

Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica

S. Flores-García

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
Avenida del charro 450 Nte., 32310, Ciudad Juárez Chih.,
e-mail: sergiflo@hotmail.com

M.D. Gonzalez-Quezada y A. Herrera-Chew

Instituto tecnológico de Ciudad Juárez,
Avenida Tecnológico 1340, Fracc. Crucero 32500, Ciudad Juárez Chih.,
e-mail: doloresgo73@hotmail.com, aleiz_herrera@yahoo.com.mx

Recibido el 7 de diciembre de 2006; aceptado el 5 de junio de 2007

Una comprensión de las propiedades básicas de los vectores es fundamental para el entendimiento de las operaciones entre vectores. Muchos estudiantes en los cursos introductorios de física no desarrollan un aprendizaje significativo de la naturaleza vectorial de las cantidades físicas como: fuerza, aceleración, tensión y velocidad. Para promover el entendimiento conceptual de estas cantidades es necesaria una exploración de los problemas de orden cognitivo que los estudiantes presentan a través de una enseñanza tradicional o por medio de una modificación en la instrucción. Esta investigación muestra las dificultades de los alumnos que fueron detectadas y caracterizadas durante el proceso de aprendizaje de las operaciones de suma y diferencia de vectores en su contexto. Las fuentes de información son algunas universidades de Estados Unidos y una universidad en México.

Descriptores: Física conceptual; dificultades de aprendizaje.

An understanding of the basic properties of vectors is fundamental to understand vector operations. Many students in the introductory physics courses do not develop a meaningful understanding of the vector nature of some physical quantities such as: Force, acceleration, tension and velocity. To foster a conceptual understanding of these quantities, an exploration of the cognitive problems is necessary through a traditional or a modified instruction. This investigation shows the students' difficulties detected and characterized during the teaching process of the operations of addition and subtraction of vectors in their context. The information sources are some universities in the United States and one university in Mexico.

Keywords: Conceptual physics; learning difficulties.

PACS: 01.40.d; 01.40.Fk; 01.49.Ha

1. Introducción

Para la mayoría de los alumnos de los cursos introductorios de física, la secuencia inicial de tópicos es cinemática, seguido por dinámica. La primera exposición en el estudio de la física tiene a la segunda ley de Newton –una ecuación vectorial– como su tema central. Por esta razón, la percepción de los estudiantes de lo que la física es, y qué significa realmente *hacer* física, es extremadamente influenciada por este tópico.

En el caso ideal, los estudiantes entienden de este tópico que los principios fundamentales de física son ideas poderosas que tienen amplia aplicabilidad. En varias ocasiones los estudiantes fallan al encontrar las conexiones entre las ideas que son presentadas. En lugar de ver a la física como un objeto de conocimiento cimentado en un conjunto de ideas fundamentales, ellos adquieren la impresión que la física es una colección de ecuaciones de contexto específico[1] que deben ser memorizadas.

Un entendimiento de la mecánica newtoniana como un campo de conocimientos coherentes requiere un entendimiento de la suma de vectores (para encontrar la fuerza neta), resta de vectores (para encontrar una aceleración), y el reco-

nocimiento de que la segunda ley de Newton requiere estas dos cantidades independientemente determinables.

Esperamos que una investigación del entendimiento del estudiante de las operaciones fundamentales entre vectores promoverá el desarrollo de currículo que sea más efectivo para fortalecer la visión de la física por parte de los estudiantes como un campo de estudio coherente, más que como una colección de hechos individuales. En este artículo se presentarán resultados de una investigación acerca del entendimiento por parte del estudiante de las operaciones de suma y resta entre vectores. Las preguntas de investigación que esperamos responder son:

- 1) ¿Pueden los estudiantes sumar y restar vectores?
- 2) ¿Pueden los estudiantes desarrollar un aprendizaje significativo de los vectores dentro de su propio contexto gráfico a través de una instrucción tradicional?
- 3) ¿Es posible que los estudiantes entiendan las operaciones de suma y resta entre vectores modificando su instrucción en base a un énfasis gráfico?

La mayoría de los profesores de los cursos introductorios de física reconocen que *pensar* en las cantidades físicas co-

mo cantidades vectoriales es difícil para los estudiantes. Aun cuando los instructores consistentemente modelan problemas de la segunda ley de Newton comenzando con diagramas de cuerpo libre, muchos estudiantes evitan estas reglas dramáticas. Existe una tendencia, aun entre estudiantes capaces, a utilizar componentes de fuerzas inmediatamente, y a memorizar lo que estos componentes son en casos específicos, más que derivarlos de la geometría de la situación.

2. Investigación previa

Aguirre y Ericsson[2] entrevistaron a 20 estudiantes de décimo grado utilizando dos preguntas relacionadas con un bote en un lago (con el fin de investigar las ideas acerca de la posición relativa) y un bote en un río (para investigar las ideas acerca de *marcos de referencia* y *velocidades relativas*). Ellos desarrollaron una serie de *reglas de inferencia* que los estudiantes parecen utilizar para determinar posiciones y velocidades. Muchas de estas reglas de inferencia se refieren a un movimiento relativo. Relevante a esta investigación, ellos determinaron que unos pocos estudiantes creyeron que el resultado de de dos desplazamientos subsecuentes de un objeto tenían una magnitud igual a la suma de los desplazamientos individuales aun cuando los dos desplazamientos son en distintas direcciones.

Knight[3] exploró la habilidad de los estudiantes para:

- 1) reconocer y utilizar las componentes de un vector;
- 2) evaluar la magnitud y dirección de un vector;
- 3) sumar dos vectores gráficamente; y
- 4) sumar dos vectores utilizando componentes.

El *Vector Knowledge Test* se aplicó a 286 estudiantes inscritos en el primer cuarto de un curso introductorio de física basada en cálculo. Estos alumnos pertenecían al primer semestre de varias carreras de ingeniería. El nivel del académico es equivalente a los cursos ordinarios de física introductoria (mecánica clásica) que se imparten durante los primeros semestres en la mayoría de las universidades de México. El examen se administró antes de cualquier instrucción relacionada con el estudio de vectores. Solamente el 30 % de los estudiantes pudieron escribir una breve definición de un vector, y solamente 43 % de los estudiantes pudieron sumar dos vectores gráficamente. Cerca del 15 % pudieron expresar un vector dado como una magnitud y un ángulo. Knight concluyó que los estudiantes que comienzan en física necesitan una instrucción y práctica explícitas con el uso de vectores. La mayoría de los estudiantes no comienzan los cursos introductorios con el suficiente conocimiento de vectores para entender las bases principales de la mecánica newtoniana.

Nguyen y Meltzer[4] diseñaron un *quiz* con siete problemas, la mayoría de ellos fueron de carácter gráfico. Es importante mencionar que un *quiz* es un examen pequeño donde el alumno tiene en promedio diez o quince minutos para

contestarlo. Se utiliza como elemento didáctico para fines de investigación o ambos. Este *quiz* se administró a estudiantes en todos los cursos introductorios de física general en Iowa State University. Estos cursos equivalen a los cursos normales de física impartidos durante los primeros semestres en escuelas de nivel profesional en México donde los contenidos son relacionados a la mecánica clásica. Los resultados se obtuvieron de 2031 estudiantes; 721 de los cursos basados en álgebra y 1310 estudiantes de los cursos basados en cálculo. Cerca del 60 % de los estudiantes de la base con cálculo contestaron correctamente un problema en dos dimensiones acerca de suma de vectores. El error más común fue el uso de un algoritmo “cola-con-cola” para encontrar un vector suma. Una descripción más detallada del algoritmo *cola-con-cola* se encuentra en la Ref. 2.

3. Metodología de investigación

Se utilizaron dos fuentes de datos primarias para evaluar el entendimiento de los estudiantes y para aprender sobre las ideas que tienen acerca de los tópicos de física y de la persistencia de estas ideas en una población estudiantil. Estas dos fuentes son respuestas en preguntas individuales (entrevistas personales con los alumnos) y respuestas a preguntas escritas.

3.1. Preguntas escritas

La fuente de datos primaria de esta investigación son las preguntas escritas. Estas preguntas se aplicaron en tareas (clases y laboratorio), pre-exámenes de laboratorio y en *quiz* y exámenes de clase. Debido al interés en el entendimiento conceptual de la física, las preguntas son más de carácter cualitativo que cuantitativo. Las respuestas son analizadas y caracterizadas con base en la propia respuesta y al razonamiento dado.

Diversos investigadores en el campo de la física educativa han encontrado que ciertos formatos de preguntas escritas son útiles para *detonar errores* sobre las ideas y el razonamiento de los estudiantes. Por ejemplo, preguntas de *orden*, donde los estudiantes tienen que ordenar la magnitud de una cantidad física en una situación dada. Las preguntas de *comparación*, son similares a las de orden excepto que los estudiantes tienen que comparar dos situaciones solamente, posiblemente antes o después de un cambio físico. Otro tipo de situación es la llamada de *razonamientos en conflicto*, donde los estudiantes se enfrentan a enunciados acerca de una situación física y se les pregunta si están de acuerdo con ellos. Un conjunto importante de estos tipos de problemas se puede encontrar en el *E&M TIPERS* workwook[5].

3.2. Entrevistas

Las entrevistas se condujeron en la Universidad Estatal de Nuevo México y en la Universidad Estatal de Arizona. Estas entrevistas se grabaron en formatos de audio y video, para

después ser analizadas. Todos los alumnos entrevistados fueron voluntarios. Las entrevistas duraron cerca de 30 minutos, donde los estudiantes fueron estimulados a explicar, en todo momento, la base de su razonamiento.

4. Contexto de investigación

Los datos presentados en este artículo se recolectaron en la Universidad Estatal de Nuevo México (NMSU), la Universidad de Washington (UW), la Universidad de Syracuse (SU) y la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ).

Los cursos utilizados como fuente de esta investigación fueron:

- NMSU: Física 215 (Introducción a la mecánica basada en cálculo).
- NMSU: Física 211 (Introducción a la mecánica basada en álgebra).
- NMSU: Laboratorio de Física 211 y 215.
- SU: Física general I (Mecánica basada en cálculo).
- UW: Física 121 (Mecánica basada en cálculo).
- UACJ: Física general I (Mecánica basada en cálculo).

El curso de Física 215 está dirigido principalmente a estudiantes de ingeniería. La instrucción en los cursos introductorios basados en cálculo en NMSU consiste en tres clases de 30 minutos a la semana. Le secuencia de los temas es la misma que la secuencia en el libro de texto. No hay sección de solución de problemas (recitation section).

Los cursos de Física 211, que es física basada en álgebra, cubre más tópicos que los cubiertos en la Física 215, pero a un nivel más bajo. Laboratorios para las Físicas 211 y 215 son obligatorios para ciertas carreras. Cerca de la mitad de los estudiantes inscritos en clases regulares también se inscriben en el laboratorio. El laboratorio se evalúa de manera separada de la clase normal. Todas las sesiones de laboratorio están a cargo de estudiantes de graduados. En el laboratorio, los estudiantes trabajan en grupos utilizando materiales para fortalecer la conexión entre los fenómenos observados y el formalismo matemático, para promover las habilidades de razonamiento científico, y para promover el entendimiento conceptual. En lugar de reportes de laboratorio, se asignan tareas de laboratorio para reforzar y extender el entendimiento conceptual. La mayoría de las sesiones de laboratorio para ambos, los cursos basados en álgebra y en cálculo fueron diseñados con base a los *Tutoriales para física introductoria*[6].

La instrucción en la Universidad de Washington (Física 121) consiste de 120 minutos de clase, un laboratorio de 3 horas y una sesión de *recitación* por semana. En la sesión de recitación los estudiantes son motivados a trabajar en grupos sobre ejercicios de tipo conceptual tomados de los *Tutoriales para física introductoria*[6].

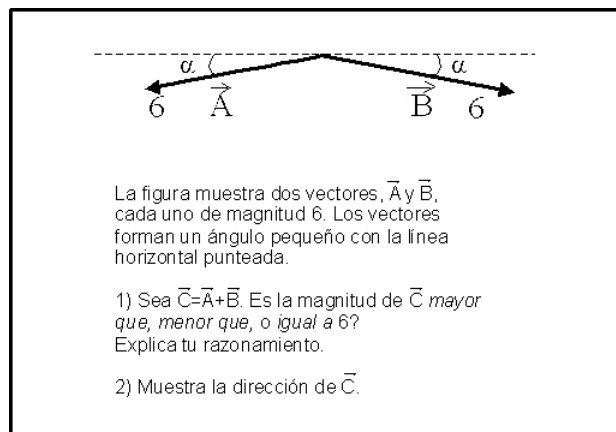


FIGURA 1. Pregunta que requiere la suma de dos vectores.

La instrucción en la Universidad de Syracuse es similar a la instrucción en la esta última, excepto que en la Universidad de Washington la sesión de recitación es obligatoria.

La instrucción en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (Física General I) se basa en tópicos de estática abordados de manera tradicional. Los estudiantes asisten con el instructor a dos sesiones de 90 minutos. Además, una sesión de laboratorio de 60 minutos obligatoria.

5. Identificación de las dificultades

Se han hecho preguntas a los estudiantes para explorar el entendimiento de los estudiantes de la suma y resta de vectores en su propio contexto.

Las dificultades más importantes que hemos identificado en esta investigación son:

- Uso incorrecto del teorema de Pitágoras.
- Suma de vectores utilizando el procedimiento llamado “cerrando el ciclo”.
- Suma de vectores colocando los vectores *cola-con-cola*.
- Suma de vectores como *escalares*.

La suma y resta de vectores por lo general se enseñan utilizando métodos gráficos y a través de la suma algebraica de componentes rectangulares; mientras que las tareas y las preguntas de los exámenes involucran vectores en dos dimensiones que típicamente requieren que los estudiantes descompongan los vectores en componentes para después sumarlos y restarlos algebraicamente. Es común que los métodos gráficos de suma de vectores sean introducidos en las clases.

5.1. Pregunta de suma de vectores

Como parte de un examen parcial en NMSU, se les hizo a 120 estudiantes la pregunta mostrada en la Fig. 1. Este instrumento de evaluación se utilizó en el semestre de otoño de 2002. La respuesta correcta es que la magnitud de la resultante es *menor* que 6. Se esperaba que los estudiantes sumaran gráficamente los vectores \vec{A} y \vec{B} utilizando el método *cabeza-cola* o utilizando el método del paralelogramo, la cual es la técnica más común utilizada en las clases de física. Algunos estudiantes tienden a sumar vectores conectando las colas de ambos.

5.1.1. Resultados después de la instrucción tradicional

Cerca del 50% de los 120 estudiantes resolvieron la parte 1 de esta pregunta correctamente. Como se muestra en la Tabla I, cerca del 60% contestaron la parte 2 correctamente. Solamente el 30% de los estudiantes tuvieron la habilidad para encontrar ambas, la magnitud y la dirección.

5.1.1.1. Sumando vectores como escalares

Los resultados de la Tabla II muestran que después de una instrucción tradicional en la Universidad de Nuevo México, algunos estudiantes trataron a los vectores como escalares, y sumaron las magnitudes de los vectores. Cerca del 10% de los estudiantes respondieron que la magnitud de la resultante es mayor que 6 porque la magnitud de cada vector es igual a 6. La Fig. 2 muestra que algunos estudiantes quienes entienden el procedimiento para sumar vectores, aún determinan la magnitud a través de la suma de escalares.

TABLA I. Resultados para la dirección de la suma de los vectores \vec{A} y \vec{B} .

	Instrucción tradicional	
	NMSU	N=120
↓ (Correcta)		61 %
↑		16 %
→		17 %
←		6 %
Sin respuesta		0 %

TABLA II. Errores más comunes en las dificultades de los estudiantes con la suma de vectores.

	Instrucción tradicional		Instrucción tradicional	
	NMSU	N=120	UACJ	N=186
Magnitud incorrecta	50 %		75 %	
Teorema de Pitágoras	25 %		13 %	
Suma como escalares	8 %		38 %	
Dirección incorrecta	40 %		55 %	
Cerrando el ciclo	10 %		16 %	
Cola-con-cola	11 %		15 %	

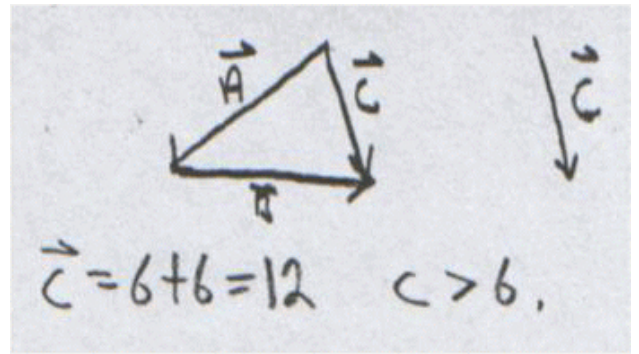


FIGURA 2. Ejemplo que muestra la suma de vectores como escalares.

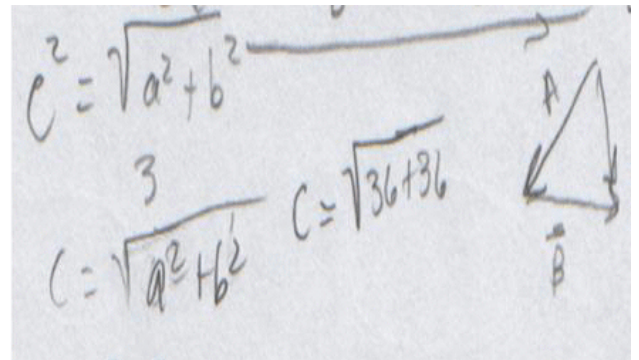


FIGURA 3. Ejemplo del uso del Teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud de la resultante de dos vectores.

Una cuarta parte de 186 estudiantes de la UACJ contestaron la parte 1 correctamente. Como se muestra en la Tabla II, casi el 40% de los estudiantes en la UACJ trataron los vectores como escalares, los cuales corresponden al 60% de estudiantes quienes respondieron que la magnitud del vector suma era mayor que 6.

5.1.1.2 Uso inapropiado del teorema de Pitágoras

Cerca del 25% de los estudiantes de NMSU respondieron esta pregunta diciendo que la magnitud del vector suma era mayor que 6, utilizando el *teorema de Pitágoras* como parte de la respuesta. Aparentemente muchos estudiantes no reconocen que este teorema se puede utilizar para triángulos rectángulos únicamente. Un ejemplo se muestra en la Fig. 3. Cerca del 50% de los estudiantes quienes respondieron incorrectamente tuvieron esta dificultad en su procedimiento.

5.1.1.3 Sumando cola-con-cola

Algunos de los estudiantes conectaron las colas de los vectores \vec{A} y \vec{B} cuando los sumaron gráficamente. El vector resultante \vec{C} conectaba las cabezas de \vec{A} y \vec{B} . Como se muestra en la Tabla II, cerca del 10% de los estudiantes de NMSU sumaron los vectores utilizando el procedimiento *cola-con-cola*. Un ejemplo de este error de procedimiento se muestra en la Fig. 4.

TABLA III. Resultados para la magnitud de la suma de los vectores \vec{A} y \vec{B} después de las modificaciones en la instrucción.

	Instrucción modificada		
	NMSU N=93	Syracuse Univ. N=182	Univ. of Wash. N=193
Menor que 6 (Correcta)	97 %	81 %	95 %
Mayor que 6	2 %	14 %	2 %
Igual a 6	1 %	4 %	1 %
Igual a cero	0 %	0 %	0 %
Sin respuesta	0 %	1 %	2 %

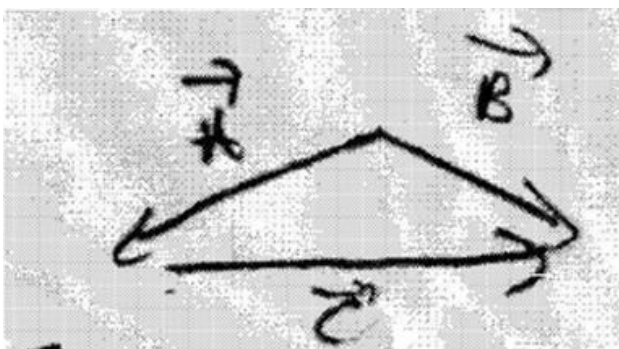


FIGURA 4. Ejemplo de suma de vectores usando cola-con-cola.

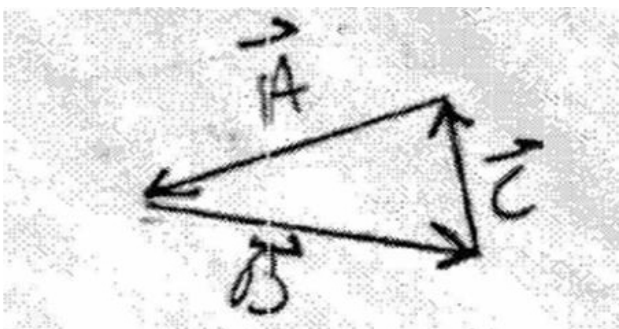


FIGURA 5. Ejemplo de la suma de vectores utilizando cerrando el ciclo.

Como se muestra en la Tabla II, cerca de un cuarto de los estudiantes de NMSU, quienes dieron la respuesta incorrecta para la dirección del vector \vec{C} utilizaron el procedimiento *cola-con-cola*. Cerca de la mitad de los estudiantes quienes dieron la dirección hacia la derecha también incorporaron el procedimiento *cola-con-cola*. Tal parece que este error fue la causa para la dirección incorrecta de la suma de vectores. Aunque estos estudiantes utilizaron *cola-con-cola*, algunos de ellos mostraron la dirección correcta.

5.1.1.4 Cerrando el ciclo

Aproximadamente el 15 % de los estudiantes en NMSU (Tabla I) respondieron con un vector apuntando hacia arriba en lugar de hacia abajo. De acuerdo a la Tabla II, el 10 % de

todos los estudiantes utilizaron un procedimiento incorrecto que llamamos “cerrando el ciclo”. Estos estudiantes conectaron la cola del vector resultante con la cabeza del segundo vector y la cabeza de la resultante con la cola del primer vector. La pregunta acerca de la dirección fue contestada correctamente por el 45 % de los 186 estudiantes de la UACJ. Mientras que cerca del 15 % de todos estos estudiantes dijeron que la dirección era hacia arriba. Todos ellos utilizaron “cerrando el ciclo” para sumar los dos vectores. La Fig. 5 muestra un ejemplo del procedimiento “cerrando el ciclo”.

5.1.2. Resultados después de las modificaciones en la instrucción

La misma pregunta se hizo a estudiantes después de una modificación a la instrucción en la Universidad Estatal de Nuevo México y en la Universidad de Washington para explorar el entendimiento acerca de la suma de vectores. Estos cambios en la instrucción son:

- La gran mayoría de los ejercicios utilizados en clase son de tipo conceptual. El alumno no debe desarrollar un razonamiento numérico para resolver estos ejercicios.
- Los ejercicios de libros de texto (en su mayoría numéricos) son muy poco utilizados durante la instrucción.
- Las operaciones entre vectores (suma y resta) se tratan de forma gráfica más que de manera numérica.
- La mayoría de los textos abordan primero las operaciones entre vectores en su propio contexto y después en el contexto de las fuerzas. En esta ocasión se abordan vectores en el contexto de las fuerzas y después en su propio contexto.
- Al inicio de cada clase se aplicó un examen llamado preexamen (*quiz*), con el objeto de enfrentar al estudiante con el objeto de conocimiento.
- Al término de la sesión se aplicó un examen con el propósito de medir la diferencia entre el nivel de conocimiento final y el nivel de conocimiento inicial.

Como se muestra en la Tabla III, en NMSU el 97 % de 93 estudiantes respondieron la pregunta acerca de la magnitud correctamente, y cerca del 80 % dieron la magnitud y dirección correctamente. Cerca del 95 % de 193 estudiantes de UW y 81 % de 182 estudiantes de SU contestaron la pregunta acerca de la magnitud de \vec{C} correctamente.

Con respecto a la dirección de $\vec{A} + \vec{B}$, 84 % de los estudiantes de SU y 90 % de UW respondieron correctamente. Sin embargo, observamos algunas dificultades a pesar de las modificaciones a la instrucción. Como se muestra en la Tabla IV, 18 % de los estudiantes después de las modificaciones en NMSU cerraron el ciclo, mientras que, 10 % de los estudiantes bajo estas mismas modificaciones didácticas cometieron este error en Syracuse. El uso del teorema de Pitágoras

fue casi erradicado. Unos pocos estudiantes de NMSU, Syracuse, y Washington utilizaron *cola-con-cola* y *suma como escalares* para sumar vectores. Tal parece que las modificaciones a la instrucción en estas universidades mejoraron de alguna manera algunas de las habilidades de los estudiantes para sumar vectores y evitar estos errores.

5.2. Pregunta de resta de vectores

Se les presentó a los estudiantes la pregunta mostrada en la Fig. 6 con el fin de evaluar su entendimiento de resta de vectores. La Fig. 7 muestra la respuesta correcta para esta pregunta. Así como en la suma de vectores de la Fig. 1, esta

TABLA IV. Dificultades de procedimiento de la pregunta de suma de vectores después de las modificaciones a la instrucción.

	Instrucción modificada		
	NMSU N=93	Syracuse Univ. N=182	Univ. of Washington N=193
Teorema de Pitágoras	0 %	0 %	1 %
Cerrando el ciclo	18 %	10 %	7 %
Cola con cola como escalares	0 %	3 %	2 %
Sumando	1 %	5 %	2 %

TABLA V. Resultados para el problema de la resta de vectores.

	Instrucción tradicional	
	NMSU N=120	
Mayor que 6 (Correcto)		48 %
Menor que 6		28 %
Igual a 6		20 %
Sin respuesta		4 %

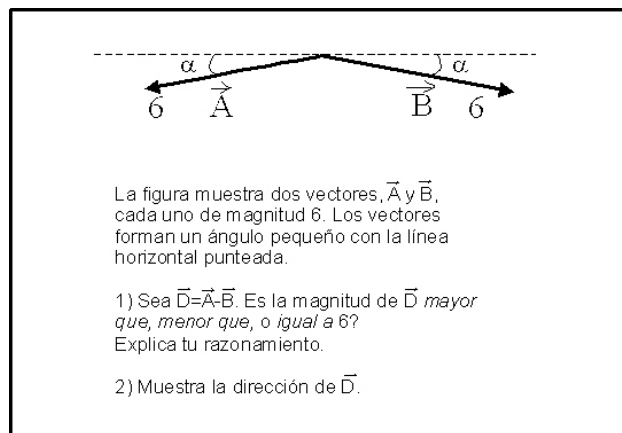


FIGURA 6. Pregunta que requiere la resta de dos vectores.

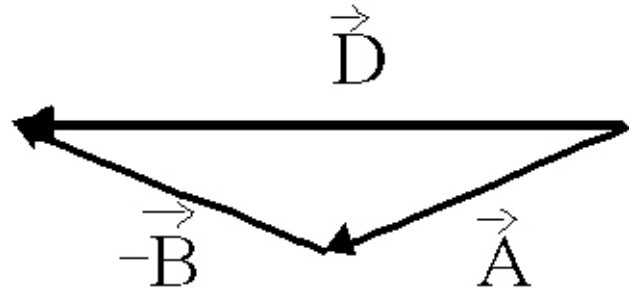


FIGURA 7. Respuesta correcta para la pregunta de la diferencia entre vectores.

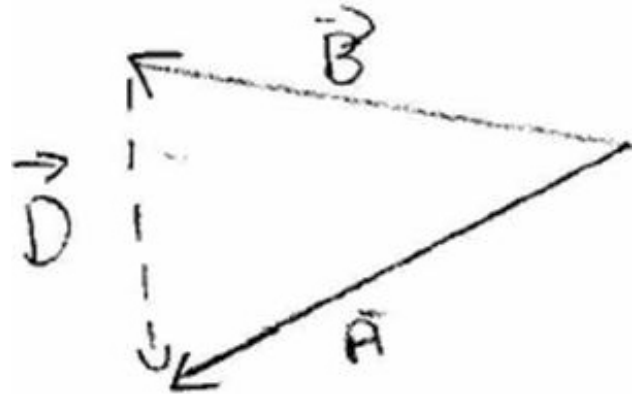


FIGURA 8. Ejemplo del error cola-con-cola en la resta de vectores.

pregunta se administró en el semestre de otoño del 2002. Algunos estudiantes tienden a restar dos vectores conectando las cabezas de éstos. Otros estudiantes tienden a restar dos vectores como escalares, la magnitud de la resultante es cero. Otros estudiantes cierran el ciclo para restar los vectores, sin embargo, algunos de ellos obtienen la magnitud correcta de la resultante.

5.2.1. Resultados después de la instrucción tradicional

Después de una instrucción tradicional la Universidad Estatal de Nuevo México, cerca de la mitad de 120 estudiantes encontraron correctamente la magnitud (Tabla V). Sin embargo, solamente cerca de una cuarta parte dieron correctos ambas la magnitud y la dirección para $\vec{A} - \vec{B}$ con un razonamiento correcto. Cerca del 30 % de estudiantes dijeron que la magnitud del vector diferencia era menor de 6 y 20 % respondieron que la diferencia era igual a 6.

Mas de la mitad de los estudiantes de NMSU respondieron la pregunta 2 acerca de la *dirección* de \vec{D} correctamente (Tabla VI). Casi el 10 % de los estudiantes (Tabla VII) utilizaron el método *cola-con-cola* para encontrar la dirección de la resta de vectores. Un ejemplo se muestra en la Fig. 8. Cerca de la mitad de los estudiantes quienes obtuvieron correctamente la dirección, también restaron los dos vectores utilizando el método *cola-con-cola*. Solamente el 6 % (Tabla VII) restaron incorrectamente estos vectores como se muestra en

la figura 9 (un error que llamamos *cerrando el ciclo*) comparado con el 4 % de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

TABLE VI. Resultados para la dirección de la resta de vectores.

	Instrucción tradicional NMSU N=120	Instrucción tradicional Univ. of Juarez N=186
← (Correcta)	54 %	19 %
↑	12 %	20 %
→	14 %	22 %
↓	14 %	16 %
Sin respuesta	6 %	23 %

TABLE VII. Dificultades de procedimiento para encontrar la magnitud y dirección del vector diferencia.

	Instrucción tradicional NMSU N=120	Instrucción tradicional Juárez N=186
Teorema de Pitágoras	14 %	0 %
Cerrando el ciclo	6 %	4 %
Cola-con-cola	9 %	3 %
Restando como escalares	9 %	41 %

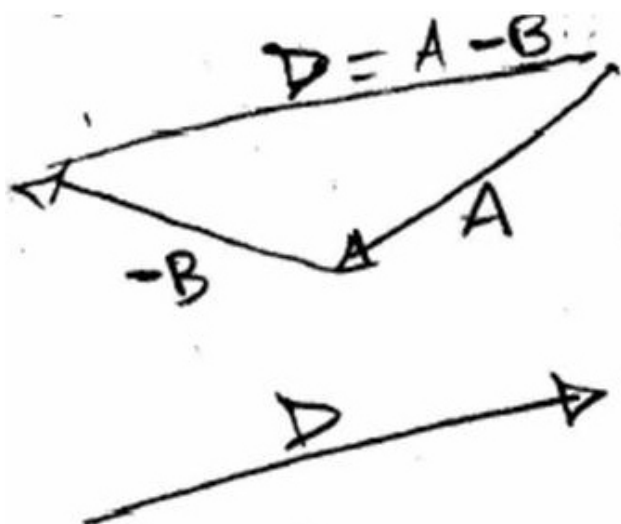


FIGURA 9. Ejemplo del error cerrando el ciclo en la resta de vectores.

TABLA VIII. Resultados para la magnitud de la diferencia de los vectores \vec{A} y \vec{B} después de los cambios en la instrucción.

	Instrucción modificada		
	NMSU N=93	Syracuse N=182	Washington N=193
Mayor que 6 (Correcto)	94 %	85 %	81 %
Menor que 6	5 %	10 %	16 %
Igual a 6	1 %	3 %	1 %
Sin respuesta	0 %	2 %	2 %

Como se muestra en la Tabla VI, 14 % de los estudiantes en NMSU dieron la dirección de \vec{D} vertical hacia abajo, similar a los estudiantes de la UACJ, donde 16 % dieron la misma respuesta. La Tabla VII muestra algunas de las dificultades de los estudiantes para encontrar el vector \vec{D} . Como se muestra en la Tabla VII, 14 % de los estudiantes de NMSU utilizaron el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector diferencia. Cerca de una tercera parte de los estudiantes utilizaron este teorema restando los cuadrados de las magnitudes de los vectores \vec{A} y \vec{B} . Tal parece que algunos estudiantes quienes dieron la dirección hacia arriba confundieron el vector suma con el vector diferencia.

Cerca del 10 % de los estudiantes de NMSU restaron los vectores como escalares comparado con el 41 % de los estudiantes de la UACJ que hicieron esto. En algunos casos, los estudiantes de NMSU argumentaron que la magnitud del vector resta era menor que 6, porque el ángulo α era muy pequeño y los vectores estaban “opuestos”. Los siguientes son dos respuestas de estudiantes de NMSU. Estas respuestas se obtuvieron mediante entrevistas individuales.

$D=6-6=0$, porque estos vectores tienen el mismo ángulo y la misma magnitud, pero dirección opuesta.

$D=6-6=0$, la magnitud es menor que 6 porque existen magnitudes positivas y negativas y por lo tanto se hace cuando extiendes los vectores.

La siguiente es una respuesta de un estudiante de la UACJ obtenida en respuestas de un quiz en curso normal.

Yo creo que es menor que 6 porque la diferencia de $A+(-B)$ es igual a cero. $D=A+(-B)$. Esto es $D=6-6$, entonces $D=0$.

5.2.2. Resultados después de la modificación en la instrucción

Después de una modificación en la instrucción, cerca del 90 % de los estudiantes en NMSU respondieron correctamente que la magnitud del vector diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ era mayor que

6 unidades (Tabla VIII). Cerca del 85 % en NMSU y en Syracuse, y 70 % en UW respondieron correctamente para la dirección de \vec{D} . Cerca del 70 % en NMSU y en Syracuse dieron la respuesta correcta para la magnitud y la dirección, y como el 50 % en UW dieron la respuesta correcta para ambas. Parece ser que después de las modificaciones a la instrucción la mayoría de los estudiantes mejoraron su habilidad para sumar y restar vectores. Sin embargo, algunos estudiantes de Syracuse y Washington aún concluyen que la magnitud del vector suma \vec{C} es menor que 6. Parece que algunos estudiantes aún cierran el ciclo para restar vectores. Además, parece ser que otros estudiantes también utilizan *cola-con-cola* para restar vectores como escalares después de las modificaciones a la instrucción.

6. Conclusiones

Como se observa en los ejemplos mostrados anteriormente, después de la instrucción tradicional muchos estudiantes tienen dificultades con las operaciones entre vectores. Cerca de dos tercios de los estudiantes cometieron uno o más errores con las preguntas cualitativas relacionadas con la suma o resta de vectores. Hemos encontrado que muchos estudiantes no consideran la naturaleza vectorial de estas cantidades, o lo consideran cuando encuentran la dirección pero no la magnitud. Además, de acuerdo con la Tabla II, cerca de un 25 % de los estudiantes de NMSU y 15 % de la UACJ incorrectamente utilizan el Teorema de Pitágoras para calcular la magnitud del vector resultante. Parece ser que muchos estudiantes consideran el Teorema de Pitágoras como una regla para encontrar la suma de cualquier par de vectores independientemente de sus direcciones relativas.

El porcentaje de respuestas correctas mejora substancialmente después de las modificaciones a la instrucción intentando enfatizar los procedimientos gráficos con vectores. Los errores citados anteriormente después de las modificaciones a la instrucción, representan menos del 20 % de las respuestas en Syracuse, y estuvieron prácticamente ausentes en la Universidad de Washington y en NMSU (Tabla III). Sin embargo, hemos observado que otros errores parecen más comunes. Por ejemplo, parece haber una mayor tendencia a “cerrar el ciclo” cuando se suman que cuando se restan vectores. Dos causas posibles para la mayor incidencia de este error son:

- 1) Los estudiantes practicaron primero en situaciones donde la fuerza neta era cero, y no pudieron distinguir entre esta situación y una donde se espera una resultante; y
- 2) Como instrucción fue exitosa para tomar en cuenta las mas comunes dificultades. Esto se puede observar en las Tablas IV y VII.

Cerca del 12 % de los estudiantes (en promedio de las universidades NMSU, UW y SU) según la Tabla IV, después de las modificaciones a la instrucción, cometieron el error “cerrando el ciclo” para la suma de dos vectores, comparado con solamente el 5 % (Tabla VII) después de la instrucción tradicional (en promedio de NMSU y la UACJ) al restar los dos mismos vectores. Aunque las modificaciones a la instrucción, para enfatizar el entendimiento conceptual, redujeron significativamente la incidencia de errores en las respuestas de los estudiantes, algunos de ellos aún tienen dificultades con la suma y resta de vectores. Por ejemplo, una pequeña fracción de estudiantes continúa restando vectores como escalares o utiliza *cola-con-cola* para la resta vectorial.

Finalmente, los resultados mostrados en esta investigación están de acuerdo con Flores[7]. Según el, “la mayoría de los estudiantes de nivel superior, presentan dificultades de entendimiento de los conceptos fundamentales de física, fundamentalmente con las operaciones entre vectores. El desarrollo conceptual de los distintos objetos matemáticos que representan a los conceptos físicos determina, en gran medida, una evolución cognitiva en las estructuras matemáticas del alumno. Varios investigadores del área de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias han monitoreado las dificultades del proceso cognitivo del desarrollo del entendimiento de la física. La mayoría de estos investigadores concluye, que el estudiante promedio desarrolla un entendimiento aproximado del 5 % al 10 % de toda la gama de conocimiento del que es capaz de construir. Una de las principales causas de estos resultados es el gran reto del entendimiento conceptual, que implican los diversos cambios de una representación de un fenómeno físico a otra representación durante el proceso de entendimiento. Sin embargo, la versatilidad del alumno para pasar de una representación a otra puede estar influenciada por las características del contexto de la situación de aprendizaje”.

1. E.F. Redish, J.M. Saul y R.N. Steinberg, *Am. J. Phys.* **66** (3) (1998) 212.
2. J. Aguirre y G. Erickson, *J. of Res. in Sci. Educ.* **21** (5) (1984) 439.
3. R.D. Knight, *Phys. Teach.* **33** (1995) 74.
4. N. Nguyen y D.E. Meltzer, *Am. J. of Phys.* **71** (6) (2003) 630.
5. C.J. Hieggelke, D.P. Maloney, S.E. Kanim y T.L. O’Kuma,

E&M TIPERS: Electricity and magnetism tasks, 1st Edition (Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2006).

6. L.C. McDermott, P. Shaffer y the Physics Education Group at the University of Washington, *Tutorials in Introductory Physics*, 2nd Edition (Prentice-Hall, New Jersey, 2002).
7. S. Flores, “Student use of vectors in mechanics”, tesis para obtener el grado doctorado en física, Universidad Estatal de Nuevo México, (Julio 2006).