

# Movimiento de rotación de un cuerpo rígido libre de torcas

A. Manzur Guzmán

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,*

*Apartado Postal 55-534, 09340 México, D.F., México,*

*e-mail: amg@xanum.uam.mx*

Recibido el 13 de marzo de 2007; aceptado el 4 de mayo de 2007

Se presenta un experimento de demostración que ilustra cómo la estabilidad del movimiento de rotación de un cuerpo rígido libre de torcas depende del valor relativo del momento de inercia asociado con el eje respecto al cual gira. El objetivo se logra con una raqueta de tenis y con una caja que tiene momentos principales de inercia semejantes a los de la raqueta. El cuerpo rotando es lanzado manualmente al aire y en su movimiento de bajada es cachado por el lanzador. Cuando el cuerpo rota respecto a un eje principal correspondiente al momento principal de inercia mayor o menor, el movimiento es estable. Cuando rota respecto al eje asociado con el momento de inercia con valor intermedio, también rota respecto al eje asociado al momento de inercia menor.

*Descriptor:* experimentos de demostración; métodos de enseñanza; momentos de inercia; estabilidad mecánica.

The demonstration experiment here presented illustrates how the stability of the rotational motion of a rigid body in the absence of torques depends on the relative value of the moment of inertia associated to the axis of rotation. The objective is satisfactorily gotten using a tennis racket and a box with similar values of its moments of inertia to those of the racket. The rotating body is thrown into the air and when goes down is caught by the thrower. The motion is stable when the body rotates about the principal axis corresponding to either the greatest or smallest principal moment of inertia. However, when the body rotates about the axis corresponding to the intermediate moment, the body also rotates about the axis which has associated the smallest moment of inertia.

*Keywords:* demonstration experiments; teaching methods; moments of inertia; mechanical stability.

PACS: 01.50.My; 01.40.Gm

## 1. Introducción

Los experimentos de demostración, también llamados experimentos de cátedra, indudablemente tienen gran importancia en el proceso enseñanza-aprendizaje como un recurso pedagógico que al mismo tiempo ilustra y refuerza los conceptos teóricos involucrados. Una demostración motiva a estudiar un fenómeno que en particular sea opuesto o diferente a lo esperado intuitivamente, ilustra la aplicación de un principio físico para explicar el fenómeno y propicia la comunicación entre el profesor y los estudiantes, entre otros objetivos. Para que cumplan su propósito, deben ser cualitativos, de corta duración y deben dejar en los estudiantes una impresión tan memorable como sea posible del fenómeno observado [1,2]. Además, en algunos casos no se cuenta con laboratorios disponibles y ésta es la única oportunidad que se tiene para hacer ver que la física es una ciencia natural y que cada teoría debe basarse en hechos claramente establecidos, es decir, en las respuestas que la naturaleza proporciona a las preguntas formuladas adecuadamente a través de los experimentos.

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido depende de su estructura solamente a través de los tres momentos principales de inercia. De esta manera, dos cuerpos rígidos cualesquiera con los mismos momentos principales de inercia se mueven exactamente de la misma forma, independientemente de que puedan tener geometrías diferentes.

Aquí se analiza el movimiento de rotación de una raqueta de tenis cuando sobre ella no actúan torcas. Debido a que los momentos de inercia controlan el movimiento, y a que para un experimento cualitativo no son necesarios los valores

exactos, se hace una estimación de ellos a través de modelos de raqueta con geometría simple. Esta estimación permite utilizar la relación que los momentos de inercia guardan entre sí para escoger un objeto de bajo costo y que tenga, ante rotaciones en ausencia de torcas, el mismo comportamiento de la raqueta. Encontrar este objeto tiene la ventaja de no correr riesgos de maltratar un cuerpo tan delicado como lo es la raqueta. Además, permite ilustrar la estabilidad ante rotaciones sin necesidad de construir un dispositivo especial. Con el fin de dirigir la atención en el propósito de la demostración, aquí se le presenta en forma de un problema que se resuelve experimental y teóricamente [2].

## 2. Problema

Describir el movimiento de un cuerpo rígido rotando libre de torcas, al ser lanzado al aire. Despreciar los efectos de fricción. Considerar el comportamiento de cuerpos con geometría distinta entre sí; por ejemplo, una raqueta de tenis y un prisma rectangular (caja).

## 3. Objetivo

Mostrar las condiciones bajo las cuales el movimiento de rotación de un cuerpo en ausencia de torcas externas es estable o inestable.

## 4. Descripción experimental

Se sugiere usar una raqueta (de tenis, por ejemplo) y un cuerpo con la forma de un paralelepípedo (prisma rectangular,

bloque o caja) con sus tres dimensiones diferentes. El cuerpo rotando se lanza manualmente al aire de manera que, en su movimiento de bajada, pueda ser atrapado por el experimentador.

La raqueta se sostiene con una mano por el mango, se le hace girar lanzándola al aire. Se observa que cuando el plano de la raqueta inicialmente es vertical y gira respecto a un eje horizontal, o cuando gira respecto a un eje a lo largo del mango, el movimiento de la rotación es estable. La raqueta es atrapada por el mango manteniendo la misma orientación en que fue lanzada. En cambio, con su plano paralelo al suelo, al lanzarla rotando respecto a un eje horizontal se observa que su plano también gira respecto al eje a lo largo del mango. La raqueta es atrapada por el mango habiendo rotado media vuelta respecto al eje longitudinal del mango; es decir, la cara de la raqueta que estaba hacia arriba en el momento de ser lanzada, al ser atrapada queda hacia abajo. Este resultado inesperado y espectacular es debido a que la rotación es inestable respecto al eje principal correspondiente al momento de inercia con valor intermedio.

Ahora se realiza el ejercicio anterior usando la caja. La caja se toma con ambas manos en dos caras opuestas y se le hace girar lanzándola al aire de manera que rote con respecto a un eje horizontal que pase por el centro de masa. Se observa que cuando el eje de giro es perpendicular a las caras más pequeñas o más grandes, el movimiento es estable. En cambio, cuando el eje es perpendicular a las caras de tamaño intermedio, el movimiento de la caja en el aire es irregular (inestable), el eje de rotación cambia de dirección de manera que es más difícil atraparla, pues se mueve de una manera complicada. Si las dimensiones relativas de la caja son adecuadas, es atrapada habiendo rotado media vuelta respecto al eje principal paralelo a su longitud mayor.

### 5. Descripción teórica

Primero se hace un resumen para recordar los principales conceptos involucrados en el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, después se analizan las observaciones hechas con la raqueta y la caja.

El movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como una combinación de una traslación y una rotación. Esto significa también que siempre es posible encontrar un sistema de referencia en traslación pura en el cual el movimiento del cuerpo parezca solamente de rotación. Para describir el movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje se utiliza la ecuación

$$d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}, \tag{1}$$

donde los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  representan, respectivamente, el momento angular total del cuerpo y la torca total aplicada; ambas cantidades se calculan con respecto a un punto fijo en un sistema inercial. Cuando el eje de rotación no tiene un punto fijo,  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  deben ser calculados respecto al centro de masa del cuerpo.

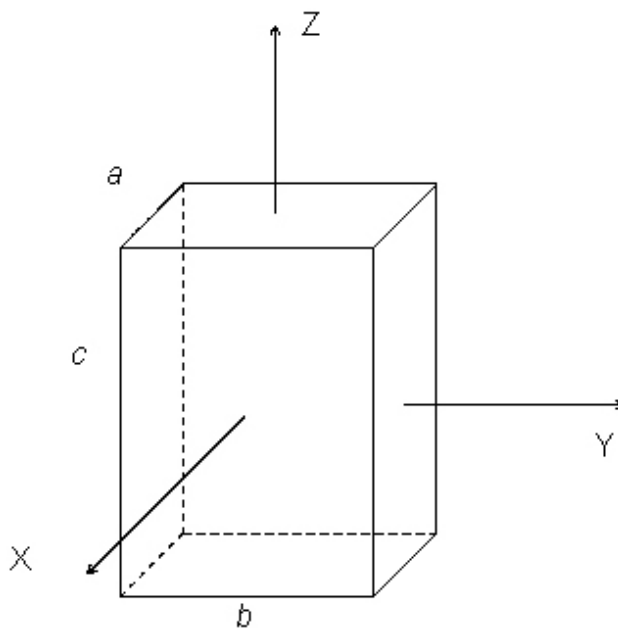


FIGURA 1. Los tres ejes principales de inercia X, Y y Z del bloque pasan por el centro de masa. Los correspondientes momentos principales de inercia son  $I_X = M(b^2 + c^2)/12$ ,  $I_Y = M(a^2 + c^2)/12$  e  $I_Z = M(a^2 + b^2)/12$ , respectivamente.

Puede demostrarse que para un cuerpo rígido arbitrario hay tres direcciones mutuamente perpendiculares para las cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación. Estos ejes se denominan *ejes principales de inercia*, y los correspondientes momentos de inercia se llaman *momentos principales de inercia*. Para un bloque rectangular los tres ejes principales son perpendiculares a sus caras y pasan a través del centro del bloque. Estos ejes se ilustran en la Fig. 1.

Cuando el cuerpo rota alrededor de un eje principal, el vector momento angular  $\mathbf{L}$  es paralelo a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , que siempre se encuentra a lo largo del eje de rotación, por lo que

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

en la cual  $I$  es el momento principal de inercia correspondiente al eje principal alrededor del cual rota el cuerpo. Es necesario enfatizar que esta relación vectorial es válida solamente para la rotación alrededor de un eje principal de inercia [3].

Considérese el movimiento rotacional de un cuerpo rígido libre de torcas externas; es decir,  $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{0}$ , lo cual significa que  $\mathbf{L}$  es constante. Este caso se presenta cuando en un campo gravitacional constante se lanza al aire un objeto. Una vez que se encuentra en el aire, la única fuerza externa sobre él (despreciando la resistencia del aire) es su peso, el cual actúa en el centro de masa y, por consiguiente, no produce torca alguna con respecto a este punto; por tanto, el momento angular permanece constante. El movimiento del centro de masa no nos concierne aquí, ya que se debe a la fuerza resultante externa y el movimiento prosigue de acuerdo a la segunda ley de Newton para traslación; el centro de masa describe una

trayectoria parabólica. Si  $\tau=0$ , entonces la Ec. (2) indica que  $I\omega$  es constante, por lo que si  $I$  es constante,  $\omega$  también lo es, y el cuerpo rota alrededor de un eje principal con velocidad angular constante.

Para un cuerpo rígido arbitrario, la rotación es estable respecto al eje principal correspondiente al momento de inercia más grande o más pequeño, mientras que es inestable respecto al eje principal correspondiente al momento de inercia con valor intermedio [4,5]. Este efecto puede ser demostrado fácilmente, por ejemplo, con un prisma rectangular recto de dimensiones  $a, b, c$ , con  $a_1b_1c$  (ver Fig. 1). Si los ejes principales  $X, Y$  y  $Z$  se escogen paralelos a los lados  $a, b$  y  $c$ , entonces los momentos principales de inercia satisfacen siempre las desigualdades  $I_X < I_Y < I_Z$ , la dimensión mayor del cuerpo va en la dirección del eje  $Z$  y la dimensión menor en la dirección del eje  $X$ . Si el prisma es lanzado al aire con una velocidad angular respecto a uno de los ejes principales, el movimiento será inestable cuando la rotación se efectúa respecto al eje principal  $Y$  y estable para los otros dos ejes.

Lo recién mencionado es cierto para un lanzamiento ideal, pero en uno real sucede que, al lanzar manualmente el prisma girando, difícilmente se logra que gire respecto a un eje principal. Con cualquier ángulo entre el eje de giro y el eje principal, por pequeño que sea, el eje de giro se acerca al eje principal o se aleja de él; en el primer caso se dice que el movimiento es estable y en el segundo se dice que es inestable.

Una forma de lograr que un prisma tenga el movimiento espectacular de la raqueta es conseguir uno cuyos momentos de inercia tengan relaciones iguales (o semejantes) a las relaciones que guardan los de la raqueta. Para ello el primer paso será estimar los momentos de inercia de la raqueta.

**5.1. Estimación de los momentos de inercia de la raqueta**

Algunas raquetas tienen su centro de masa muy cerca de la unión entre el mango y el bastidor, pero sobre el mango. Debido a esta característica se puede suponer que el mango y el bastidor tienen masas iguales,  $m_1 = m/2$  y  $m_2 = m/2$ , respectivamente, siendo  $m$  la masa de la raqueta (la masa de la red está incluida en la del bastidor). También es característico que el diámetro del mango tenga tamaño comparable con el espesor del bastidor. La raqueta típica de tenis tiene unos 68 centímetros de largo (incluyendo el bastidor).

Para facilitar la estimación, el mango puede ser aproximado como una barra cilíndrica de longitud  $L$  y radio  $R$ , y el bastidor como un aro (cáscara cilíndrica) de radio  $r$  igual a la mitad del promedio del largo y el ancho del bastidor de la raqueta y de longitud  $l$  igual al espesor. Suponiendo que el centro de masa está en la unión de las dos piezas, ahí se coloca el origen del sistema de coordenadas  $X', Y', Z'$  cuyos ejes coinciden con los ejes principales, como ilustra la Fig. 2. El momento de inercia del sistema es la suma de los momentos de inercia del cilindro y del aro asociados a ese eje. Cada uno de estos momentos de inercia se calcula, a partir de los

momentos principales de inercia de cada cuerpo, usando el teorema de ejes paralelos.

El momento de inercia de un cilindro sólido [6] respecto a un eje perpendicular a su longitud y que pasa por el centro de masa es  $m_1(R^2/4 + L^2/12)$ , mientras que respecto a su eje de simetría es  $m_1R^2/2$ . Cuando el cilindro rota respecto a un eje perpendicular a un extremo, usando el teorema de ejes paralelos, el momento de inercia resulta ser

$$I_{CX'}=I_{CY'}=m_1 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) + \frac{m_1L^2}{4} = m_1 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right).$$

El momento de inercia respecto a  $Z'$  es el mismo que respecto a su eje de simetría.

El momento de inercia de un aro circular, de longitud  $l$  y radio  $r$ , respecto a un eje perpendicular a su longitud y que pasa por el centro de masa es  $m_2(r^2/2 + l^2/12)$  mientras que respecto a su eje de simetría es  $m_2r^2$ . Nótese que los ejes de simetría del cilindro (mango) y del aro (bastidor) son perpendiculares entre sí, de tal manera que, por ejemplo, el eje  $X'$  es perpendicular al eje del cilindro y paralelo al eje del aro (ver Fig. 2). Cuando el aro rota respecto a un eje paralelo a su eje de simetría a una distancia  $r$ , el momento de inercia es  $I_{AX'} = m_2r^2 + m_2r^2$ ; respecto a un eje transversal al eje de simetría y a una distancia  $r$  del centro es

$$I_{AY'} = m_2 \left( \frac{r^2}{2} + \frac{l^2}{12} \right) + m_2r^2.$$

El momento de inercia respecto a  $Z'$  es el mismo que respecto a un diámetro central.

Al combinar los momentos de inercia de cada cuerpo componente, para la raqueta modelo se obtiene

$$I_{X'} = I_{CX'} + I_{AX'} = \frac{m_1}{12} (3R^2 + 4L^2) + 2m_2r^2,$$

$$I_{Y'} = I_{CY'} + I_{AY'} = \frac{m_1}{12} (3R^2 + 4L^2) + \frac{m_2}{12} (18r^2 + l^2),$$

$$I_{Z'} = I_{CZ'} + I_{AZ'} = \frac{m_1}{12} (6R^2) + \frac{m_2}{12} (6r^2 + l^2).$$

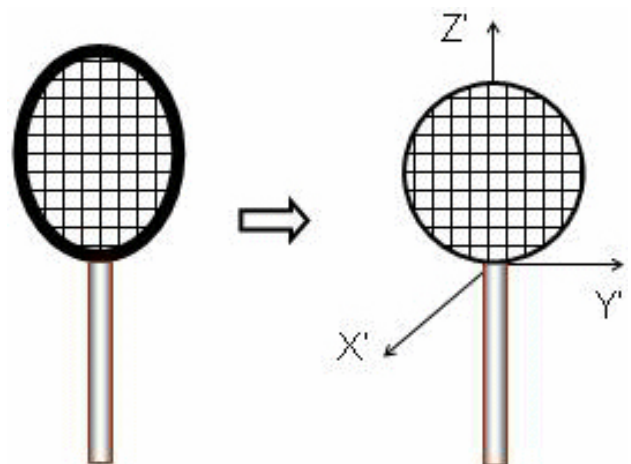


FIGURA 2. En este modelo de raqueta el bastidor que sujeta la red es sustituido por un aro circular, y el mango por un cilindro circular.

Las dimensiones del bastidor de la raqueta aquí usada, su ancho  $a$  (o longitud del aro,  $a = l$ ), diámetro menor  $2r_m$  y diámetro mayor  $2r_M$ , aproximadamente, están en la relación  $a: 2r_m: 2r_M = 1:14:18$ . Las dimensiones del mango están en la relación  $R:L=1:22$ , y para el radio medio del mango se obtuvo  $R \approx 3a/4$ . Recordando que las masas del mango y del bastidor son iguales a la mitad de la masa de la raqueta, y teniendo en cuenta estas relaciones entre las dimensiones, se obtuvieron los valores relativos siguientes para los momentos principales de inercia:

$$I_{X'} : I_{Y'} : I_{Z'} \approx 6.8 : 5.8 : 1.0 \quad (3)$$

Los valores de  $I_{X'}$  y de  $I_{Y'}$  son parecidos entre sí, mientras que ambos tienen valor alrededor de 6 veces el valor de  $I_{Z'}$ .

**5.2. Otros modelos de raqueta**

*Cilindro sólido y cilindro hueco.* Ahora se sustituye el mango por el mismo cilindro del modelo anterior, pero el bastidor por un cilindro circular hueco de longitud  $l$  y de radios  $r_m$  y  $r_M$ . Los momentos de inercia del cilindro hueco (de masa  $m_3$ ) respecto al eje longitudinal y a un diámetro central son  $(m_3/2)(r_m^2 + r_M^2)$  y  $m_3[(r_m^2 + r_M^2)/4 + l^2/12]$ , respectivamente [6]. Usando el teorema de ejes paralelos, para el cilindro hueco se obtiene

$$I_{HX'} = \frac{m_3}{2} (r_m^2 + 3r_M^2),$$

$$I_{HY'} = \frac{m_3}{4} \left( r_m^2 + 5r_M^2 + \frac{l^2}{3} \right),$$

$$I_{HZ'} = m_3 \left( \frac{r_m^2 + r_M^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right).$$

Finalmente, haciendo  $m_3 = m/2$  los momentos de inercia de este otro modelo de raqueta son

$$I_{X'} = \frac{m}{2} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right) + \frac{m}{4} (r_m^2 + 3r_M^2),$$

$$I_{Y'} = \frac{m}{2} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right) + \frac{m}{8} \left( r_m^2 + 5r_M^2 + \frac{l^2}{3} \right),$$

$$I_{Z'} = \frac{m}{2} \left( \frac{R^2}{2} \right) + \frac{m}{8} \left( r_m^2 + r_M^2 + \frac{l^2}{3} \right).$$

Con  $r_m=8a$ ,  $r_M=9a$  y las dimensiones anteriores ( $R = 3a/4$ ,  $L = 66a/4$  y  $l = a$ ) se obtiene que

$$I_{X'} : I_{Y'} : I_{Z'} \approx 6.7 : 5.7 : 1.0 \quad (4)$$

Este modelo de raqueta es equivalente al anterior, como era de esperarse, pues los radios menor y mayor tienen tamaños muy parecidos.

*Cilindro y placa.* Ahora se reemplaza el mango por el mismo cilindro anterior, pero el bastidor por una placa (paralelepípedo) homogénea (sin red) de masa  $m_4 = m/2$ , longitudes  $a, b, y c$  con  $a < b < c$  y con la misma relación que

guardan las dimensiones del bastidor, *i.e.*  $a:b:c=1:14:18$ . Siguiendo el mismo procedimiento de los casos anteriores, los nuevos momentos de inercia de la placa son

$$I_{PX'} = m_4 \frac{b^2 + c^2}{12} + m_4 \frac{c^2}{4},$$

$$I_{PY'} = m_4 \frac{a^2 + c^2}{12} + m_4 \frac{c^2}{4},$$

$$I_{PZ'} = m_4 \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Sumando éstos con los momentos de inercia del mango, se obtiene

$$I_{X'} = \frac{m_1}{12} (3R^2 + 4L^2) + \frac{m_4}{12} (b^2 + 4c^2),$$

$$I_{Y'} = \frac{m_1}{12} (3R^2 + 4L^2) + \frac{m_4}{12} (a^2 + 4c^2),$$

$$I_{Z'} = \frac{m_1}{12} (6R^2) + \frac{m_4}{12} (a^2 + b^2).$$

Finalmente, se obtiene el resultado siguiente:

$$I_{X'} : I_{Y'} : I_{Z'} \approx 12.9 : 11.9 : 1.0 \quad (5)$$

En este otro modelo los valores relativos de  $I_{X'}$  y de  $I_{Y'}$  son alrededor de 12 veces el valor de  $I_{Z'}$ . Esta gran diferencia respecto a los dos modelos anteriores pone de manifiesto que el momento de inercia depende fuertemente de la distribución de la masa del objeto, no solamente de la masa y del tamaño.

**5.3. Caja con momentos de inercia comparables a los de la raqueta**

Si uno quisiera usar un bloque con su masa distribuida homogéneamente, pero con el comportamiento espectacular de la raqueta (*i.e.*, que al lanzarlo girando respecto al eje  $Y'$  también gire respecto al eje  $Z'$ ), sus momentos de inercia deben tener relaciones semejantes a las relaciones (3) ó (4) obtenidas para las raquetas modelo.

Supóngase que el cuerpo mostrado en la Fig. 1 no es un paralelepípedo rectangular, sino un cuerpo formado por dos láminas delgadas de lados  $a$  y  $b$ , paralelas entre sí y separadas por una distancia  $c$ . Si cada lámina tiene masa  $M/2$ , entonces el momento de inercia de la combinación de las dos láminas respecto a un eje perpendicular al centro de las caras es igual a la suma de los momentos de inercia de cada una de ellas. Resultando igual al correspondiente momento de inercia del paralelepípedo. Este razonamiento puede aplicarse a los otros dos pares de caras del cuerpo de la Fig. 1. Se llega al resultado que los momentos principales de inercia de un paralelepípedo rectangular, con masa distribuida homogéneamente, son iguales a los correspondientes momentos de inercia de una caja vacía con las mismas dimensiones. De esta manera queda justificado usar una caja vacía en lugar de un prisma; además, debido a su peso, es más fácil lanzar manualmente al aire una caja vacía que un prisma del mismo tamaño.

Para que un prisma tenga el comportamiento ante rotaciones como lo tiene una raqueta, los valores de las relaciones entre los momentos de inercia deben ser análogos. Las dimensiones de la caja vacía aquí usada están, aproximadamente, en la relación  $a:b:c=1:3.8:9.6$ ; es decir  $b=3.8a$  y  $c=9.6a$ . En centímetros son  $a=5$ ,  $b=19$  y  $c=48$ . Con estas dimensiones, los valores de los momentos principales de inercia (ver las fórmulas en el pie de la Fig. 1) pueden escribirse como

$$I_{X'} : I_{Y'} : I_{Z'} \approx 6.9 : 6.0 : 1.0. \quad (6)$$

En este caso los valores de  $I_{X''}$  y de  $I_{Y'}$  también son cercanos a seis veces el valor de  $I_{Z'}$ .

Los valores relativos de los momentos de inercia expresados en las relaciones (3), (4) y (6) son muy parecidos entre sí, pero difieren de los expresados en (5). Esto indica que la caja de cartón con las dimensiones aquí descritas debe tener el mismo comportamiento de la raqueta ante rotaciones libre de torcas externas, lo cual quedó demostrado con el experimento.

## 6. Observaciones finales

Se obtienen buenos resultados si en lugar de una raqueta de tenis se utiliza una raqueta de juguete. Esto es recomendable

para no correr riesgo de que la raqueta de tenis se maltrate si no es atrapada.

Aunque una caja vacía de cartón o de plástico estrictamente no es un cuerpo rígido, usarla tiene la ventaja de que puede ser manipulada con facilidad; además, tiene bajo costo. Si fuese necesario, se puede aumentar la masa de la caja llenándola con algún material liviano, como el de empaque o hule espuma. Al ser llenada no se cambia el efecto de la fricción con el aire, pues éste depende de la geometría del cuerpo.

Este experimento de demostración es apropiado para realizarse en el salón de clase del curso de mecánica que se imparte en el primer año de la licenciatura en física o de licenciaturas afines, también puede adaptarse a cursos de física en el nivel bachillerato. Complementar la enseñanza de la física con experimentos de demostración ayuda considerablemente a su comprensión.

## Agradecimiento

Al Dr. Eleuterio Castaño Tostado por sus comentarios.

- 
1. H.F. Meiners, Ed. *Physics Demonstration Experiments*, Ronald, New York (1970).
  2. A. Manzur Guzmán, *Experimentos de Demostración para Física I y Física II* Universidad Autónoma Metropolitana, México (1992).
  3. M. Alonso y E.J. Finn, *Física*, Vol. I (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1986) Cap. 10.
  4. S.T. Thornton y J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5<sup>th</sup> edition. Thomson, Belmont, CA (2004) Sección 11.12.
  5. E. Piña Garza, *Dinámica de rotaciones*, Universidad Autónoma Metropolitana, México (1996) Sección 16.
  6. D. R. Lide, Ed. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 80<sup>th</sup> ed. CRC Press, Boca Raton, 1999. A-96.