

# Ley de reflexión para espejos planos en movimiento relativista

A. Ortiz-Acevedo, O. Mata-Méndez y J. Avendaño

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 07738 Zacatenco, México D.F., México.*

Recibido el 6 de julio de 2006; aceptado el 7 de junio de 2007

En este artículo estudiamos la reflexión de la luz sobre espejos planos móviles. Suponemos que el espejo es un reflector perfecto que está inclinado con respecto a la dirección de movimiento. Presentamos resultados analíticos que permiten determinar el ángulo de reflexión, la frecuencia reflejada y la presión de radiación en función del ángulo de incidencia, la frecuencia incidente, la velocidad del espejo y la orientación del espejo respecto a la dirección de movimiento. Se muestra que existe un ángulo de incidencia crítico para el cual la reflexión es rasante (el rayo luminoso reflejado es paralelo a la superficie del espejo). Analizamos numéricamente la influencia del ángulo de incidencia, la velocidad y la orientación del espejo en el ángulo de reflexión, en la frecuencia reflejada y en la presión de radiación. Obtenemos una expresión analítica para la determinación de la velocidad del espejo en términos de parámetros que pueden medirse experimentalmente.

*Descriptor:* Óptica; relatividad.

In this paper, we study the reflection of light on uniformly moving mirrors. The mirrors are assumed to be perfectly reflecting and oblique with respect to the direction of the movement. Analytical expressions for the angle of reflection, for the reflected frequency and for radiation pressure are given. In the particular case that the mirror moves away from the luminous ray a critical angle of incidence exists for which the reflected luminous ray is parallel to the surface of the mirror. We analyze numerically the influence of the angle of incidence, the speed and the orientation of the mirror in the reflection angle, reflected frequency and in the radiation pressure. Finally we obtain an analytic expression for the determination of the speed of the mirror in terms of parameters that can be measured experimentally.

*Keywords:* Optics; relativity.

PACS: 42.15.-i; 03.30.+p

## 1. Introducción

En los últimos años ha habido mucho interés en el estudio de la reflexión de la luz por superficies móviles. Así, se ha considerado la interacción del haz de un láser con cilindros y conos rotando [1]. En astrofísica se ha tratado la refracción y la reflexión de la luz por una interfase que separa dos medios que se mueven a velocidades relativistas [2]. Ha sido posible determinar con buena precisión la velocidad de un espejo móvil de baja velocidad a partir del análisis del efecto Doppler [3]. Se ha estudiado el interferómetro de Michelson-Morley en movimiento [4]. También se ha analizado la difracción que ocurre cuando una superficie rugosa perfectamente reflectora se desplaza a velocidades relativistas [5-6].

Solamente algunos pocos libros de texto incursionan en la óptica relativista, entre éstos es de mencionar que en el libro de McCrea [7] se ha dedicado un capítulo entero a esta rama de la óptica, aunque solamente se analiza un poco el caso de un espejo perpendicular a la dirección del movimiento. Otro es el libro de óptica de A. Sommerfeld [8], en el cual se estudian brevemente espejos planos relativistas perpendiculares y paralelos a la dirección de la velocidad.

En este artículo estudiamos la interacción de la luz con un espejo plano que está inclinado con respecto a la dirección de movimiento. Supondremos que el espejo es un reflector perfecto y que se mueve a velocidades relativistas con respecto a un observador inercial. Determinamos la relación general entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión para cualquier velocidad y orientación del espejo. Analizamos el cambio de frecuencia que experimenta la luz reflejada, así co-

mo la presión que ejerce la luz sobre el espejo en movimiento. Como una aplicación, en la última sección proponemos un método para determinar la velocidad de un espejo relativista.

Consideramos que tanto la presentación como la discusión de los resultados del presente artículo pueden ser de utilidad en cursos de nivel universitario que traten el tema de la relatividad especial. Hemos desarrollado la teoría a partir de las transformaciones de Lorentz y no sobre la forma covariante de las mismas. Aunque esta última presentación es más elegante y concisa, creemos conveniente mantener la exposición tradicional de la relatividad especial para hacerla accesible en cursos de nivel introductorio.

## 2. Espejo en movimiento

Consideremos, a la manera usual, un sistema inercial  $S'$  que se mueve con la velocidad  $V$  a lo largo del eje  $Ox$  de un sistema inercial  $S$ , donde supondremos que los ejes  $Ox$  y  $O'x'$  coinciden, y los ejes  $Oy$  y  $Oz$  son paralelos a los ejes  $O'y'$  y  $O'z'$ , respectivamente.

El cuadrimomento  $\vec{P}$  asociado a una onda electromagnética de frecuencia angular  $\omega$  y vector de onda  $\vec{k}$  ( $k = \omega/c$ ) está dado por

$$\vec{P} = \left( \frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k} \right). \quad (1)$$

De las transformaciones de Lorentz se deducen las conocidas leyes de transformación para  $\omega$  y  $\vec{k}$ :

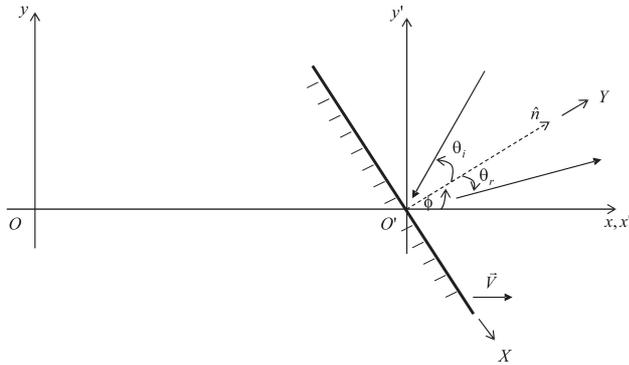


FIGURA 1. Espejo plano que se desplaza con velocidad constante  $V$  a lo largo del eje  $Ox$ . El espejo es perpendicular a la figura y su inclinación con respecto al eje  $Ox$  está dada por el ángulo  $\phi$ . Los ángulos de incidencia  $\theta_i$  y de reflexión  $\theta_r$  se determinan con respecto a la normal del espejo  $\hat{n}$ .

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta ck'_x), \tag{2}$$

$$k_x = \gamma(k'_x + \beta k'), \tag{3}$$

$$k_y = k'_y, \tag{4}$$

$$k_z = k'_z, \tag{5}$$

donde  $\beta = V/c$  y  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Consideremos un espejo plano perfectamente reflector en reposo en el origen de coordenadas de  $S'$  y paralelo al eje  $O'z'$ . Luego, como el espejo es perpendicular al plano  $O'x'y'$ , para fijar su posición en  $S'$  es suficiente dar el ángulo  $\phi'$  que hace la normal unitaria  $\hat{n}'$  de la superficie reflectora del espejo con el eje  $O'x'$ . El ángulo  $\phi'$  se medirá en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, siendo su intervalo  $0 \leq \phi' < 2\pi$ . La posición angular del espejo plano en  $S$  se determina de forma parecida, siendo  $\phi$  el ángulo que hace la normal unitaria  $\hat{n}$  de la superficie reflectora del espejo con el eje  $Ox$ , como se ilustra en la Fig. 1. Es inmediato darse cuenta de las transformaciones de Lorentz que  $\phi$  y  $\phi'$  se relacionan así:

$$\tan \phi = \frac{1}{\gamma} \tan \phi', \tag{6}$$

luego, a bajas velocidades tenemos  $\phi \approx \phi'$ , como debe ser, mientras que a altas velocidades el comportamiento es más complicado. Así, si el espejo no es paralelo a la dirección de movimiento ( $\phi' \neq 90^\circ$ ,  $\phi' \neq 270^\circ$ ), en el límite ultrarelativista ( $\beta \rightarrow 1$ ) la normal del espejo en movimiento tiende a orientarse con el eje  $Ox$  ( $\phi \rightarrow 0^\circ$  o  $\phi \rightarrow 180^\circ$ ). En la Fig. 2 se varía el ángulo  $\phi$  como función de velocidad relativa  $\beta$  para dos inclinaciones del espejo en reposo en el sistema  $S'$  ( $\phi' = 30^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Es importante resaltar que en la Fig. 2 puntos distintos corresponden a espejos distintos (*i.e.*, moviéndose a velocidades distintas).

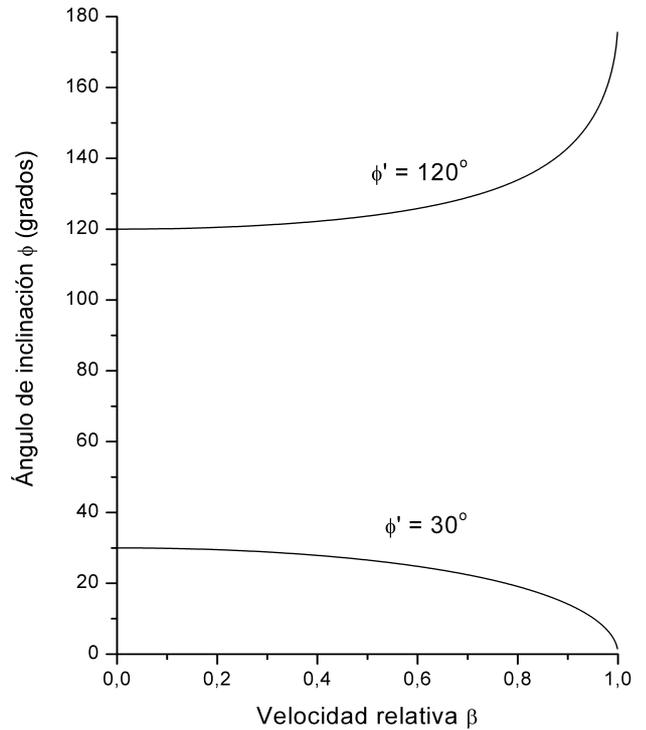


FIGURA 2. Ángulo de inclinación del espejo móvil  $\phi$ , en función de la velocidad relativa  $\beta$  para dos inclinaciones del espejo en reposo ( $\phi' = 30^\circ$  y  $\phi' = 120^\circ$ ).

Es importante dejar claro cómo se medirán los ángulos de incidencia y de reflexión, tanto en el sistema  $S$  como en el  $S'$ . Para esto, fijemos un sistema cartesiano bidimensional  $O'X'Y'$  en el espejo en reposo en  $S'$ , siendo el eje  $O'Y'$  paralelo al vector unitario  $\hat{n}'$ , y de igual forma fijemos, para cada instante de tiempo  $t$ , un sistema cartesiano bidimensional  $O'XY$  en el espejo móvil, siendo el eje  $O'Y$  paralelo al vector unitario  $\hat{n}$  (ver la Fig. 1). Con respecto al rayo incidente visto desde  $S'$ , sea  $\theta'_i$  el ángulo entre el rayo incidente y la normal  $\hat{n}'$ , este ángulo lo consideraremos positivo cuando esté en el segundo cuadrante y negativo en el primer cuadrante del sistema  $O'X'Y'$ . Si  $\theta'_r$  es el ángulo entre el rayo reflejado y la normal  $\hat{n}'$ , será positivo cuando esté en el primer cuadrante y negativo en el segundo cuadrante del sistema  $O'X'Y'$ . Las mismas definiciones se presentan desde el punto de vista del sistema inercial  $S$  donde los ángulos de incidencia  $\theta_i$  y de reflexión  $\theta_r$  se determinan con respecto al sistema cartesiano  $O'XY$  (ver Fig. 1). Podemos observar que cuando  $0 \leq \phi' < \pi/2$  y  $3\pi/2 < \phi' < 2\pi$  el rayo incidente se dirige hacia la parte negativa del eje  $Ox$ , mientras que cuando  $\pi/2 < \phi' < 3\pi/2$  el rayo incidente se dirige hacia la parte positiva del eje  $Ox$ .

### 3. Una propiedad relativista de los espejos

Demostremos una propiedad muy interesante que verifican los espejos planos con movimiento relativista. Como sabemos, del hecho que en el sistema  $S'$  (espejo en reposo) se verifican las leyes usuales de la óptica geométrica, es decir, el

ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión ( $\theta'_i = \theta'_r$ ) y la frecuencia del rayo incidente es igual a la frecuencia del rayo reflejado ( $\omega'_i = \omega'_r$ ), se deduce inmediatamente que  $\Delta\vec{k}'$  es paralelo a la normal  $\hat{n}'$ . A continuación mostramos que esto también se cumple para el espejo móvil, es decir, que  $\Delta\vec{k}$  y  $\hat{n}$  son paralelos desde el punto de vista del observador  $S$ .

Para el observador en  $S'$ , los vectores de propagación de los rayos incidentes y reflejados están dados por (ver Fig. 1):

$$\vec{k}'_i = k'[\cos(\phi' + \theta'_i + \pi)\hat{e}'_x + \text{sen}(\phi' + \theta'_i + \pi)\hat{e}'_y], \quad (7)$$

$$\vec{k}'_r = k'[\cos(\phi' - \theta'_i)\hat{e}'_x + \text{sen}(\phi' - \theta'_i)\hat{e}'_y], \quad (8)$$

donde,  $k' = k'_i = k'_r$  (por ser el sistema en reposo  $S'$ ). De aquí se deduce que el cambio del vector de onda en el sistema en reposo  $S'$  debido a la reflexión es:

$$\Delta\vec{k}' = \vec{k}'_r - \vec{k}'_i = 2k' \cos \phi' \cos \theta'_i \hat{e}'_x + 2k' \text{sen} \phi' \cos \theta'_i \hat{e}'_y. \quad (9)$$

De forma parecida para el observador en  $S$  se tiene:

$$\vec{k}_i = k_i[\cos(\phi + \theta_i + \pi)\hat{e}_x + \text{sen}(\phi + \theta_i + \pi)\hat{e}_y], \quad (10)$$

$$\vec{k}_r = k_r[\cos(\phi - \theta_r)\hat{e}_x + \text{sen}(\phi - \theta_r)\hat{e}_y], \quad (11)$$

siendo el cambio del vector de onda debido a la reflexión:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{k} &= \vec{k}_r - \vec{k}_i = [k_r \cos(\phi - \theta_r) + k_i \cos(\phi + \theta_i)] \hat{e}_x \\ &+ [k_r \text{sen}(\phi - \theta_r) + k_i \text{sen}(\phi + \theta_i)] \hat{e}_y, \end{aligned} \quad (12)$$

donde, para el observador  $S$  se tiene en general que  $\theta_i \neq \theta_r$  y  $\omega_i \neq \omega_r$ .

De las Ecs. (3) y (4), y del hecho que  $k' = k'_i = k'_r$ , se tiene que:

$$\Delta k_x = \gamma \Delta k'_x$$

y

$$\Delta k_y = \Delta k'_y, \quad (13)$$

luego, utilizando la Ec. (9) en estas últimas relaciones tenemos que  $\Delta\vec{k}$  puede expresarse así:

$$\Delta\vec{k} = 2k' \cos \theta'_i (\gamma \cos \phi', \text{sen} \phi', 0), \quad (14)$$

si ahora consideramos el producto vectorial de  $\Delta\vec{k}$  con la normal al espejo dada por  $\hat{n} = (\cos \phi, \text{sen} \phi, 0)$ , tendremos:

$$\begin{aligned} &2k' \cos \theta'_i (\gamma \cos \phi', \text{sen} \phi', 0) \times (\cos \phi, \text{sen} \phi, 0) \\ &= 2k' \cos \theta'_i (\gamma \cos \phi' \text{sen} \phi - \cos \phi \text{sen} \phi') \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (15)$$

y al tomar en cuenta la Ec. (6) se muestra que este vector es nulo. Con esto hemos probado la siguiente propiedad válida para un espejo móvil:

$$\Delta\vec{k} \times \hat{n} = \vec{0}, \quad (16)$$

luego,  $\Delta\vec{k}$  y  $\hat{n}$  son paralelos.

Expresemos la Ec. (16) de otra forma. Con respecto al sistema de coordenadas bidimensional  $O'XY$  del espejo móvil, tenemos

$$\vec{k}_i = (k_i \text{sen} \theta_i, -k_i \cos \theta_i), \quad (17)$$

$$\vec{k}_r = (k_r \text{sen} \theta_r, k_r \cos \theta_r). \quad (18)$$

De estas ecuaciones y considerando que la normal unitaria a este espejo está dada por  $\hat{n} = (0, 1)$ , se obtiene inmediatamente la expresión siguiente:

$$k_i \text{sen} \theta_i = k_r \text{sen} \theta_r. \quad (19)$$

Esto significa que a pesar de que el espejo se está moviendo, la componente tangencial al espejo del momento lineal total del fotón debe conservarse.

## 4. Las leyes relativistas de los espejos planos

En lo que sigue estaremos interesados en determinar las leyes que rigen a los espejos planos desde el punto de vista del observador en  $S$ . Dada la inclinación del espejo  $\phi$  con respecto a la dirección del movimiento, el ángulo de incidencia  $\theta_i$  y la frecuencia incidente  $\omega_i$ , deseamos determinar el ángulo de reflexión  $\theta_r$ , la frecuencia reflejada  $\omega_r$  y la presión de radiación.

### 4.1. El ángulo de reflexión

La Ec. (19) se puede escribir como sigue:

$$\frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{\text{sen} \theta_i}{\text{sen} \theta_r}. \quad (20)$$

Como hemos visto, este resultado es consecuencia únicamente de las Ecs.(3)-(5), es decir, se obtiene a partir de las transformaciones relativistas del vector de onda. Luego, todavía tenemos a nuestra disposición la Ec. (2), con la cual podremos obtener otra relación independiente para  $\omega_r/\omega_i$ . Para esto, consideremos la transformación inversa de la Ec. (2):

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta ck_x), \quad (21)$$

luego, para los rayos incidente y reflejado se tiene

$$\omega'_i = \gamma(\omega_i - \beta ck_{ix}) = \gamma(\omega_i + \beta \omega_i \cos(\phi + \theta_i)), \quad (22)$$

$$\omega'_r = \gamma(\omega_r - \beta ck_{rx}) = \gamma(\omega_r - \beta \omega_r \cos(\phi - \theta_r)), \quad (23)$$

y dado que  $\omega'_i = \omega'_r$ , se obtiene la expresión buscada:

$$\frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{1 + \beta \cos(\phi + \theta_i)}{1 - \beta \cos(\phi - \theta_r)}. \quad (24)$$

Al igualar las Ecs. (20) y (24) obtenemos

$$\frac{\text{sen} \theta_i}{1 + \beta \cos(\phi + \theta_i)} = \frac{\text{sen} \theta_r}{1 - \beta \cos(\phi - \theta_r)}, \quad (25)$$

o de manera equivalente se siguen las expresiones

$$\frac{\sin \theta_i - \sin \theta_r}{\sin (\theta_i + \theta_r)} = \beta_n, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{1 + \beta_n \cos \theta_i}{1 - \beta_n \cos \theta_r},$$

donde  $\beta_n \equiv \vec{\beta} \cdot \hat{n} = \beta \cos \phi$ ; (26)

resultado que representa la ley de la reflexión para un espejo plano en movimiento relativista. Como se observa esta ley depende del parámetro de velocidad  $\beta = V/c$  y de la inclinación del espejo  $\phi$  (ambos parámetros contenidos en la varia-

ble  $\beta_n$ , que es la componente de la velocidad relativa a lo largo de la normal del espejo). Ésta es una ecuación trascendental que nos relaciona el ángulo de incidencia  $\theta_i$  y el ángulo de reflexión  $\theta_r$ , ambos medidos desde el sistema  $S$ .

Aunque la Ec. (25) o Ec. (26), tal y como están dadas, nos proporcionan la ley de la reflexión, es conveniente para facilitar su análisis obtener el ángulo de reflexión  $\theta_r$  como función explícita de  $\theta_i$ ,  $\beta = V/c$  y  $\phi$ . Después de un poco de álgebra la solución de la Ec. (26) resulta

$$\cos \theta_r = \frac{\beta \sin^2 \theta_i \cos \phi \pm \sqrt{(1 + \beta \cos \theta_i \cos \phi)^2 (\cos \theta_i + \beta \cos \phi)^2}}{(\cos \theta_i + \beta \cos \phi)^2 + \sin^2 \theta_i}, \quad (27)$$

para seleccionar el signo conveniente del radical consideremos el límite  $V \rightarrow 0$ , en este límite debe verificarse que  $\theta_i = \theta_r$ , de lo cual se sigue que el signo positivo es el adecuado. Luego, tenemos

$$\cos \theta_r = \frac{2\beta_n + (1 + \beta_n^2) \cos \theta_i}{1 + 2\beta_n \cos \theta_i + \beta_n^2}; \quad (28)$$

éste es el resultado buscado. De la Ec. (28) podemos ver que existe asimetría respecto a los ángulos de incidencia y de reflexión, esto es, si el haz reflejado llegase a ser el incidente, éste no se reflejará a un ángulo  $\theta_i$  sino a un ángulo  $\chi$  dado por

$$\cos \chi = \frac{2\beta_n + (1 + \beta_n^2) \cos \theta_r}{1 + 2\beta_n \cos \theta_r + \beta_n^2}. \quad (29)$$

Cuando las velocidades del espejo y del haz luminoso tienen sentido contrario, de la Ec. (28) se tiene que  $\cos \theta_r > \cos \theta_i$ , lo cual implica que  $\theta_r < \theta_i$ . Mientras que cuando estas velocidades tienen el mismo sentido, tenemos  $\cos \theta_r < \cos \theta_i$ , lo cual implica que  $\theta_r > \theta_i$ . Este comportamiento se hace más patente conforme la velocidad del espejo aumenta. Incluso, en el último caso, al aumentar la velocidad el coseno del ángulo de reflexión podría llegar a ser negativo de acuerdo a la Ec. (28), lo cual físicamente significaría que el ángulo de reflexión sería mayor de  $90^\circ$  (el haz de luz estaría atravesando el espejo), lo cual no es posible debido a nuestra suposición inicial de un espejo reflector perfecto. Es decir, la Ec. (28) fue obtenida bajo la suposición heurística de que siempre existe el rayo reflejado. Esto implica que existe un ángulo crítico  $\theta_i^c$  determinado por la condición  $\cos \theta_r = 0$  ( $\theta_r = 90^\circ$ ). De la Ec. (28) se sigue que  $\theta_i^c$  está dado por

$$\cos \theta_i^c = -\frac{2\beta_n}{1 + \beta_n^2}. \quad (30)$$

Es importante mencionar que no nos es posible conocer lo que ocurre cuando se rebasa el ángulo de incidencia crítico debido a que en la teoría hemos supuesto que siempre existe un rayo incidente y uno reflejado.

En la Fig. 3, graficamos el ángulo de reflexión  $\theta_r$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando la velocidad relativa del espejo es grande ( $\beta = 0.8$ ) y las inclinaciones del

espejo móvil son  $\phi = 0, 35, 90, 140$  y  $180^\circ$ . Podemos observar el ángulo crítico de incidencia (línea punteada) cuando  $\phi = 140^\circ$  y  $\phi = 180^\circ$ . En la Fig. 4 consideramos a  $\theta_r$  como función de  $\beta$  cuando el ángulo de incidencia  $\theta_i = 30^\circ$  se mantiene fijo. Cada curva corresponde a una inclinación fija del espejo móvil. En la Fig. 5, consideramos a  $\theta_r$  como función de  $\phi$  para un ángulo de incidencia  $\theta_i$  igual a  $30^\circ$  y  $\beta = 0.1, 0.5, 0.7$  y  $0.95$ . Podemos notar de manera inmediata la presencia de dos nodos, para  $\phi = 90$  y  $270^\circ$  (espejo

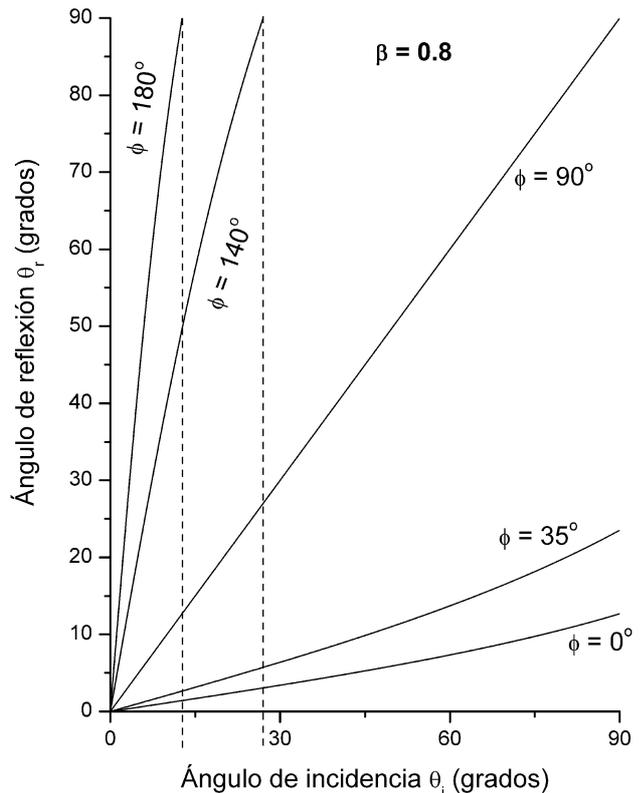


FIGURA 3. El ángulo de reflexión  $\theta_r$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , para la velocidad relativa  $\beta = 0.8$  y las inclinaciones del espejo  $\phi = 0, 35, 90, 140, 180^\circ$ . Las líneas verticales punteadas determinan el ángulo crítico para la reflexión rasante.

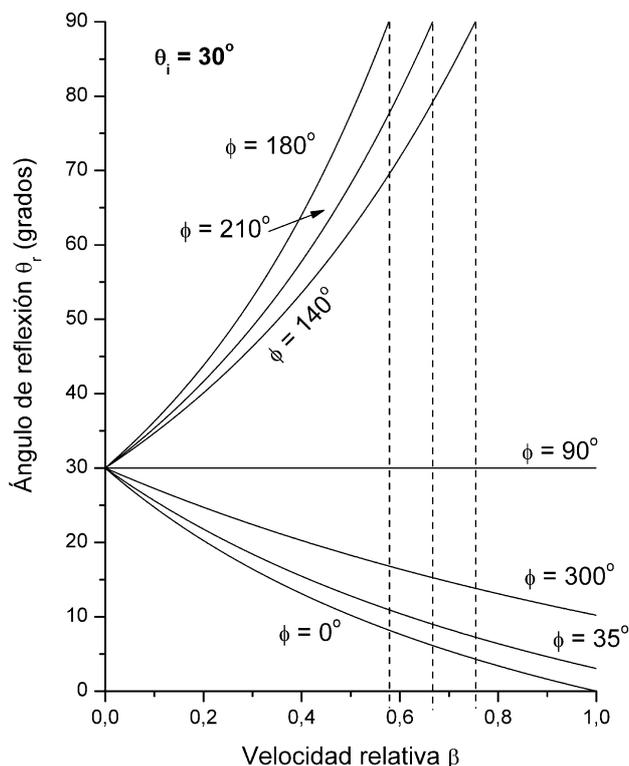


FIGURA 4. El ángulo de reflexión  $\theta_r$  como función de la velocidad relativa  $\beta$ , cuando  $\theta_i = 30^\circ$  y las inclinaciones del espejo  $\phi = 0, 35, 90, 140, 180, 210, 300^\circ$ . Las líneas verticales punteadas señalan la velocidad a la cual el ángulo  $\theta_i = 30^\circ$  llega a ser el ángulo crítico para la correspondiente inclinación del espejo.

paralelo a la dirección del movimiento). En estos nodos el ángulo de incidencia es igual al de reflexión para cualquier velocidad dada.

**4.2. La frecuencia reflejada**

Podemos obtener la frecuencia relativa reflejada  $F = \omega_r/\omega_i$  usando la Ec. (20) y la Ec. (28). Sin embargo, es conveniente tener una expresión explícita para la frecuencia reflejada. Para obtener ésta, rescribimos la Ec. (20) usando la segunda expresión de la Ec. (26) y la definición de frecuencia relativa como

$$F = \frac{1 + \beta_n \cos \theta_i}{1 - \beta_n \cos \theta_r}; \tag{31}$$

sustituyendo ahora el  $\cos \theta_r$  dado por la Ec. (28) obtenemos la expresión deseada

$$\frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{1 + \beta_n \cos \theta_i + \beta_n^2}{1 - \beta_n^2}. \tag{32}$$

En la Fig. 6 hemos graficado la frecuencia relativa  $\omega_r/\omega_i$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando  $\beta = 0.8$  y la inclinación del espejo móvil es  $\phi = 0, 35, 90, 140$  y  $180^\circ$ . Cuando  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 35^\circ$  observamos que la frecuencia reflejada disminuye al aumentar el ángulo de incidencia. Para  $\phi = 90^\circ$  no hay cambio de frecuencia. Cuando  $\phi = 0$  y

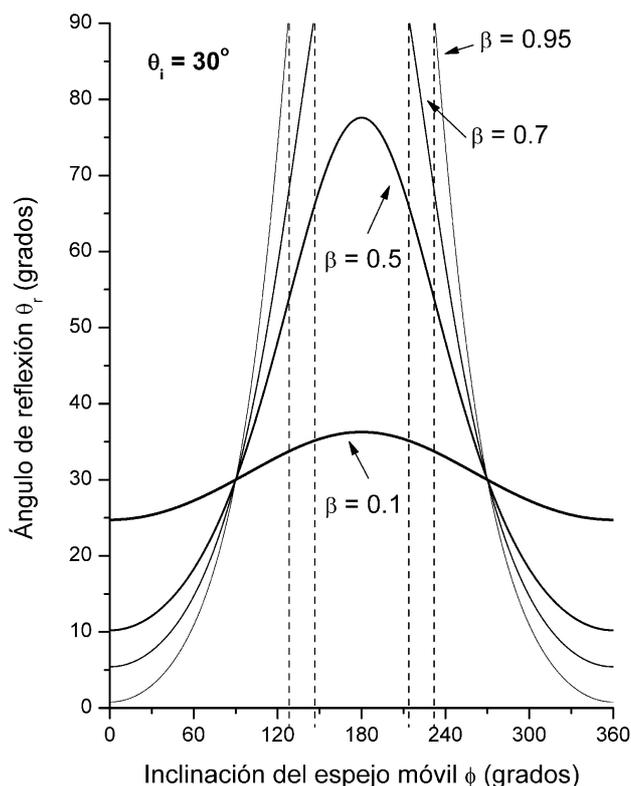


FIGURA 5. El ángulo de reflexión  $\theta_r$  como función de la inclinación del espejo  $\phi$ , para  $\theta_i = 30^\circ$  y  $\beta = 0.1, 0.5, 0.7, 0.95$ . Las líneas verticales punteadas señalan la inclinación del espejo a la cual el ángulo  $\theta_i = 30^\circ$  llega a ser el ángulo crítico para la correspondiente velocidad que señalan las flechas.

$\phi = 180^\circ$  la frecuencia reflejada es menor que la incidente, sin embargo, aumenta hacia la incidente conforme el rayo incidente se aleja de la normal del espejo hasta llegar al ángulo crítico (líneas verticales).

En la Fig. 7 graficamos la frecuencia relativa  $\omega_r/\omega_i$  como función de la velocidad relativa  $\beta$ , cuando  $\theta_i = 30^\circ$  y  $\phi = 0, 35, 90, 90$  y  $180^\circ$ . Como es de esperarse, para todas las curvas  $\omega_i = \omega_r$  cuando la velocidad del espejo es nula. Tenemos que cuando  $\phi < 90^\circ$  la frecuencia reflejada aumenta con la velocidad, siendo este aumento considerablemente grande para  $\phi = 0^\circ$ , por ejemplo, resulta  $\omega_r = 186.6696\omega_i$  cuando  $\beta = 0.99$ . Esta última situación corresponde al máximo de energía dado a los fotones debido a la colisión, tal y como se presenta con bolas de billar colisionando contra una pared móvil. Para  $\phi = 90^\circ$ , recobramos  $\omega_i = \omega_r$ . Una situación diferente se tiene cuando  $\phi = 180^\circ$  y  $\phi = 180^\circ$ , la frecuencia reflejada es menor que la incidente teniéndose que los fotones pierden energía por la colisión, y conforme la velocidad aumenta se alcanza la reflexión rasante (líneas verticales).

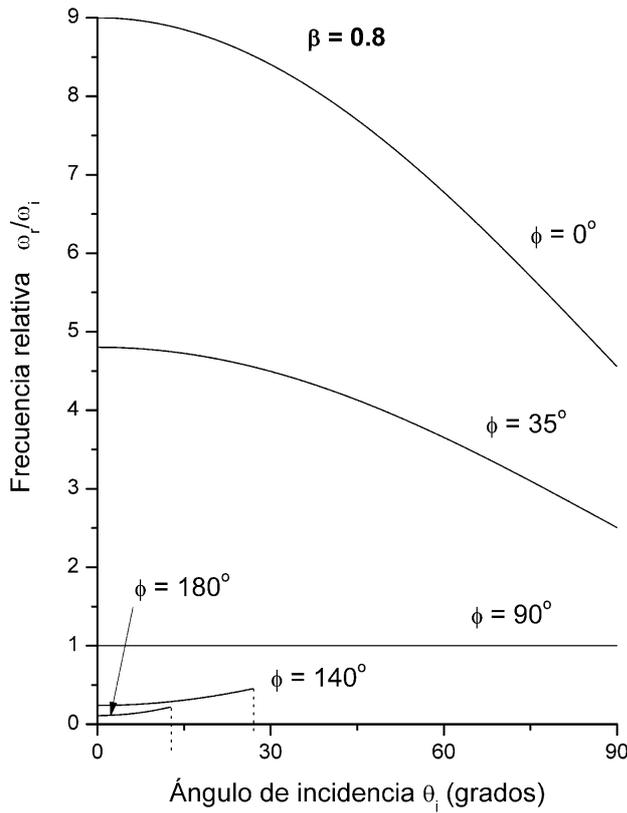


FIGURA 6. La frecuencia relativa de reflexión  $\omega_r/\omega_i$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando  $\beta = 0.8$  y  $\phi = 0, 35, 90, 140, 180^\circ$ . Las líneas verticales punteadas señalan el ángulo crítico cuando el espejo se aleja del rayo incidente a velocidad  $\beta = 0.8$  para las inclinaciones del espejo  $\phi = 140^\circ$  y  $\phi = 180^\circ$ .

En la Fig. 8 graficamos  $\omega_r/\omega_i$  como función de la inclinación del espejo  $\phi$ , para diversas velocidades relativas  $\beta = 0.1, 0.5, 0.7$  y  $0.95$ , cuando el ángulo de incidencia es  $\theta_i = 30^\circ$ . Observamos de la figura los dos nodos que se presentan cuando el espejo es paralelo a la dirección de movimiento ( $\phi = 90$  y  $270^\circ$ ). Entre los nodos la frecuencia relativa es menor a la unidad, lo que significa una pérdida de energía de los fotones. En cambio fuera de la región entre los nodos ocurre lo contrario, la frecuencia aumenta tal y como ocurriría cuando una bola de billar choca con una pared rígida cuyas velocidades son de sentido contrario.

**4.3. La presión de radiación**

Para completar nuestro estudio de los espejos relativistas, es conveniente además de haber obtenido la ley de reflexión y el cambio de frecuencia por la reflexión, determinar la presión de radiación relativista que “siente” el espejo móvil. Para esto, consideremos la Ec. (12), la definición de la frecuencia normalizada  $F = \omega_r/\omega_i$ , la ecuación  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  y la expresión  $ck = \omega$ , resultando que el cambio de momento lineal sufrido por un fotón que colisiona con el espejo está dado por

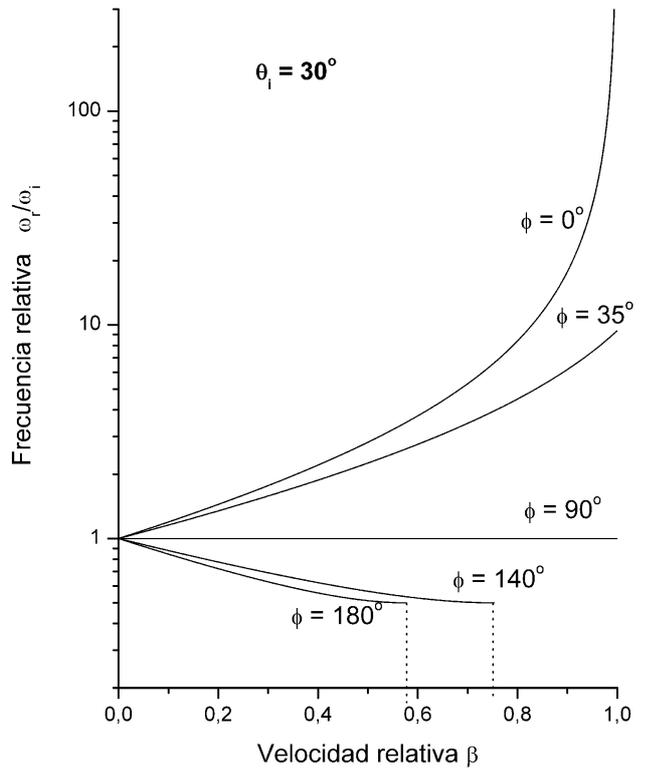


FIGURA 7. La frecuencia relativa  $\omega_r/\omega_i$  como función de la velocidad relativa  $\beta$ , cuando  $\theta_i = 30^\circ$  y  $\phi = 0, 35, 90^\circ, \phi = 140, 180^\circ$ . Las líneas verticales punteadas señalan la velocidad a la cual el ángulo  $\theta_i = 30^\circ$  se convierte en el ángulo crítico para la correspondiente inclinación del espejo.

$$\frac{c}{\hbar\omega_i} \Delta\vec{p} = [F \cos(\phi - \theta_r) + \cos(\phi + \theta_i)] \hat{e}_x + [F \sin(\phi - \theta_r) + \sin(\phi + \theta_i)] \hat{e}_y. \quad (33)$$

Para la determinación de la presión debemos considerar la componente normal al espejo de  $\Delta\vec{p}$ , la cual se expresa así:

$$\frac{c}{\hbar\omega_i} \Delta p = \frac{c}{\hbar\omega_i} \Delta\vec{p} \cdot \hat{n} = F \cos(\phi - \theta_r) \cos \phi + \cos(\phi + \theta_i) \cos \phi + F \sin(\phi - \theta_r) \sin \phi + \sin(\phi + \theta_i) \sin \phi, \quad (34)$$

con  $\hat{n} = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y$  (vector unitario normal al espejo) y donde hemos hecho uso de que  $\Delta\vec{p}$  es normal al espejo [Ec. (16)]. Al simplificar esta última expresión tenemos

$$\Delta p = \frac{\hbar\omega_i}{c} [F \cos \theta_r + \cos \theta_i]. \quad (35)$$

Ahora, supongamos que el observador  $S$  determina que sobre el espejo móvil inciden (con el ángulo de incidencia  $\theta_i$ )  $N_i$  fotones por unidad de tiempo y de área, luego, de la Ec. (35) se obtiene que el cambio de momento lineal normal total por unidad de tiempo y de área es

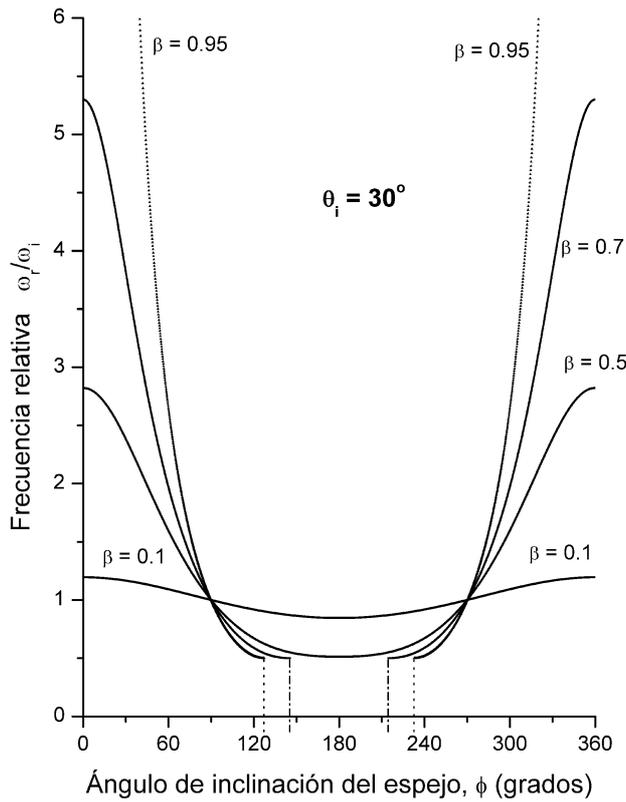


FIGURA 8. La frecuencia relativa  $\omega_r/\omega_i$  como función de la inclinación del espejo  $\phi$ , para  $\theta_i = 30^\circ$  y  $\beta = 0.1, 0.5, 0.7, 0.95$ . Las líneas verticales punteadas señalan la inclinación del espejo a la cual el ángulo  $\theta_i = 30^\circ$  se convierte en el ángulo crítico para la correspondiente velocidad.

$$N_i \Delta p = \frac{N_i \hbar \omega_i}{c} [F \cos \theta_r + \cos \theta_i]; \quad (36)$$

así, la presión de radiación está dada por

$$P = \frac{N_i \hbar \omega_i}{c} [F \cos \theta_r + \cos \theta_i], \quad (37)$$

aunque éste es el resultado buscado, es conveniente expresarlo de otra forma. Para esto, apliquémoslo a un espejo que está en reposo en  $S'$ , con su normal apuntando en la dirección del movimiento ( $\phi = 0^\circ$ ), de la Ec. (37) se tiene

$$P = \frac{N_i \hbar \omega_i}{c} 2 \cos \theta_i, \quad (38)$$

ya que  $F = 1$  y  $\theta_i = \theta_r$ , y como esta presión debe de coincidir con el resultado conocido para espejos en reposo en  $S'$  dada por

$$P = 2 \frac{I_i}{c} \cos^2 \theta_i, \quad (39)$$

donde  $I_i$  es la intensidad del haz incidente, el termino  $I_i/c$  corresponde a la presión que ejerce el haz cuando incide normalmente sobre el espejo [9], el  $\cos^2 \theta_i$  es debido a que el haz cae oblicuamente y el 2 se sigue del hecho que el espejo es perfectamente reflector (ver problema 3.26 de Ref. 9). De estas dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$I_{ef} \cos \theta_i = N_i \hbar \omega_i, \quad (40)$$

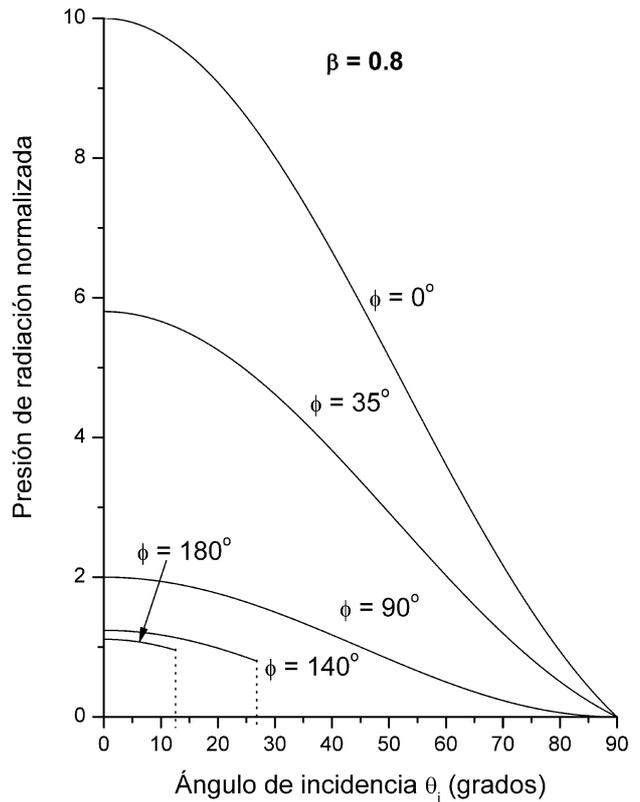


FIGURA 9. La presión de radiación normalizada a la intensidad incidente  $I_i/c$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando  $\beta = 0.8$  y  $\phi = 0, 35, 90, 140, 180^\circ$ . Las líneas verticales punteadas señalan el ángulo crítico.

con lo cual tenemos:

$$P = \frac{I_i}{c} \cos \theta_i [F \cos \theta_r + \cos \theta_i], \quad (41)$$

ésta es la expresión de la presión de radiación relativista deseada.

En la Fig. 9 graficamos la presión de radiación normalizada a la intensidad incidente  $I_i/c$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando el espejo se desplaza a alta velocidad ( $\beta = 0.8$ ) y para diferentes inclinaciones del espejo respecto a la dirección de su movimiento dadas por  $\phi = 0, 35, 90, 140$  y  $180^\circ$ . En general y como era de esperarse se observa una caída de la presión con el ángulo de incidencia, la cual tiende a cero, esto se debe al  $\cos \theta_i$  que interviene fuera del paréntesis de la Ec. (41). Cuando  $\phi = 140$  y  $180^\circ$  la presión de radiación normalizada a sido graficada hasta el ángulo en que se establece la reflexión rasante (líneas verticales punteadas).

### 5. Determinación de la velocidad del espejo

Como hemos mencionado en la introducción, en la Ref. 1 se ha considerado la interacción de un haz de un láser con cilindros y conos rotando, determinándose la relación entre el espectro reflejado y los parámetros de los objetos rotando. A

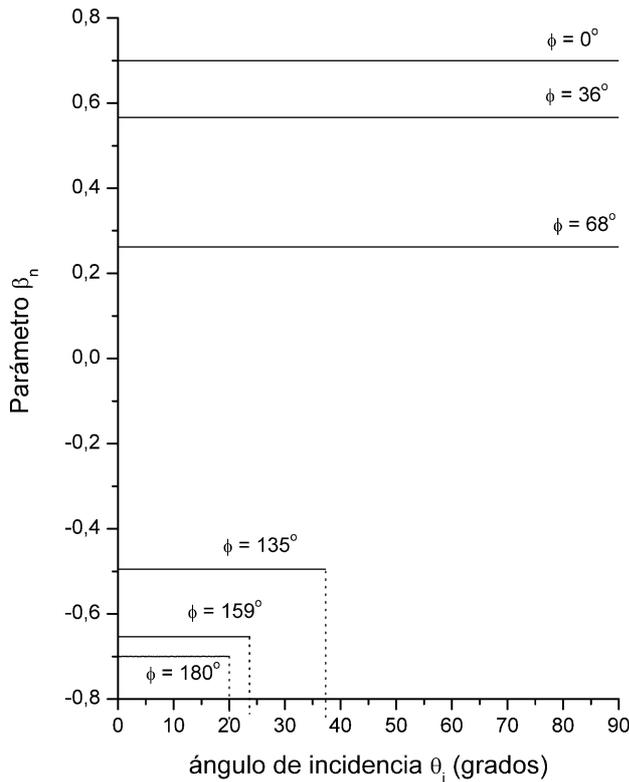


FIGURA 10. El parámetro  $\beta_n = \beta \cos \phi$  como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , cuando  $\beta = 0.7$  y  $\phi = 0, 36, 68, 135, 159, 180^\circ$ .

la luz de los resultados del presente artículo, podemos considerar que el método utilizado en la Ref. 1 es sólo aproximado, ya que como el interferómetro es un aparato extremadamente sensible, los efectos relativistas aún para bajas velocidades influyen de manera considerable en los resultados. Así, si se requiere determinar con alta precisión los parámetros de los conos o cilindros mediante interferometría, y más aún si el objeto tiene una velocidad apreciable, es necesario considerar los resultados de este artículo. Un estudio más completo en esta dirección está en curso, pero, a manera de ilustración, determinaremos la velocidad de un espejo plano que se mueve a velocidades relativistas. Hay tres procedimientos para obtener la velocidad, en el primero podemos despejar a  $\beta$  de la Ec. (28), en el segundo de la Ec. (32), y en el tercero de la Ec. (30).

Al despejar a  $\beta$  de la Ec. (28), resulta después de un poco de álgebra la siguiente expresión:

$$\beta = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\text{sen}[(\theta_r - \theta_i)/2]}{\text{sen}[(\theta_r + \theta_i)/2]}, \quad (42)$$

con la condición que el espejo no es paralelo a la dirección de movimiento (*i.e.*,  $\phi \neq 90^\circ$ ,  $\phi \neq 270^\circ$ ). Esta expresión nos permite obtener la velocidad relativista del objeto si hemos determinado el ángulo de inclinación del espejo  $\phi$ , el ángulo de incidencia  $\theta_i$  y el ángulo de reflexión  $\theta_r$ . Como se observa, esta ecuación es muy simple, lo cual nos ha sorprendido ya que esperábamos un resultado más complicado.

Hemos realizado muchas simulaciones numéricas y hemos constatado que la Ec. (42) efectivamente proporciona la

velocidad del espejo. Para esto, hemos determinado para diversas velocidades el ángulo de reflexión a partir de resultados similares a los dados en la Fig. 2, y luego, empleando la Ec. (42) hemos podido determinar la velocidad en todos los casos tratados. Para ilustrar estos resultados, en la Fig. 10 hemos graficado el parámetro  $\beta_n = \beta \cos \phi$  contra el ángulo de incidencia, cuando  $\beta = 0.7$  para diferentes ángulos de inclinación del espejo respecto a la dirección de su movimiento. Las rectas paralelas al eje de las abscisas nos indican que se ha obtenido la misma velocidad independientemente del ángulo de incidencia, la cual corresponde efectivamente a  $\beta = 0.7$ .

También hemos determinado la velocidad del espejo a partir de la Ec. (32), el resultado es el siguiente:

$$\beta = \frac{-\cos \theta_i + [\cos^2 \theta_i + F^2 - 1]^{1/2}}{\cos \phi (F + 1)}, \quad (43)$$

esta ecuación en principio nos permite obtener la velocidad si se ha determinado el ángulo de incidencia  $\theta_i$  y la frecuencia relativa  $F$ . Hemos realizado las mismas pruebas que con la Ec. (42), para esto hemos obtenido la frecuencia relativa para distintos ángulos de incidencia, diversas velocidades y distintos ángulo de inclinación del espejo respecto a la dirección de su movimiento, y hemos recobrado la velocidad a partir de la Ec. (43).

Como hemos mencionado antes, la Ec. (30) nos proporciona una manera más para determinar la velocidad del espejo móvil en el caso particular que el espejo se aleja del rayo incidente. En este caso podemos modificar experimentalmente el ángulo de incidencia hasta alcanzar el ángulo de incidencia crítica, *i.e.*, cuando se produce la reflexión rasante, y a partir de este valor crítico determinar la velocidad del espejo mediante la expresión

$$\beta = -\frac{1 - \text{sen} \theta_i^c}{\cos \phi \cos \theta_i^c} \quad (44)$$

obtenida de la Ec. (30).

## 6. Conclusiones

En este artículo hemos estudiado las leyes de la reflexión óptica para espejos planos que se mueven a velocidades relativistas. Se encontró que el ángulo de reflexión no es igual al ángulo de incidencia. Se estudió también la frecuencia del rayo reflejado en función de varios parámetros como: el ángulo incidente, la inclinación del espejo móvil respecto a la dirección del movimiento, la velocidad del espejo. De la misma manera se estudió la presión de radiación sobre el espejo móvil en función de los mismos parámetros. Como aplicación de los resultados obtenidos hemos propuesto un método para determinar la velocidad relativista del espejo plano, habiéndose conocido previamente la inclinación del espejo, el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de COFAA-IPN (México).

- 
1. I. Bankman, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 465.
  2. G. Cavalleri y E. Tonni, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 3478.
  3. T. James Belich, Ryan P. Lahm, Richard W. Peterson y Chad D. Whipple, *Am. J. Phys.* **65** (1997) 186.
  4. R.A. Schumacher, *Am. J. Phys.* **62** (1994) 609.
  5. M.K. Abdelazeez, Lester C. Peach y Suresh R. Borkar, *IEEE Trans. on Antennas and Propag.* **AP-27** (1979) 679.
  6. J. Cooper, *IEEE Trans. on Antennas and Prop.* **AP-28** (1980) 791.
  7. W.H. McCrea, "Física relativista" (U.T.E.H.A.- México, 1965) Cap.5, Sec.28.
  8. A. Sommerfeld, "Optics" (Academic Press, NY, 1964) Cap.2, Sec.13.
  9. E. Hecht, "Óptica" (Addison Wesley Iberoamericana, Tercera Edición, Madrid, 2000) Cap. 3, Sec 3.3.4.