es fácil ver que $\overrightarrow{v}_u = (\partial/\partial u)\overrightarrow{v}$ y lo mismo para la componente v. Por lo que la Ec. (53) se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\left[\left(\frac{\widehat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)\overrightarrow{v}\right]\cdot d\overrightarrow{S}$$
$$+\int_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v dudv. \qquad (54)$$

Al igual que en las Ecs. (38) y (39), podemos identificar el operador ∇ como

$$\nabla = \frac{\widehat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\widehat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}. \tag{55}$$

Sumando y restando en la integral el término

$$\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\cdot\overrightarrow{v}\right],$$

llegamos a

$$\frac{d}{dt}\Phi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S} + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\,(\nabla\cdot\overrightarrow{v})\cdot d\overrightarrow{S} - \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\cdot\overrightarrow{v}\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv. \tag{56}$$

Desarrollemos los dos últimos términos del lado derecho de la Ec. (56), es decir,

$$\begin{aligned} I = &-\int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{v}\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv = -\int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} \\ &\times\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}(v^u\widehat{e}_u) + \frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}(v^v\widehat{e}_v) + \frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}v^w\widehat{e}_w\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv, \end{aligned} \tag{57}$$

donde se ha utilizado $\overrightarrow{v} = v^u\widehat{e}_u + v^v\widehat{e}_v + v^w\widehat{e}_w$ y no se utiliza ninguna convención de sumatoria sobre índices repetidos. Por otro lado, recordando la ortonormalidad de los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$, llegamos a

$$I = \int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[-v^u\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\widehat{e}_u - v^v\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\widehat{e}_v - \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}v^w\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv. \tag{58}$$

No hay que confundir v^u, la proyección sobre $\widehat{e}_u$ de $\overrightarrow{v}$, con $\overrightarrow{v}_u = \partial\overrightarrow{v}/\partial u$. Abreviemos ahora la notación de la siguiente manera: $\partial_w f = (\partial/\partial w)f$, donde f es una función vectorial o escalar. Cálculemos ahora el último término del lado derecho de la Ec. (58):

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv = \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\overrightarrow{r}_w}{h_w}\right)}{\partial t}h_u h_v du dv. \\ &= \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v} + \overrightarrow{r}_w\left(-\frac{1}{h_w^2}\partial_t\left|\overrightarrow{r}_w\right|\right)\right]h_u h_v du dv = \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v} + \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\widehat{e}_w\cdot\partial_w\overrightarrow{v}\right)\right]h_u h_v du dv \\ &= \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v}\right]h_u h_v du dv - \int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left(\frac{1}{h_w}\widehat{e}_w\cdot\partial_w\overrightarrow{v}\right). \end{aligned} \tag{59}$$

Si nos fijamos en el primer término del lado derecho de la Ec. (57) coincide con el último término de la Ec. (59). Por lo que

$$\begin{aligned} I &= -2\int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{v}\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v}\right]h_u h_v du dv \\ &= -2\int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[v^u\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\widehat{e}_u + v^v\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\widehat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}v^w\right] + \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v}\right]h_u h_v du dv. \end{aligned} \tag{60}$$

Regresando a nuestro cálculo de la derivada del flujo, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi = &\int\limits_{S(t)}\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S} + \int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\,(\nabla\cdot\overrightarrow{v})\cdot d\overrightarrow{S} - 2\int\limits_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{v}\right] \\ &+ \int\limits_{\Pi}\overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\partial_w\overrightarrow{v}\right]h_u h_v du dv. \end{aligned} \tag{61}$$

Ahora bien, queremos obtener el resultado expresado en la Ec. (23). Con la idea de reducir el cálculo sigamos el siguiente método. Primero, veamos que si desarrollamos el término $\nabla \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v})$, obtenemos

$$\nabla \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{B}(\nabla \cdot \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}(\nabla \cdot \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v}. \tag{62}$$

La Ec. (23) se transforma en

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int\limits_{S(t)} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{B}(\nabla \cdot \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}(\nabla \cdot \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{B} \\ -(\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} + (\nabla \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{v} \end{array} \right] \cdot d\overrightarrow{S} \tag{63}$$

$$= \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{B}(\nabla \cdot \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} \right] \cdot d\overrightarrow{S}.$$

Por lo que comparando las Ecs. (63) y (61), para obtener el resultado deseado, o sea la Ec. (23), debemos demostrar que

$$\int_{S(t)} (\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} = 2 \int\limits_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial}{\partial w} \overrightarrow{v} \right] - \int\limits_{\Pi} \overrightarrow{B} \cdot \left[\frac{1}{h_w} \partial_w \overrightarrow{v} \right] h_u h_v du dv. \tag{64}$$

Para ello desarrollaremos los tres términos involucrados en la Ec. (64). Primero calculemos el término de la izquierda:

$$\int\limits_{S(t)} (\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_{S(t)} [B^u \widehat{e}_u + B^v \widehat{e}_v + B^w \widehat{e}_w] \cdot \tag{65}$$

$$\left[\frac{\widehat{e}_u}{h_u} \partial_u + \frac{\widehat{e}_v}{h_v} \partial_v + \frac{\widehat{e}_w}{h_w} \partial_w \right] [v^u \widehat{e}_u + v^v \widehat{e}_v + v^w \widehat{e}_w] \cdot d\overrightarrow{S}$$

$$= \int\limits_{\Pi} \left[\begin{array}{lll} \frac{B^u}{h_u} v^u (\partial_u \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^u}{h_u} v^v (\partial_u \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^u}{h_u} \partial_u v^w \\ + \frac{B^v}{h_v} v^u (\partial_v \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^v}{h_v} v^v (\partial_v \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^v}{h_v} \partial_v v^w \\ + \frac{B^w}{h_w} v^u (\partial_w \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^w}{h_w} v^v (\partial_w \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w & + \frac{B^w}{h_w} \partial_w v^w \end{array} \right] h_u h_v du dv$$

Para seguir adelante es necesario, demostrar ciertas identidades. En efecto, considerando que $\overrightarrow{r}_v . \widehat{e}_w = 0$, se tiene

$$\frac{1}{h_u}(\partial_u \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w = \frac{1}{h_u}(\partial_u \frac{\overrightarrow{r}_v}{h_v}) \cdot \widehat{e}_w = \frac{1}{h_u h_v}(\partial_u \overrightarrow{r}_v) \cdot \widehat{e}_w = \frac{1}{h_u h_v}(\partial_v \overrightarrow{r}_u) \cdot \widehat{e}_w = \frac{1}{h_v}(\partial_v \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w. \tag{66}$$

Sin perder generalidad, la igualdad es válida para cualquier orden de los 3 subíndices siempre y cuando sean distintos. Por otro lado, como los vectores son perpendiculares, cualquier derivada del producto de dos vectores distintos se anula, es decir,

$$\frac{1}{h_v}(\partial_v \widehat{e}_u \cdot \widehat{e}_w) = 0 \Rightarrow \frac{1}{h_v}(\partial_v \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w = -\frac{1}{h_v}(\partial_v \widehat{e}_w) \cdot \widehat{e}_u. \tag{67}$$

Sabemos también que

$$\widehat{e}_w \cdot \frac{1}{h_u} \frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t} = \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left[v^u \partial_u \widehat{e}_u + v^v \partial_u \widehat{e}_v + \left(\frac{\partial v^w}{\partial u} \right) \widehat{e}_w \right] = \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot v^u \partial_u \widehat{e}_u + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot v^v \partial_u \widehat{e}_v + \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial v^w}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot v^u \partial_u \widehat{e}_u - \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot v^v \partial_v \widehat{e}_w + \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial v^w}{\partial u} \right), \tag{68}$$

y de la misma manera, se tiene

$$\widehat{e}_u \cdot \frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t} = \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left[v^w \partial_w \widehat{e}_w + v^v \partial_w \widehat{e}_v + \left(\frac{\partial v^u}{\partial w} \right) \widehat{e}_u \right] = \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot v^w \partial_w \widehat{e}_w + \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot v^v \partial_w \widehat{e}_v + \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial v^u}{\partial w} \right)$$

$$= \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot v^w \partial_w \widehat{e}_w + \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot v^v \partial_v \widehat{e}_w + \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial v^u}{\partial w} \right) \tag{69}$$

Por otro lado,

$$\widehat{e}_w \cdot \frac{1}{h_u} \frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t} = \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \frac{\partial (h_u \widehat{e}_u)}{\partial t} = \widehat{e}_w \cdot \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \widehat{e}_u \cdot \frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t} = \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \frac{\partial (h_w \widehat{e}_w)}{\partial t} = \widehat{e}_u \cdot \frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial t}. \tag{70}$$

También consideremos

$$\frac{\partial(\widehat{e}_w \cdot \widehat{e}_u)}{\partial t} = 0. \tag{71}$$

Sumando las Ecs. (68) y (69) y utilizando las Ecs. (70) y (71), se concluye que

$$-\frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot v^w \partial_w \widehat{e}_w - \frac{1}{h_w}\frac{\partial v^u}{\partial w} = \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot v^u \partial_u \widehat{e}_u + \frac{1}{h_u}\frac{\partial v^w}{\partial u}. \tag{72}$$

Utilizando estas últimas identidades, Ecs. (66), (67) y (72), y después de un álgebra tediosa pero directa, la identidad representada en la Ec. (65) se transforma en

$$\int\limits_{S(t)} (\overrightarrow{B} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\limits_{\Pi} \begin{bmatrix} -\frac{B^u}{h_w} v^w (\partial_w \widehat{e}_w) \cdot \widehat{e}_u & -\frac{B^u}{h_w} v^v (\partial_w \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_u & -\frac{B^u}{h_w} \partial_w v^u \\ -\frac{B^v}{h_w} v^u (\partial_w \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_v & -\frac{B^v}{h_w} v^w (\partial_w \widehat{e}_w) \cdot \widehat{e}_v & -\frac{B^v}{h_w} \partial_w v^v \\ -\frac{B^w}{h_w} v^u (\partial_w \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w & \frac{B^w}{h_w} v^v (\partial_w \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w & \frac{B^w}{h_w} \partial_w v^w \end{bmatrix} h_u h_v du dv. \tag{73}$$

Calculemos ahora el primer término de la derecha de la Ec. (64), o sea,

$$2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{v}\right] = 2\int_{\Pi} B^w \left[\frac{v^u}{h_w}\partial_w(\widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w + \frac{v^v}{h_w}\partial_w(\widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w + \frac{1}{h_w}\partial_w v^w\right] h_u h_v du dv. \tag{74}$$

Finalmente, calculemos el segundo término de la derecha de la Ec. (64), es decir,

$$-\int\limits_{\Pi} \overrightarrow{B} \cdot \left[\frac{1}{h_w}\partial_w \overrightarrow{v}\right] h_u h_v du dv = -\int\limits_{\Pi} \begin{bmatrix} \frac{B^u v^w}{h_w}(\partial_w \widehat{e}_w) \cdot \widehat{e}_u & +\frac{B^u v^v}{h_w}(\partial_w \widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_u & +\frac{B^u}{h_w}\partial_w v^u \\ +\frac{B^v v^u}{h_w}(\partial_w \widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_v & +\frac{B^v v^w}{h_w}\partial_w(\widehat{e}_w) \cdot \widehat{e}_v & +\frac{B^v}{h_w}\partial_w v^v \\ +\frac{B^w v^u}{h_w}\partial_w(\widehat{e}_u) \cdot \widehat{e}_w & +\frac{B^w v^v}{h_w}\partial_w(\widehat{e}_v) \cdot \widehat{e}_w & +\frac{B^w}{h_w}\partial_w v^w \end{bmatrix} h_u h_v du dv. \tag{75}$$

Comparando las Ecs. (73), (74) y (75) con la Ec. (64), podemos constatar que la Ec. (64) es válida y por lo tanto el resultado requerido es encontrado. Es decir, la Ec. (23) es válida y aprovechamos para repetirla.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}) + (\nabla \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{v}\right] \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{76}$$

Con esta técnica desarrollada, a pesar de ser larga y tediosa, se han podido obtener las dos derivadas de las dos integrales, Ecs. (10) y (23). En efecto, lo largo de este método puede utilizarse como primera razón para acercarse al conocimiento de las formas diferenciales y derivadas de Lie.

4. Operador material

De la misma manera que se obtuvieron por el método anterior las Ecs. (10) y (23), podríamos calcular la derivada de una circulación, es decir,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{C} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C} \left[\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{v} \times \nabla \times \overrightarrow{A} + \nabla(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A})\right] \cdot d\overrightarrow{r}. \tag{77}$$

Podemos entonces generalizar los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A = \left[\int\limits_{V(t)} \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) dV\right] + \left[\int\limits_{v(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV\right], \\ \frac{d\Phi}{dt} = \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}) + (\nabla \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{v}\right] \cdot d\overrightarrow{S}, \\ \frac{d}{dt}\int\limits_{C(t)} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{v} \times \nabla \times \overrightarrow{A} + \nabla(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A})\right] \cdot d\overrightarrow{r} \end{cases}. \tag{78}$$

De manera natural podemos definir los operadores materiales para cada tipo de integral, es decir,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A = \left[\int\limits_{V(t)} \frac{D_V}{dt}\rho dV\right] \\ \frac{d\Phi}{dt} = \int\limits_{S(t)} \frac{D_S \overrightarrow{B}}{dt} \cdot d\overrightarrow{S}, \\ \frac{d}{dt}\int\limits_{C(t)} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C(t)} \frac{D_c \overrightarrow{A}}{dt} \cdot d\overrightarrow{r} \end{cases}, \tag{79}$$

donde

$$\begin{cases} \frac{D_V}{dt}\rho = \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}, \\ \frac{D_S\overrightarrow{B}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{v}) + (\nabla\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{v}, \\ \frac{D_c\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{v}\times\nabla\times\overrightarrow{A} + \nabla(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{A}). \end{cases} \tag{80}$$

Podríamos aumentar al conjunto de ecuaciones expresadas en la Ec. (80), la ya conocida derivada material para la derivada con respecto al tiempo de una función vectorial o escalar, es decir,

$$\frac{D_o f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)f. \tag{81}$$

Estos operadores podrían llamarse operadores materiales de volumen, de superficie, de linea o de trayectoria.

5. Conclusión

Podría uno pensar que esta última técnica es sólo un ejercicio más de métodos aplicados a la física. Sin embargo en los últimos años han aparecido algunas aplicaciones directas que utilizan este tipo de derivadas de integrales. Podemos citar ciertas aplicaciones realizadas a partir de las leyes de Faraday y Ampére-Maxwell [8,10,11] donde se ha podido entender la importancia de las ecuaciones de Maxwell expresadas en forma integral para el estudio de las transformaciones relativistas de los campos. Por otro lado, también se han encontrado aplicaciones para el estudio de los flujos radiativos[9,12].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por COFAA y EDI-IPN.

1. D.J. Acheson, *Elementary fluid dynamics* (Claredon, Oxford, 1990) Chap 1, p. 4,5,8.
2. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics* (Pergamon, Oxford, 1982) § 1, p. 2-4.
3. J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 2nda ed. (Wiley, New York, 1975) p. 211,212,236,239.
4. W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical electricity and magnetism* ,2nda. ed. (Addison-Wesley, Reading, 1962) p. 160.
5. B.M. Budak and S.V. Fomin, *Multipole integrals, field theory and series. An advanced course in higher mathematics*, 2nd ed.(Mir, Moscow, 1978) Chap 6 § 8, and 10.
6. T. Frankel, *Gravitational curvature, an introduction to Einstein's theory*, (Freeman, San Francisco, 1979) p. 56.
7. H.P. HSU, *Análisis vectorial* (Fondo Educativo Interamericano, México, 1973) Caps. 3-5.
8. G. Ares de Parga and M.A. Rosales, *Eur. J. Phys.* **10** (1989) 74.
9. G. Ares de Parga, R. Mares, and S. Domínguez, *Nuovo Cimento B* **116** (2001) 85.
10. H. Gelman, *Eur. J. Phys.* **12** (1990) 230.
11. G. Monsivais, *Am. J. Phys.* **72** (2004) 1178.
12. G. Ares de Parga, *Found. Phys.* **36** (2006) 1474.