

Péndulo de longitud variable: experimentos

M. Fernández Guasti

*Departamento de Física, CBI, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa,
Apartado Postal 55-532, México 09340 D.F., México.*

Recibido el 12 de abril de 2005; aceptado el 31 de marzo de 2006

Se estudia experimentalmente la evolución de un péndulo al variar su longitud. Se muestra que el invariante de funciones ortogonales bajo las condiciones apropiadas reproduce los límites abrupto y adiabático. Se presentan resultados experimentales tanto en estos límites como en casos intermedios que no han sido previamente reportados. Éste artículo está dedicado a Don Juan de Oyarzábal en recuerdo de sus clases memorables de mecánica en la UAM-Iztapalapa durante 1975.

Descriptor: Oscilador armónico; parámetros dependientes del tiempo, invariantes exactos.

The evolution of a pendulum with variable length is experimentally reported. The orthogonal functions invariant is shown to reproduce, under the appropriate conditions, the well known abrupt and adiabatic limits. Experimental results in these regimes are shown together with intermediate cases not previously reported. This article is dedicated to Don Juan de Oyarzábal in memorial of his extraordinary classical mechanics lectures at UAM-Iztapalapa during 1975.

Keywords: Harmonic oscillator; time-dependent parameter; exact invariance.

PACS: 02.60.Lj; 45.20.dh; 45.20.D-

1. Introducción

Lorentz y Einstein discutieron durante el congreso de Solvayⁱ a finales de octubre de 1911 el problema del péndulo con longitud variable [1]. Paul Ehrenfest, entonces un profesor desempleado, lejos estaba de poder participar en dicho congreso y sin embargo, ya había hecho contribuciones importantes a algunos de los temas que ahí se abordaron. En particular, había planteado la invariancia de la razón de energía sobre frecuencia de un oscilador para variaciones lentas del campoⁱⁱ. El problema tenía gran importancia en ese momento debido al trabajo de Planck sobre la distribución espectral de la radiación electromagnética de un cuerpo negro. Es notable reconocer que dicho problema se había reducido a considerar la redistribución de energía en un ensemble de osciladores armónicos en equilibrio. De hecho, a veces da la impresión que la solución de muchos problemas en física consiste en reducir el sistema en cuestión al del oscilador armónico.

Tres siglos antes Salviati y Sagredo habían discutido ese mismo caso del péndulo en *las Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* [2]. Salviati propone un experimento que utiliza un péndulo colgado cercano a una pared. Mientras el sistema oscila, se introduce un clavo en la pared que se interpone en el camino que recorre la cuerda cuando pasa por la vertical. La longitud del péndulo cambia entonces súbitamente. Galileo, apoyándose en las nociones de momento e ímpetu que él había concebido, explica que la altura máxima que alcanza el péndulo es idéntica en todos los casos. En aquella época no existía el concepto de energía que fue permeando en la comunidad científica años después, primero con la idea de energía cinética, posteriormente de energía potencial y finalmente distintas formas de energía cuyo valor total siempre se conserva [3]. En el lenguaje contemporáneo, el problema descrito por Galileo se

reformula en términos de un oscilador armónico (el péndulo) con un parámetro dependiente del tiempo (la longitud variable) y los invariantes asociados al sistema (la energía, por ejemplo). En este caso, el parámetro varía de manera abrupta como función del tiempo.

A partir del último tercio del siglo XX se revitalizó el interés sobre el oscilador armónico dependiente del tiempo, esta vez debido a que se encontró un invariante exacto [4] que es válido aunque la variación del parámetro dependiente del tiempo ocurra despacio o rápidoⁱⁱⁱ (en contraste, el invariante adiabático es un resultado aproximado aplicable para variaciones lentas). Las dos vertientes principales que se han desarrollado a partir de la teoría de los invariantes exactos son las aplicaciones a sistemas cuánticos en una dimensión [7,8] y para obtener soluciones generales a ciertas ecuaciones no lineales [9].

Si bien hay un número considerable de reportes teóricos, así como simulaciones numéricas vinculadas a invariantes de sistemas de Ermakov, son escasas las publicaciones que abordan el problema desde el punto de vista experimental. Asimismo, son escasos los intentos para establecer una interpretación física de los distintos invariantes [10,11]. Por otro lado, la importancia de los sistemas de Ermakov se hace patente al observar el amplio rango de escenarios, tanto en mecánica como en electromagnetismo o cosmología donde esta formulación es relevante [12].

En este trabajo se presentan los resultados experimentales que se obtuvieron del estudio de un péndulo de longitud variable. En la siguiente sección se presenta una somera revisión teórica para describir al sistema en el límite abrupto que abordó Galileo, en el límite adiabático y el caso más general del invariante exacto que debe ser válido para ambos casos particulares. Posteriormente, en la Sec. 3, se refiere el dispositivo experimental y los resultados obtenidos para las distin-

tas maneras como se modificó la longitud del péndulo. En la última sección se discuten los resultados tanto en los límites bien conocidos como en otras condiciones intermedias.

2. Invariantes

Procedamos a discutir los tres casos antes mencionados. El punto de partida es la ecuación que describe la trayectoria de un péndulo despreciando la masa del hilo en la aproximación paraxial:

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2(t)x(t) = 0, \tag{1}$$

donde $x(t)$ representa la posición horizontal del centro de masa del péndulo, $\Omega^2(t) = g/l(t)$ es el parámetro dependiente del tiempo, $l(t)$ es la longitud variable y g es la constante gravitatoria en la superficie terrestre. El desplazamiento horizontal $x(t)$ en términos de las variables de amplitud $a(t)$ y fase $\gamma(t)$ es

$$x(t) = a(t) \cos \gamma(t), \tag{2}$$

donde la relación entre fase y frecuencia está definida por $\gamma(t) \equiv \int \omega(t) dt$.

En el caso estacionario el parámetro Ω es independiente del tiempo, la energía del oscilador puede entonces escribirse en términos de una amplitud A y frecuencia ω también independientes del tiempo como [13, 14]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}mA^2\frac{g}{l}, \tag{3}$$

donde la frecuencia del oscilador ω en el caso estacionario es igual al parámetro independiente del tiempo $\omega = \Omega = \sqrt{g/l}$.

2.1. Galileo

En el caso estudiado por Galileo la constricción se introduce en el eje del péndulo sin realizar ningún trabajo sobre el sistema; por lo tanto, la energía del péndulo se conserva. Igualando la energía (3) en los dos estados estacionarios con distintas longitudes obtenemos que la razón de amplitudes es

$$\left\{ \frac{A_2}{A_1} \right\}_{\text{Galileo}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}. \tag{4}$$

La razón de amplitudes es entonces proporcional a la raíz cuadrada de la razón de longitudes. Puesto que la constricción produce un cambio abrupto en la longitud del péndulo, dicho caso corresponde a una variación muy rápida del parámetro dependiente del tiempo $\Omega^2(t)$.

2.2. Adiabático

El oscilador armónico recobra inusitado interés cuando distintos sistemas macroscópicos son descritos en términos de osciladores microscópicos. Inicialmente Planck, y posteriormente Ehrenfest, reconsideran el problema del oscilador cuya frecuencia depende del tiempo y consideran el límite cuando

la variación es lenta. Este caso límite, denominado adiabático, requiere de una variación muy lenta del parámetro dependiente del tiempo y es en este sentido el caso opuesto al descrito por Galileo. En el caso adiabático existe un invariante que es proporcional a la energía del oscilador entre su frecuencia [15]:

$$I_{\text{adiabático}} = \frac{\mathcal{E}(t)}{\omega(t)}. \tag{5}$$

Esta razón constante de energía sobre frecuencia fue de hecho la aseveración hecha por Erhenfest respecto a los osciladores de Planck y que Einstein retomó al discutir con Lorentz el problema del péndulo de longitud variable. En este caso, la energía del oscilador $\mathcal{E}(t)$ evidentemente no se conserva. Consideremos que el sistema evoluciona de un estado estacionario a un tiempo inicial t_1 a otro estado estacionario a otro tiempo t_2 . Si el cambio de la longitud representado por el parámetro dependiente del tiempo $\Omega^2(t)$ es suficientemente lento desde una frecuencia $\Omega_1 = \omega_1$ hasta $\Omega_2 = \omega_2$, utilizando el invariante adiabático (5) se obtiene que $A_1^2\omega_1 = A_2^2\omega_2$. Puesto que la frecuencia es $\omega = \sqrt{g/l}$, la razón de las amplitudes es entonces proporcional a la raíz cuarta de la razón de longitudes

$$\left\{ \frac{A_2}{A_1} \right\}_{\text{adiabático}} = \sqrt[4]{\frac{l_2}{l_1}}. \tag{6}$$

Recordando que el arco descrito por el péndulo es $l\phi$ y la amplitud se aproxima al arco para ángulos pequeños, entonces $A = l\phi$. El invariante adiabático puede entonces reescribirse como $I_{\text{adiabático}} = A^2\sqrt{g/l} = l^2\phi^2\sqrt{g/l}$. El cuadrado de este invariante es

$$I_{\text{adiabático}}^2 = gl^3\phi^4. \tag{7}$$

Esta cantidad es precisamente la que evaluaron Boldú, Riveros y Rubio [16] con un error relativo menor al uno por ciento^{iv}. Para evaluar el régimen adiabático, Boldú *et al.*, compararon la velocidad máxima del péndulo con la velocidad de variación de la longitud. Dicha velocidad de cambio de la longitud la mantuvieron muy lenta (7.5×10^{-4} m/s) para asegurar la validez de la aproximación adiabática. En nuestro caso, se hizo una medición cualitativa mucho menos precisa pero equivalente, al comparar el tiempo durante el cual se varió la longitud respecto al período de oscilación.

Hay otro aspecto en el trabajo precedente que nos permite visualizar la diferencia entre el invariante adiabático y el invariante exacto que se discute en esta comunicación. En el límite adiabático, como lo asientan Boldú *et al.*, los invariantes $\mathcal{E}l^{1/2}$, $l^3\phi^4$, \mathcal{E}/ν son equivalentes. Es notable que aun cuando no se cumpla la condición adiabática existe un invariante exacto como se describirá en la sección siguiente. En dicha condición general, la frecuencia de oscilación ω no necesariamente es igual al parámetro dependiente del tiempo Ω . Por lo tanto, $\omega \neq \sqrt{g/l}$ y las tres formas invariantes adiabáticas antes mencionadas no son ya constantes.

2.3. Exacto

Los dos resultados anteriores corresponden a límites opuestos del parámetro dependiente del tiempo, la razón de amplitudes es proporcional a la raíz cuadrada o la raíz cuarta de la razón de longitudes dependiendo de una variación rápida o lenta de $\Omega^2(t)$.

El invariante de funciones ortogonales es un invariante exacto que es aplicable tanto para variaciones rápidas o lentas del parámetro dependiente del tiempo. Para un oscilador, en términos de amplitud y fase, está dado por [17]

$$Q = a^2(t) \dot{\gamma}(t). \quad (8)$$

Este invariante se encuentra estrechamente relacionado con el invariante de Ermakov-Lewis [4], pero presenta la ventaja de que coincide con el invariante adiabático en el límite apropiado. A dos tiempos arbitrarios la razón de amplitudes está dada por

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \sqrt{\frac{\omega(t_1)}{\omega(t_2)}}. \quad (9)$$

Sin embargo, estas amplitudes y frecuencias pueden ser dependientes del tiempo inclusive en regiones donde el parámetro Ω es constante. Se ha mostrado recientemente que es posible traducir dichas amplitudes a cantidades que sean constantes cuando el parámetro no varía temporalmente [18]. La relación de amplitudes^v, constantes en el límite estacionario, es

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ A_1 \end{array} \right\}_{\text{funciones ortogonales}} = \sqrt{\frac{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos(2\theta)}{1 - \sigma^2}} \frac{\Omega_1}{\Omega_2}, \quad (10)$$

donde σ^2 es una cantidad positiva menor que uno y θ es la fase del oscilador cuando se lleva a cabo la variación de la longitud^{vi}. En el caso de una variación lenta comparada con el período del oscilador $\sigma = 0$ y la razón de amplitudes (10) coincide entonces con el invariante adiabático (6). Nótese que en este caso el valor de θ es irrelevante. Por otro lado, en el límite abrupto σ está dado por

$$\sigma = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)}{(\Omega_2 + \Omega_1)}. \quad (11)$$

Si la variación se lleva a cabo cuando el péndulo pasa por la posición de equilibrio ($x=0$), la fase del oscilador en dicha posición es $\theta=\pi/2$ y, puesto que $\Omega_1/\Omega_2 = (1 - \sigma)/(1 + \sigma)$, la razón de amplitudes coincide entonces con el invariante galileano (4). Se puede mostrar que la razón de amplitudes derivadas del invariante exacto puede adquirir valores que están acotados entre [18]

$$1 \leq \frac{A_2}{A_1} \leq \frac{\Omega_1}{\Omega_2}, \quad (12)$$

dependiendo de cuando se aplica un cambio abrupto a la longitud del péndulo. Hasta donde sabemos, no se han encontrado soluciones analíticas aproximadas para situaciones intermedias donde el parámetro dependiente del tiempo es del mismo orden que el período característico del sistema.

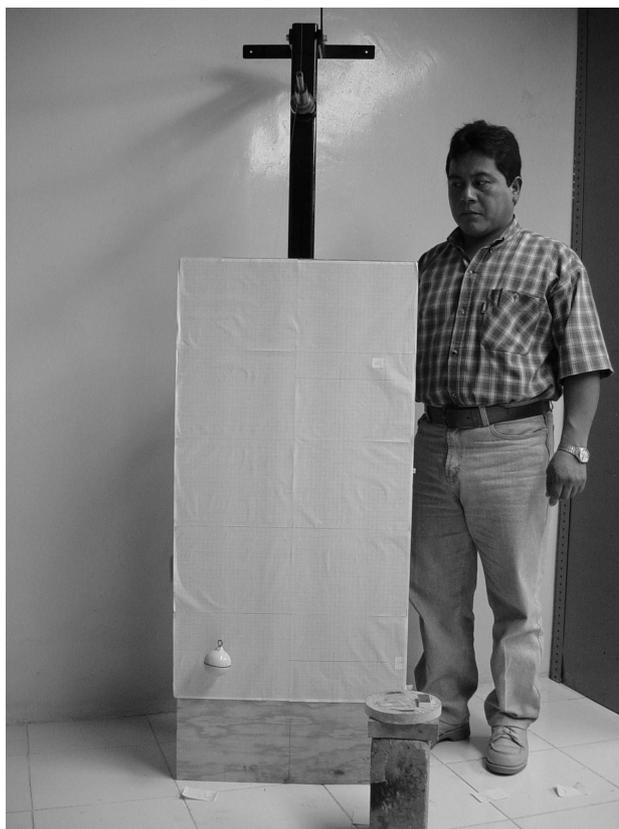


FIGURA 1. Fotografía del sistema de péndulo de longitud variable.

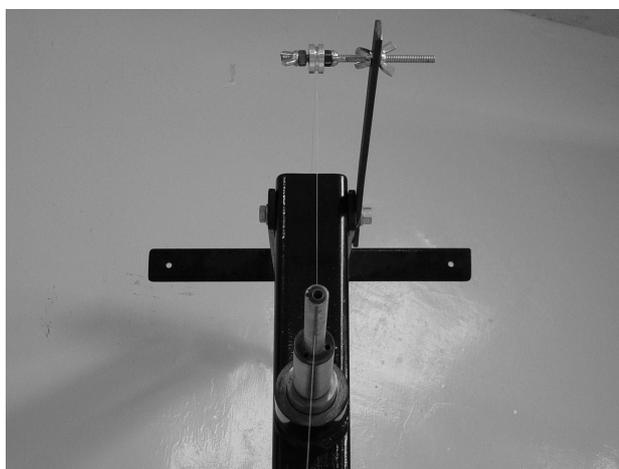


FIGURA 2. Detalle del orificio que fija la parte superior del péndulo y la polea posterior que permite montar el contrapeso.

3. Dispositivo experimental

El arreglo experimental se muestra en la Fig. 1. Consiste en un péndulo simple que se vació en plomo dentro de un matraz esférico con una masa aproximada de 1.4 kg. Esta pieza se colgó con una cuerda de hilo de pescar cuya masa es despreciable comparada con la masa de la bola del péndulo. Para

sujetar la parte superior de la cuerda que sostiene al péndulo se utilizó una pieza de bronce a la que se barrenó un orificio de 0.4 mm (1/64 de pulgada) como se muestra en la Fig. 2. Una vez que la cuerda atraviesa dicho orificio se colocó una pequeña polea y en la parte posterior otra masa similar a la del péndulo que funciona como contrapeso para poder subir y bajar el péndulo con un esfuerzo mínimo. Todas estas piezas se montaron sobre una barra de hierro que permite variar la longitud del péndulo desde una altura de 20 hasta 140 cm. En la parte posterior del péndulo se colocó papel milimétrico para medir su desplazamiento visualmente. La amplitud se evaluó por medio del desplazamiento máximo del péndulo [20].

La amplitud se midió por medio de una serie de 16 fotografías secuenciales con un intervalo de 1/25 s entre exposiciones como se muestra en la Fig. 3. Se utilizó una cámara digital con apertura numérica de 3.2 y exposición de 1/30 s para registrar cada imagen. La amplitud se observa directamente del recuadro donde el desplazamiento es máximo ^{vii} (hacia la derecha). La serie corre en líneas horizontales de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Se observa que el desplazamiento máximo se encuentra en la fotografía en la posición 7 o posiblemente 8. De la retícula posterior en una imagen ampliada de dicha foto se observa que la amplitud del centro de masa del péndulo es de 21.8 cm. Este procedimiento se repitió para cada medición de la amplitud. Nótese que la imagen de la bola del péndulo es más nítida en la vecindad del desplazamiento máximo, puesto que en esa región su velocidad es cercana a cero. La posición específica del recuadro no es relevante y depende de cuándo se accionó el obturador manual aunque sí es importante que no se ubique en un extremo (en la posición 1 ó 16), pues entonces no es claro que se esté encontrando el máximo desplazamiento. La cámara fotográfica se montó en posiciones adecuadas para cada longitud y amplitud de manera que quedara perpendicular al péndulo para evitar errores de paralaje. Esto implicó que mientras se movía el péndulo a una nueva longitud se reposicionara la cámara en un trípode para tomar la segunda serie fotográfica en una posición perpendicular. Por este motivo se limitó la idea original de medir la amplitud a diversas longitudes por mediciones a dos longitudes solamente.

La amplitud inicial se midió a una longitud de 130 cm, donde el período del péndulo fue de 2.29 s. Posteriormente se subió el péndulo hasta reducir su longitud a la mitad, es decir 65 cm ($\tau=1.62$ s), donde se midió su amplitud nuevamente. El cambio de longitud se realizó jalando a mano el contrapeso del péndulo. En la gráfica de la Fig. 4 se muestra un ejemplo del experimento con una amplitud inicial de $A_1 = 21.8$ cm y una amplitud final $A_2 = 16.7$ cm. Adicionalmente, se superponen las curvas correspondientes a la dependencia adiabática (raíz cuadrada) y la abrupta (raíz cuarta) cuando el cambio sucede al pasar el péndulo por la posición de equilibrio. En línea punteada se muestra el caso abrupto si éste se llevara a cabo cuando el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio es máximo. Las barras de error en la longitud se establecieron en ± 1 cm, que es una estimación

holgada de la incertidumbre en la medición. El error en la amplitud inicial se estableció en ± 3 mm, mientras que en la amplitud final se ubicó en ± 6 mm debido al error introducido por efectos de fricción. La disminución de la amplitud para una longitud fija debido a la fricción fue del orden de 2.8 % en un minuto (una amplitud inicial de 21.8 cm disminuyó 0.6 cm en un minuto). Las mediciones a distintas longitudes se hicieron en poco menos de 1 minuto, de manera que el error en la medición de la amplitud es por lo menos del orden de 3 %. Este último error sistemático se podría ubicar de manera asimétrica, pues la fricción siempre produce una amplitud máxima menor que la que se obtendría cuando la fricción es estrictamente cero.

En la gráfica de la Fig. 5 se muestran las amplitudes que se obtuvieron al reducir la longitud del péndulo a la mitad.

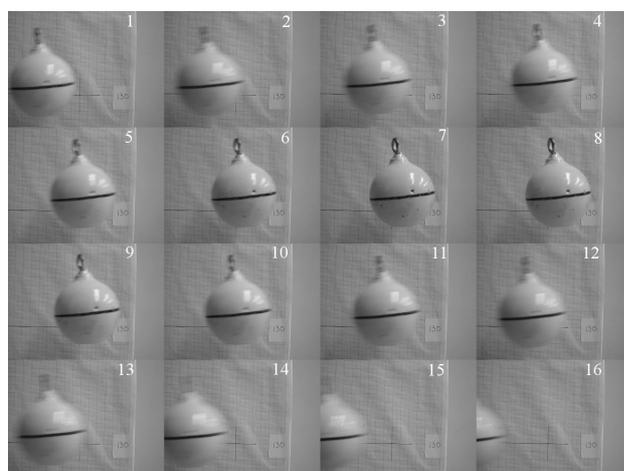


FIGURA 3. Secuencia de 16 fotografías utilizadas para obtener la amplitud de la oscilación. La amplitud es igual al desplazamiento máximo que se observa en el recuadro 7 (o posiblemente 8).

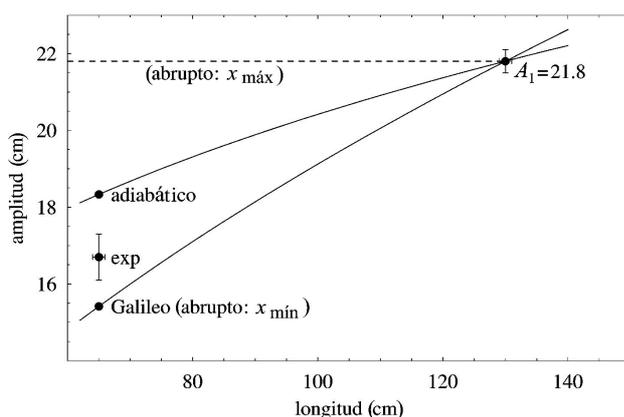


FIGURA 4. Resultado de un experimento típico donde la longitud inicial del péndulo se reduce a la mitad. Los puntos experimentales “ A_1 ” y “exp” se muestran con los límites teóricos de los casos adiabático y abrupto.

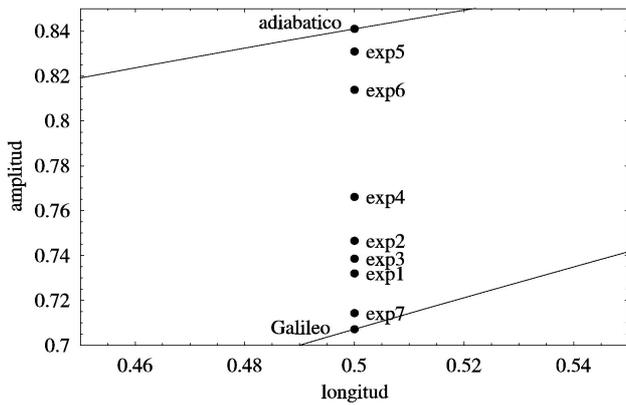


FIGURA 5. Razón de amplitudes versus razón de longitudes (adimensionales) para siete experimentos donde la disminución de la longitud a la mitad se llevó a cabo de manera distinta como función del tiempo.

Este cambio en la longitud se hizo tanto de manera lenta, en alrededor de 10 s, como de manera rápida en menos de un par de segundos. Para poder comparar los resultados de distintas amplitudes iniciales se utilizaron cantidades adimensionales, tanto para la amplitud como la longitud. Cada uno de los siete puntos experimentales exhibidos implica dos series de 16 fotografías como la mostrada anteriormente, una serie para la amplitud inicial y otra para la final a la mitad de longitud. Las barras de error en la amplitud (no mostradas en la gráfica para facilitar su visualización) son de 3 % como se mencionó previamente y corresponden a 0.03 en unidades de la ordenada en la gráfica 5.

4. Discusión y conclusiones

Como hemos mencionado, el caso galileano abrupto consiste en insertar un clavo en la línea vertical que coincide con la posición de equilibrio del péndulo en reposo. En el experimento actual, este caso corresponde a jalar rápidamente la cuerda del péndulo (es decir cambiar su longitud) cuando la masa está pasando por la vertical. Obviamente, en este experimento dicho cambio no es tan abrupto como en el caso galileano, pues la masa del péndulo se jala a la mitad de su longitud cuando mucho en medio segundo. Sin embargo, el experimento 7 sugiere que el resultado de este procedimiento corresponde dentro de los márgenes de error al caso galileano. La razón de energías en este caso es 1, puesto que la energía del péndulo se conserva.

Los experimentos 5 y 6 se encuentran dentro del límite adiabático al considerar el rango de error en la medición de la amplitud (3 %). Este caso implica a un cambio suave de la longitud del péndulo con respecto al tiempo característico del sistema. En nuestros experimentos una variación lenta corresponde a una reducción de la longitud en un lapso de 10 segundos, que es alrededor de tres veces mayor comparado con el período inicial del péndulo. Simulaciones numéricas de la ecuación diferencial (1) para distintas variaciones del parámetro dependiente del tiempo $\Omega^2(t)$ han mostrado que el

proceso se puede considerar adiabático si la variación sucede en un lapso mayor a un período del sistema [19]. Debemos recordar que en el experimento el péndulo se jala a mano para cambiar su longitud; es difícil asegurar que este movimiento sea suave durante todo el trayecto. Sin embargo, estos puntos experimentales sugieren que no hubo brincos apreciables en los casos 5 y 6. De la Ec. (5), la razón de energías en el límite adiabático está dada por

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}. \tag{13}$$

El resto de los experimentos (exp1, exp3, exp2 y exp4) corresponde a condiciones intermedias entre los dos límites anteriores. En estos casos la energía inicial y final del oscilador cambia pero no obedece la relación adiabática. Se puede evaluar la razón de energías para dos estados estacionarios a partir de la razón de amplitudes (10) al elevar esta expresión al cuadrado y multiplicar por Ω_2^2/Ω_1^2

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{A_2^2 \Omega_2^2}{A_1^2 \Omega_1^2} = \frac{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos(2\theta)}{1 - \sigma^2} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}. \tag{14}$$

No es evidente cuál es el valor de σ para casos intermedios entre el límite abrupto (11) y el adiabático ($\sigma = 0$). Sin embargo, es razonable esperar que tenga un valor intermedio entre estos límites sobre todo si se recuerda que en el problema electromagnético formalmente idéntico, pero en dominio espacial, σ representa el coeficiente de reflectividad [19]. En el límite abrupto, la razón de energía final entre inicial cuando el cambio del parámetro dependiente del tiempo sucede al encontrarse el péndulo en la posición de mínimo desplazamiento x_{\min} es

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{(1 - \sigma)^2}{1 - \sigma^2} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 1 \quad \text{para } x_{\min} = 0, (\theta = \pi/2), \tag{15}$$

mientras que si sucede cuando el desplazamiento es máximo

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{(1 + \sigma)^2}{1 - \sigma^2} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \quad \text{para } x_{\max}, (\theta = 0). \tag{16}$$

Los valores de las variables relevantes en los diferentes casos se presentan en la Tabla I.

Es interesante notar que no hay resultados en nuestros experimentos que se ubiquen entre el límite adiabático y el caso abrupto con x_{\max} ; es decir, no hay eventos con una razón de amplitudes entre $\sqrt[4]{1/2} = 0.84$ y 1.0 como se puede ver de las gráficas mostradas en las Figs. 4 y 5. Una posible explicación de este hecho se sugiere a continuación: la derivación

TABLA I.

	abrupto x_{\max}	adiabático	abrupto x_{\min}
$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}$	$\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} = \frac{l_1}{l_2}$	$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$	1
$\frac{A_2}{A_1}$	1	$\sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega_2}} = \sqrt[4]{\frac{l_2}{l_1}}$	$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$
σ	$\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1}$	0	$\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1}$
θ	0	-	$\pi/2$

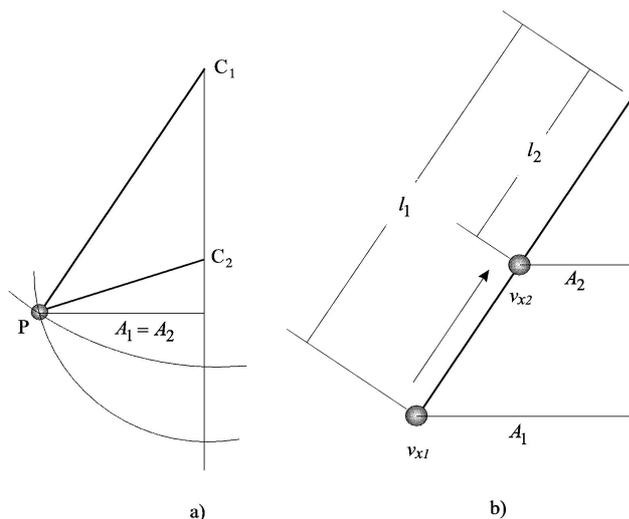


FIGURA 6. Disminución de la longitud del péndulo cuando el desplazamiento es máximo. a) En el caso hipotético, donde al cambiar la cuerda PC_1 por la cuerda PC_2 la amplitud se mantendría constante. ¿Cómo se podría implementar este dispositivo? b) En el experimento realizado jalando la cuerda del péndulo, la amplitud decrece linealmente con l .

teórica del invariante exacto mostrado en la Sec. 2.3 requiere que la posición $x(t)$ no sufra un cambio abrupto inclusive si el parámetro dependiente del tiempo es abrupto. Por ejemplo, para obtener una razón de amplitudes igual a uno, se necesita que cuando el desplazamiento del péndulo sea máximo se modifique su longitud sin variar su amplitud. Este caso, ilustrado en la Fig. 6a, requeriría que cuando un péndulo sujeto en C_1 se encontrara en la posición $x_{\text{máx}}$, se colgara súbitamente de otro clavo sobre eje C_2 , de manera que la longitud del péndulo cambiara abruptamente mientras que la amplitud se mantuviera constante. La implementación de un dispositivo experimental sencillo que permitiera la realización de este caso no nos es evidente; son bienvenidas las propuestas del lector.

Por otro lado, consideremos si la razón de amplitudes puede ser menor al caso abrupto galileano que en nuestro experimento corresponde a una razón de amplitudes menor que $\sqrt{1/2} = 0.707$. De acuerdo al formalismo del invariante exacto que presentamos en 2.3 ésta es la cota inferior. Sin embargo, recordemos que dicha derivación implica que la posición debe ser continua como función del tiempo aunque el parámetro dependiente del tiempo varíe abruptamente. En el dispositivo que aquí describimos éste no es el caso, pues si la longitud del péndulo se reduce cuando el desplazamiento es máximo, la amplitud del mismo se reduce de manera lineal con la longitud como se puede ver en la Fig. 6b. Entonces $A_2/A_1 = l_2/l_1$, de manera que la cota inferior al reducir la longitud a la mitad es de $1/2 = 0.5$. Sin embargo, tampoco se observan resultados experimentales con razón de amplitudes entre 0.707 y 0.5. Es posible que esto se deba a que si la reducción en la longitud se lleva a cabo cuando el desplazamiento es máximo ($v_{1x} = 0$), la velocidad de la masa cuando se reduce la longitud a la mitad es finita $v_{2x} \neq 0$, de

manera que cuando el péndulo continúa su movimiento adquirirá una amplitud máxima mayor a esta posición inicial en la longitud reducida. Sin embargo, para que esta explicación sea completa y acorde con las observaciones, sería necesario demostrar que la velocidad que se le imprime al péndulo en la dirección x aumenta la razón de amplitudes a valores mayores que $\sqrt{1/2}$.

Esperamos que los experimentos aquí presentados sean útiles para familiarizarse con la dinámica de los sistemas más simples con un parámetro dependiente del tiempo, en este caso, la longitud variable de un péndulo. El invariante exacto es una cantidad fundamental para entender la dinámica en los casos intermedios entre los límites abruptos y adiabático además de incluir estas situaciones límite. El estudio de los invariantes exactos desde el punto de vista teórico, con simulaciones numéricas y experimentos de a “de veras” presentan cada uno facetas diferentes del problema y diversos retos. Estas distintas aproximaciones se enriquecen mutuamente y conjuntamente permiten acercarse a una comprensión cabal del fenómeno.

Agradecimientos

Agradezco al Sr. Carlos García Guerrero, del Laboratorio de Óptica Cuántica la UAM-Iztapalapa, la hechura del péndulo en plomo y la realización de los experimentos iniciales. Mi reconocimiento también al Sr. Armando de la Luz Portilla, del taller de Óptica del INAOE, por el montaje con contrapeso y la implementación de los experimentos subsecuentes. Mención especial merece el Dr. Francisco Renero por diversos consejos para llevar a cabo los registros fotográficos y resolver distintos problemas que presentaron los experimentos. Finalmente mi reconocimiento a José Luis del Río, María Esther Ortiz y Luis L. Córdova Arellano que de manera desinteresada colaboraron para que me fuera posible incluir un bello poema en esperanto de Dn. Juan de Oyarzabal y su traducción en español.

*Ĉabela bela brule bolas
babele bula pro babilo.
Fabelas brile sen barilo
sed Esperante ne parolas.
Beveli vortojn ŝi bonvolas
per bubebeba brava brilo.
Ĉabela bela brule bolas
babele bula pro babilo.
Baladbalete lingvpilolas
kun balaile brila stilo
kaj belajn vortojn sen ligilo
ŝi bilardbule karambolas.
Ĉabela bela brule bolas;*

Juan de Oyarzábal 15-12-1955^{viii}

La bella Chabela hierve ardentemente
 charlando abultadamente por charlar.
 Fabula brillantemente sin barrera
 pero en Esperanto no conversa.
 Biselar palabras ella desea
 a través de un infantil valiente destello.
 La bella Chabela hierve ardentemente
 charlando abultadamente por charlar.

En danza-ballet el idioma engulle
 barriendo con brillante estilo
 y bellas palabras sin atadura
 Como las bolas del billar ella carambola.
 ¡La bella Chabela hierve ardentemente!^{ix}

-
- i* Ernest Solvay fué un industrial Belga que desarrollo un proceso para hacer carbonato de sodio en 1861. Actualmente Solvay es una corporación con alrededor de 30 mil empleados. (Este es un caso ejemplar para los tecnócratas que, sin un análisis del contexto y con escasos conocimientos científicos, orientan los presupuestos de ciencia y tecnología en el mundo actual.)
- ii* Einstein conocía un artículo donde Ehrenfest expuso la deducción de esta aseveración. Sin embargo, no hay evidencia de que lo haya mencionado en el congreso cuando discutió este tema [1].
- iii* Como ha sucedido frecuentemente, se ha reconocido que dicho invariante había sido formulado previamente por Ermakov [5] desde finales del siglo XIX y por otros investigadores tiempo después [6].
- iv* Como se verá más adelante, el error en nuestras mediciones es por lo menos tres veces mayor a pesar de que se realizaron con el mayor cuidado. Sirva este comentario como reconocimiento a la destreza experimental del trabajo antes mencionado.
- v* Utilizamos letras en minúsculas para amplitudes que pueden ser dependientes del tiempo en el caso estacionario y para aquellas que son constantes en dicho caso.
- vi* La fase es $\theta = 0$ cuando el desplazamiento es máximo y $\theta = \pi/2$ para desplazamiento cero como se puede ver de la Ec. (2) para $\gamma(t) = \theta$. No debe confundirse esta fase con el ángulo ϕ que subtiende el hilo del péndulo con la vertical.
- vii* Este procedimiento implica que se está midiendo la amplitud como una cantidad que es constante cuando el parámetro no varía temporalmente (cantidades en mayúsculas de acuerdo a la notación de la sección anterior).
- viii* Este poema de Don Juan me lo proporcionó José Luis del Río que amablemente tras una serie de pesquisas lo obtuvo del maravilloso archivo de María Esther Ortiz.
- ix* La traducción del esperanto al español la realizó el Lic. Luis L. Córdova Arellano, profesor de esperanto en la Facultad de Derecho - UNAM.
- x* En la referencia la variable de la ecuación diferencial es espacial, de manera que se reporta en términos de longitudes de onda y de la amplitud de la onda reflejada. La estructura de la ecuación es la misma, en este caso temporal, donde la ausencia de onda reflejada corresponde al caso adiabático.
1. M.J. Klein, *Paul Ehrenfest*, North Holland Amsterdam (1972) p. 251 y 269.
 2. G. Galilei, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Ed. Nacional Madrid (1981) pp. 289-291.
 3. R. Torretti, *The philosophy of physics*, CUP (1999) p. 188.
 4. H.R. Lewis, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 510.
 5. V.P. Ermakov, *Univ. Isv. Kiev* **20** (1880) 1.
 6. W.E. Milne, *Phys. Rev.* **35** (1930) 863.
 7. J.G. Hartley y J.R. Ray, *Phys. Rev. A* **24** (6) (1981) 2873.
 8. H. Moya Cessa y M. Fernández Guasti, *Phys. Lett. A* **311** (2003) 1.
 9. J.L. Reid y J.R. Ray, *J. Math. Phys.* **21** (7) (1980) 1583.
 10. C.J. Eliezer y A. Gray, *SIAM J. Appl. Math.* **30** (3) (1976) 463.
 11. M. Fernández Guasti and A. Gil-Villegas, in *Recent Developments in Mathematical and Experimental Physics*, eds. A. Macias, F. Uribe and E. Diaz, (Vol. C: Hydrodynamics and Dynamical Systems, Kluwer, NY, 2003) p. 159.
 12. F. Haas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 2925.
 13. Juan de Oyarzabal, *Ensayos sobre mecánica clásica*, UNAM, México (1984).
 14. Juan de Oyarzabal, A. Félix, M. Velazco, *Lecciones de física*, CECSA, México (1972).
 15. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press 3 ed 1976) p.157
 16. J.L. Boldú, H. Riveros R. y J. Rubio O., *Rev. Mex. Fís.* **22** (1973) E1.
 17. M. Fernández Guasti y A. Gil-Villegas, *Phys. Lett. A* **292** (4-5) (2002) 243.
 18. M. Fernández Guasti, *Physica D* **189** (2004) 188.
 19. M. Fernández Guasti, A. Gil-Villegas y R. Diamant, *Rev. Mex. Fís.* **46** (6) (2000) 530^x.
 20. M. Fernández Guasti, *Europhys. Lett.* **74** (2006) 1013.