

Sobre la ecuación de transferencia radiativa relativista especial

M.F. Duque D.

*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia,
e-mail: mfdqued@unal.edu.co*

L. Castañeda C.*

*Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia,
e-mail: lcastanedac@unal.edu.co, leonardo@astro.uni-bonn.de*

C.A. Duque D.

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia,
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia,
e-mail: caduqed@unal.edu.co*

Recibido el 23 de mayo de 2007; aceptado el 10 de diciembre de 2007

Con el fin de introducir de una manera clara y directa a los estudiantes de pregrado en física y/o astronomía en el tema de la transferencia radiativa, se realiza una revisión pedagógica explicando la manera de obtener la ecuación de transferencia radiativa, sus restricciones y los diferentes tipos de interacción presentes entre la radiación y la materia. Debido a que en la literatura encontrada sobre transferencia radiativa la covarianza no es explícitamente desarrollada, se hace necesario mostrar de manera explícita los cálculos en detalle y discutir sobre los efectos relativistas especiales.

Descriptores: Transferencia radiativa; relatividad especial.

The purpose is to introduce in a clear and direct way the students of undergraduate courses in physics and/or astronomy to the subject of radiative transfer. A pedagogical revision is made in order to obtain the radiative transfer equation, its restrictions and the different types of interactions present between the radiation and the matter. Because in the classical literature about radiative transfer the covariance is not fully developed, we show in an explicit manner detail calculations and then we discuss the relativistic effects.

Keywords: Radiative transfer; special relativity.

PACS: 95.30.-k; 95.30.Jx; 03.30.+p; 42.68.Ay

1. Introducción

La teoría de la transferencia radiativa fue desarrollada por S. Chandrasekhar, en trabajos desarrollados entre 1944 a 1949, y expuesta en su texto [14]; en esta teoría, se describe la dispersión y absorción de la radiación electromagnética por el medio interestelar [12]. Dicha descripción se puede realizar en la aproximación fenomenológica usando la variable intensidad específica [7] o en la aproximación cinemática por medio de la función de distribución. En la actualidad el estudio de la transferencia radiativa se presenta en diferentes campos de investigación como son astrofísica relativista, cosmología, geofísica, entre otros. Precisamente debido a su gran aplicabilidad en diferentes y variados campos de investigación, actualmente la transferencia radiativa constituye en sí misma un campo de investigación a nivel analítico y computacional; surge también un creciente interés en el estudio de los aspectos relativistas del transporte de radiación debido a la necesidad de considerarlos en el modelamiento y estudio de ambientes realistas, dada su gran influencia en tales modelos, como lo son el estudio de atmósferas terrestres y/o estelares, o la corroboración de teorías acerca de la radiación detectada por los telescopios de rayos-X CHANDRA y XMM-NEWTON.

Aunque existe excelente bibliografía sobre transferencia radiativa [1, 7, 11, 13], el carácter covariante de la misma es apenas mencionado, y los cálculos intermedios para su respectiva determinación o demostración no son desarrollados explícitamente, razón por la cual el presente trabajo resulta ser un complemento a dicha bibliografía, al desarrollar explícitamente los cálculos, además de discutir acerca de las restricciones que se presentan en el transporte relativista de radiación y cómo, a pesar de la covarianza, resultan notorios los efectos relativistas especiales.

El presente trabajo se desarrolla comenzando con una introducción a la transferencia radiativa (Sec. 2), donde se explica la metodología de obtención de la ecuación clásica y las limitaciones que son impuestas en el estudio del transporte de radiación no polarizada; posteriormente en la Sec. 3 se discute la generalización de la ecuación covariante de Boltzmann y los efectos relativistas especiales que se presentan al tener en cuenta el movimiento de la materia con la cual interactúa la radiación. Por último, en la Sec. 4 se realizan los cálculos intermedios para mostrar el carácter invariante relativista especial de la ecuación de transferencia radiativa y se distinguen los efectos relativistas que se presentan.

2. Transferencia radiativa clásica

La transferencia radiativa (o transporte de radiación) describe la interacción de la radiación al propagarse por un medio, teniendo en cuenta el punto de vista cuántico, en términos de cantidades macroscópicas. Por lo tanto, la transferencia radiativa proporciona información de los efectos macroscópicos de procesos cuánticos entre la radiación y la materia [4, 7, 12].

Para el estudio del proceso de transporte de radiación se determina la cantidad de energía dE_ν , por unidad de frecuencia $d\nu$, que está atravesando un elemento de superficie dA con vector normal \mathbf{n} , en el punto p (tal como se muestra en la Fig. 1), en un intervalo de tiempo dt , donde la radiación está contenida en un ángulo sólido $d\Omega$ alrededor de la dirección de propagación \mathbf{k} [3], es decir,

$$\begin{aligned} dE_\nu &= I_\nu dA dt d\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}, \\ &= I_\nu dA dt d\Omega d\nu \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

donde la *intensidad específica* I_ν es una variable que da información de los efectos macroscópicos de la interacción de la radiación (*i.e.*, la energía), al fluir a través de la materia [1, 7, 13]. Debido a que esta variación dE_ν depende del punto, dirección, frecuencia y tiempo de interacción, entonces la intensidad específica se podrá escribir como

$$I_\nu \equiv I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu), \quad (2)$$

es decir, la intensidad específica va a depender de la posición (\mathbf{r}), del momento del fotón [$\mathbf{p} = (h\nu/c)\mathbf{k}$] y del tiempo de interacción (t). Así la transferencia radiativa se puede ver como el cambio en la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ de fotones al recorrer el espacio de fase en un tiempo (t) [6].

La manera de relacionar la intensidad específica con la función de distribución viene dada por

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t), \quad (3)$$

donde la multiplicación por un factor de 2 corresponde a los dos posibles estados independientes de polarización del campo de radiación [9]. Por lo tanto, la variación de la intensidad específica I_ν , ó equivalentemente el cambio de la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ representa la manifestación macroscópica del transporte de radiación a través de la materia.

2.1. Ecuación de transferencia radiativa

Para determinar la variación de la intensidad específica al propagarse por un medio, se analiza el cambio de energía en un rayo debido a interacciones al recorrer una distancia ds . Por esta razón es necesario considerar un cilindro de área dA' (en las "tapas") y longitud infinitesimal ds , alrededor del rayo (Fig. 2) [22], y se calcula el cambio del flujo de energía del campo de radiación entre el haz incidente al cilindro y el haz emergente de este [7].

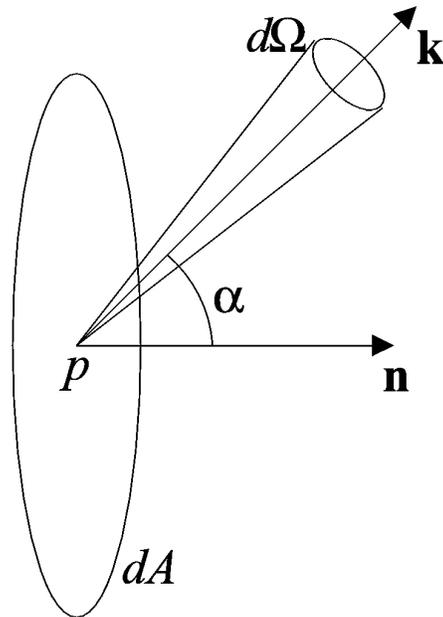


FIGURA 1. Transporte de radiación en el punto p del elemento de área dA .

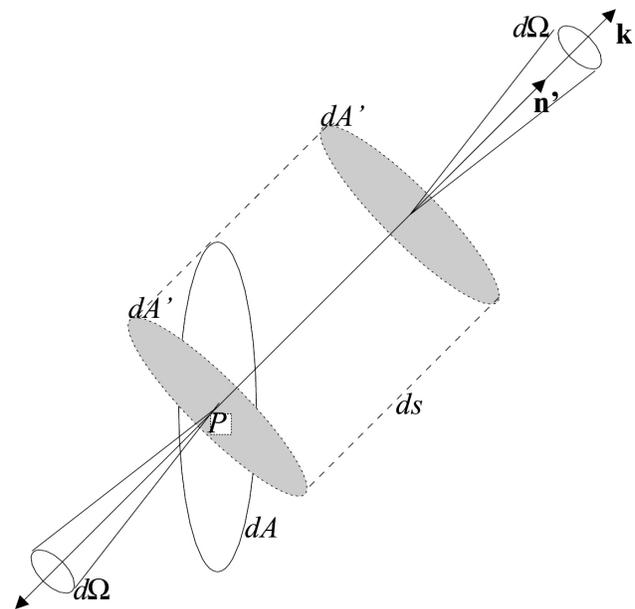


FIGURA 2. Trayectoria de rayo de radiación.

Debido a que en general la radiación no se propaga en la misma dirección a la normal al elemento de área dA de la Fig. 1, se considera un cilindro en dirección \mathbf{n}' , con área dA' (en las tapas del cilindro) y longitud ds , donde $dA' = dA \cos(\alpha)$ es la proyección del elemento de área del material sobre el plano definido por el vector normal \mathbf{n}' , de manera que los elementos de área dA y dA' están relacionados según la dirección de propagación de la radiación.

De esta forma la variación de la intensidad específica al recorrer una distancia ds , debido a las interacciones

$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)$, está dada por

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)}{ds} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{k}}{ds} \cdot \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)}{\partial \mathbf{k}} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)}{\partial t} + \frac{d\nu}{ds} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)}{\partial \nu} = g(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu), \quad (4)$$

donde el significado físico de cada uno de los términos de la Ec. (4) es el siguiente: $(d\mathbf{r}/ds)$ es la dirección de propagación del campo de radiación (*i.e.*, \mathbf{k}); $(d\mathbf{k}/ds)$ es el cambio en la dirección de propagación en el momento en que es transportada; (dt/ds) expresa el inverso de la velocidad de los fotones [16]; y $(d\nu/ds)$ representa el corrimiento en la frecuencia del campo a medida que se desplaza una distancia ds . El término $g(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu)$ representa las interacciones entre la radiación y la materia, y por lo tanto dichas interacciones son simplemente un tipo o combinaciones de procesos como absorción, emisión y/o dispersión (ver Sec. 2.2 para los diferentes tipos de interacción). De la relación (4) se puede ver que al no presentarse interacción (*i.e.*, $g(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t, \nu) = 0$) la intensidad específica es constante a lo largo de la trayectoria del rayo.

La validez de la ecuación de transferencia (4) se restringe a tratar al campo de radiación como una colección de partículas clásicas puntuales, donde el carácter cuántico de la descripción se presenta en la interacción entre la radiación y la materia (*e.g.*, absorción de fotones por átomos, que resulta en átomos excitados o ionizados) y no en cuantizar el campo electromagnético [10]. Por otro lado, al asumir que el transporte de radiación se realiza por medio de rayos, implica que esta descripción olvida efectos tales como difracción, interferencia y reflexión, ya que éstos son efectos ondulatorios de la radiación y no se pueden describir en esta aproximación [11].

Debido a las limitaciones al despreciar efectos refractivos, el término referente al cambio en la dirección de propagación se omite, aunque éste debe ser incluido cuando se utilicen coordenadas curvilíneas o se presente doblamiento gravitacional de la luz, así el transporte de radiación sea en un medio no refractivo [21]. Además de la anterior limitación, en transferencia radiativa clásica se asume que la materia con la cual esta interactuando el campo de radiación se encuentra en reposo y no hay presentes campos gravitacionales intensos, es decir, no se tienen en cuenta efectos relativistas especiales ni generales, de manera que no hay corrimiento en la frecuencia a medida que el fotón se desplaza.

Por lo tanto, la ecuación de transferencia radiativa dI_ν/ds [Ec. (4)] para un medio no refractivo, sin efectos relativistas y en coordenadas curvilíneas, es

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \left\{ \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right\} + \left\{ \frac{d\mathbf{k}}{ds} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \right\} I_\nu = g_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t), \quad (5)$$

donde los términos $\nabla_{\mathbf{r}}$ y $\nabla_{\mathbf{k}}$ denotan diferenciación con respecto a la posición y a los cosenos directores de \mathbf{k} , respectivamente.

Como las coordenadas rectangulares son un caso especial de las coordenadas curvilíneas, la expresión (5) en ese

sistema de coordenadas omite el tercer término, ya que la dirección de la base no cambia a lo largo de la trayectoria dada por ds , por lo tanto, la conocida ecuación de transferencia radiativa clásica en coordenadas rectangulares viene dada por

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \{ \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \} I_\nu = g_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t). \quad (6)$$

2.2. Interacción

Debido a que la transferencia radiativa da los aspectos macroscópicos de la interacción cuántica entre la radiación con la materia, ésta es insuficiente para describir interacciones entre los fotones, y las interacciones que se presentan se restringen al caso que la trayectoria seguida por el fotón entre interacciones es una línea recta y se desplaza con una velocidad igual a la del vacío c , *i.e.*, se asume a la materia como un *polvo de electrones y átomos*, y por lo tanto las interacciones son simplemente un tipo o combinaciones de procesos como:

- emisión estimulada
- emisión espontánea
- absorción
- dispersión,

donde la diferencia entre la emisión espontánea y la estimulada radica en que la primera es independiente del campo de radiación, por lo tanto es simplemente una fuente de energía. Cuando los fotones no siguen trayectorias rectas entre las colisiones, además de tener en cuenta las anteriores interacciones, se deben incluir efectos de refracción, donde el índice de refracción varíe continuamente con respecto a la posición, y la trayectoria del fotón es una curva [11].

Aunque la transferencia radiativa sea una aproximación al estudio de la interacción de la radiación con la materia, ésta es una gran herramienta que permite estudiar ambientes y condiciones que no se pueden realizar en un laboratorio terrestre. Algunas de sus aplicaciones en astrofísica son el estudio y modelamiento de la transferencia radiativa a través de atmósferas estelares, de galaxias llenas de polvo [17], y en un proceso de acreción [18, 19]; y en el campo cosmológico *e.g.* son el estudio del efecto Sunyaev - Zel'dovich [2].

3. Transferencia radiativa relativista especial

Debido a que en general la materia con la cual interactúa la radiación no esta en reposo, para describir completamente la transferencia radiativa en estos casos, se deben incluir los efectos que induce dicho movimiento. Al tener en cuenta el que la materia esté en movimiento constante, se debe hacer referencia con respecto a cuál observador se está analizando la transferencia de radiación. Por ello se consideran dos observadores, uno euleriano (laboratorio) y otro lagrangiano (comóvil, *i.e.*, moviéndose atado a la materia), de manera equivalente a como se definen en mecánica de fluidos [5].

Ya que estos dos observadores se relacionan vía las transformaciones de Lorentz y partiendo de la Sec. 2, en la cual se analizó la transferencia radiativa cuando la materia estaba en reposo con respecto a un observador, *i.e.*, la determinada por un marco (u observador) lagrangiano, se analiza la transferencia de radiación para un observador euleriano.

Como la física no puede depender del observador (*i.e.*, el sistema de referencia [13,15]), se debe escribir la ecuación de transferencia radiativa de manera covariante, es decir, que la forma funcional sea invariante bajo transformaciones de Lorentz. Para dicho propósito, y recurriendo de hecho de que la transferencia radiativa es un caso particular de la física cinética, se utiliza la generalización covariante de la ecuación de Boltzmann [7]:

$$\frac{df(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{d\tau} \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial f(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{\partial f(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{\partial p^\mu} = G(\mathbb{X}, \mathbb{P}), \quad (7)$$

donde x^μ y p^μ son las componentes de los correspondientes cuadri-posición \mathbb{X} (c-posición) y cuadri-momento \mathbb{P} (c-momento) de la partícula (fotón); y τ es el parámetro afín que usualmente es el tiempo propio.

La validez de la Ec. (7) implícitamente asume que la función de distribución $f(\mathbb{X}, \mathbb{P})$ es un invariante relativista. Al expandir explícitamente la anterior ecuación, hay una dependencia de ocho parámetros (las cuatro componentes de la c-posición más las cuatro componentes del c-momento) que establece que la ecuación covariante de Boltzmann se desarrolla en un espacio de 8 dimensiones, pero debido a que la norma del c-momento siempre es una característica inherente del sistema (proporcional a la masa en reposo m_0 , la cual es un invariante relativista) establece una ligadura $\mathbb{P}^2 \equiv p^\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$ [15], de manera que solo tres de las cuatro componentes de c-momento son independientes, por tal razón la Ec. (7) al igual que su versión clásica (4) se restringen a un espacio de 7 dimensiones.

Como las partículas que componen el campo de radiación son fotones (partículas con masa en reposo cero) cuya velocidad es c y tiempo propio τ nulo, en la Ec. (7) el parámetro afín tiempo propio ya no es una variable útil y por ello se emplea un nuevo parámetro afín η , el cual es la longitud de trayectoria recorrida del fotón. Por lo tanto, la visión cinética covariante de la ecuación de transferencia radiativa es

$$\frac{dx^\mu}{d\eta} \frac{\partial f(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\eta} \frac{\partial f(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{\partial p^\mu} = G(\mathbb{X}, \mathbb{P}), \quad (8)$$

donde el c-momento \mathbb{P} del fotón se define como $p^\mu \equiv dx^\mu/d\eta$, con η el parámetro afín longitud de trayectoria recorrida del fotón.

Debido a que la relatividad especial únicamente ingresa los efectos cinemáticos entre observadores que se estén moviendo a velocidad constante uno con respecto al otro, las condiciones impuestas en la sección de transferencia radiativa clásica acerca de que no hay fuerzas que afecten la trayectoria del fotón (conservación del momento), también son validas en la visión relativista especial y sus efectos serán que el fotón se propague en una línea recta, pero con dirección,

longitud de onda y frecuencia (por la constancia de la velocidad de la luz, el cambio en la frecuencia se debe compensar con el cambio en la longitud de onda) que dependen del observador, por lo tanto el término $dp^\mu/d\eta$ en (8) es cero (*i.e.*, la conservación del c-momento). Entonces la ecuación covariante de la transferencia radiativa no polarizada en un medio no refractivo es

$$p^\mu \frac{\partial f(\mathbb{X}, \mathbb{P})}{\partial x^\mu} = G(\mathbb{X}, \mathbb{P}). \quad (9)$$

Como se mencionó, el carácter covariante bajo *boost* de Lorentz de una ecuación significa que esta sea invariante en su forma para observadores que están relacionados por una transformación de Lorentz (*boost*). Por lo tanto, al demostrar que la ecuación de transferencia radiativa, desde el punto de vista cinético es covariante [Ec. (9)] y teniendo en cuenta las mismas condiciones tanto clásicas como relativistas especiales acerca de que no hay fuerzas que afecten la trayectoria del fotón, *i.e.*, la correspondiente conservación del momento (desde el punto de vista clásico) y el c-momento (desde el punto de vista relativista), al expandir el índice μ , y como las componentes del c-momento \mathbb{P} son $p^\mu = h\nu(1, \{1/c\}\mathbf{k})$, se obtiene la ecuación de transferencia radiativa clásica (6). Los efectos cinemáticos en este momento no aparecen, sino que ellos van a hacerse relevantes al combinar los dos observadores.

3.1. Efectos relativistas

Como se mencionó en la Sec. 3, la única manera de distinguir los efectos relativistas es comparar lo que dos observadores ven cuando cada uno se encuentra en un estado movimiento diferente. Para el caso relativista especial los efectos observados son:

- Aberración: la dirección de propagación del fotón depende del estado de movimiento del observador.
- Corrimiento Doppler: corrimiento en la frecuencia y por lo tanto en la longitud de onda para compensar la constancia de la velocidad del fotón.
- Advectivo: arrastre del fotón por un medio en movimiento. En este punto se debe aclarar que el arrastre del fotón no producirá que su velocidad de propagación sea mayor a la velocidad de la luz en el vacío (c), ya que al propagarse un campo de radiación a través de un medio diferente al vacío (donde dicho medio se caracteriza por un índice de refracción n , tal que $n > 1$) su velocidad de propagación esta dada por $v = c/n$, es decir, que disminuye con respecto a c .

3.2. Término de interacción $G(\mathbb{X}, \mathbb{P})$

Debido a que los fenómenos de interacción $G(\mathbb{X}, \mathbb{P})$ no pueden depender del sistema de referencia, ya que implicaría que mientras un observador “ve” que se presenta una absorción,

otro observador que está relacionado al anterior por medio de una transformación de Lorentz observaría que la interacción con el campo de radiación es una emisión estimulada. Por lo tanto por el primer postulado de la relatividad *la física no depende del observador ni de su estado cinemático* [15], se entiende que los procesos físicos que ocurren en la naturaleza son válidos para cualquier observador inercial, y lo que sucede es que cada observador inercial observa el mismo proceso físico, pero con diferente valor numérico y dirección, por consiguiente es cuando los efectos cinemáticos descritos en la sección anterior afectan los términos de interacción, en el sentido que los mismos procesos físicos son observados por distintos marcos inerciales pero que suceden a distintos valores de energía y de dirección de propagación para cada observador inercial.

4. Invariancia de la ecuación de transferencia radiativa

La ecuación de transferencia radiativa clásica es invariante bajo transformaciones de Lorentz, por lo tanto para mostrar dicha invariancia se tiene que la ecuación de transferencia del marco comóvil (Σ'),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I'}{\partial t'} + \mathbf{k}' \cdot \nabla' I' = g', \quad (10)$$

debe ser funcionalmente igual al del marco de laboratorio (Σ)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla I = g, \quad (11)$$

cuando los dos marcos (Σ' y Σ) están relacionados por un *boost* en dirección arbitraria. La transformación de Lorentz que relaciona dos marcos inerciales con velocidad relativa (\mathbf{v}) entre sí, es la transformación de Lorentz (*boost*) de velocidad β (donde $\beta \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}$ y $\beta \equiv |\beta|$) y dirección arbitraria [20]

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \mathbb{I} + (\gamma - 1)\beta^{-2}\beta\beta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

por completez de la demostración se escribe explícitamente ∂_{μ} y P^{μ} , los cuales son

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (13)$$

$$P^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P} \right) = \frac{h\nu}{c} (1, \mathbf{k}). \quad (14)$$

Recordando que un c-vector contravariante $x^{\mu'}$ en el sistema de referencia Σ' está relacionado con su correspondiente c-vector covariante x^{ν} en el sistema de referencia Σ por

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \quad (15)$$

y para c-vectores covariantes

$$x_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} x_{\nu}, \quad (16)$$

donde $\Lambda_{\nu'}^{\mu'} \Lambda_{\mu'}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\alpha}$ es el símbolo delta de Kronecker.

Retomando la transformación de Lorentz (12), y reemplazando los términos β por una notación vectorial más conocida β , las transformaciones entre los marcos $\Sigma - \Sigma'$ y $\Sigma' - \Sigma$, respectivamente, son

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \mathbb{I} + (\gamma - 1)\beta^{-2}\beta\beta \end{pmatrix} \quad (17)$$

y

$$\Lambda_{\mu'}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \mathbb{I} + (\gamma - 1)\beta^{-2}\beta\beta \end{pmatrix}, \quad (18)$$

siendo $\beta\beta$ una diada, $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ y $\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$.

Para demostrar la invariancia de la ecuación de transferencia radiativa (6), primero se debe transformar el c-vector divergencia [Ec. (13)] por medio de la transformación de Lorentz, lo cual viene dado por

$$\partial_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\alpha} \partial_{\alpha}, \quad (19)$$

obteniendo para cada una de sus componentes

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \cdot \nabla \right), \quad (20)$$

$$\nabla' = \gamma\beta \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla + (\gamma - 1)\beta^{-2}\beta\beta \cdot \nabla, \quad (21)$$

y segundo se debe realizar la transformación de Lorentz del c-vector momento del fotón [Ec. (14)], obteniendo para cada una de sus componentes

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cdot \mathbf{k}), \quad (22)$$

$$\mathbf{k}' = \frac{\nu}{\nu'} (-\gamma\beta + \mathbf{k} + (\gamma - 1)\beta^{-2}\beta\beta \cdot \mathbf{k}). \quad (23)$$

Las expresiones desde la Ec. (20) hasta la Ec. (23), son las necesarias para demostrar la invariancia de la ecuación de transferencia radiativa, adicionalmente los efectos relativistas corrimiento Doppler y aberración (Sec. 3.1) se pueden observar en las transformaciones de cada una de las componentes de c-vector momento del fotón, por lo tanto reagrupando y ordenando los términos se obtiene que el factor de corrimiento entre las frecuencias ν' y ν está dado por

$$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma(1 - \beta \cdot \mathbf{k}), \quad (24)$$

y utilizando $\beta^{-2} = \gamma^2/\gamma^2 - 1$ en la Ec. (23), el efecto de aberración entre las direcciones de propagación \mathbf{k}' y \mathbf{k} viene dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{\nu}{\nu'} \left\{ \mathbf{k} - \gamma\beta \left(1 - \frac{\gamma\beta \cdot \mathbf{k}}{\gamma + 1} \right) \right\}, \quad (25)$$

una visión gráfica del comportamiento de estos efectos [Ecs. (24) y (25)] se puede ver en el apéndice 5.

Utilizando la relación de la intensidad invariante \mathbf{I} [7], la cual viene dada por

$$\mathbf{I} \equiv \frac{I'}{\nu'^3} = \frac{I}{\nu^3}, \quad (26)$$

y la relación entre las frecuencias ν y ν' [Ec. (24)], la expresión entre las [Ec. (26)] intensidades en los marcos euleriano y lagrangiano, quedan determinadas como

$$I' = \gamma^3(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})^3 I. \quad (27)$$

Remplazando las cantidades en el marco comóvil por las correspondientes al marco del laboratorio (las cuales se rela-

cionan vía las transformaciones de Lorentz), se tiene que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} I' + \mathbf{k}' \cdot \nabla' I' = g'. \quad (28)$$

Remplazando en la Ec. (28) los resultados de (21), (25) y (27) se tiene

$$\begin{aligned} & \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \right) (\gamma^3(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})^3) I + \frac{1}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})} \\ & \times \left(\mathbf{k} - \gamma \boldsymbol{\beta} \left(1 - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}}{\gamma + 1} \right) \right) \cdot \left(\nabla + \gamma \boldsymbol{\beta} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \right) \right) \\ & (\gamma^3(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})^3) I = g'. \end{aligned} \quad (29)$$

Suponiendo que no se presentan efectos de refracción o doblamiento gravitacional de la luz (ya que en el marco comóvil se determina la ecuación de transferencia radiativa sin doblamiento gravitacional de la luz ó refracción, en el marco de laboratorio se debe observar lo mismo, debido a que la física para ambos observadores debe ser la misma), las variaciones de $\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})$ son nulas, *i.e.*, no se presentan. Por lo tanto factorizando el término $\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})^2$ en la expresión (29) se encuentra

$$\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \right) I + \left(\mathbf{k} - \gamma \boldsymbol{\beta} \left(1 - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}}{\gamma + 1} \right) \right) \cdot \left(\nabla + \gamma \boldsymbol{\beta} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \right) \right) I = G, \quad (30)$$

donde $G = g'/\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})^2$. Expandiendo los términos y agrupándolos en un paréntesis con un factor común $(1/c)(\partial I/\partial t)$ y uno con ∇I se encuentra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} \left(\gamma^2 - \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} + \gamma \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta} - \gamma^2 \beta^2 + \frac{\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} \beta^2}{\gamma + 1} \right) + \mathbf{k} \cdot \nabla I \\ & + \left(\gamma^2 - \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} + \frac{\gamma^2 \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\gamma + 1} - \gamma + \frac{\gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})}{\gamma + 1} - \frac{\gamma^3 \beta^2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma^4 \beta^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})}{(\gamma + 1)^2} \right) \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla I = G. \end{aligned} \quad (31)$$

Simplificando por separado el primero y el segundo paréntesis se encuentra

$$\left(\gamma^2 - \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} + \gamma \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta} - \gamma^2 \beta^2 + \frac{\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} \beta^2}{\gamma + 1} \right) = 1, \quad (32)$$

y

$$\gamma^2 - \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} + \frac{\gamma^2 \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\gamma + 1} - \gamma + \frac{\gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})}{\gamma + 1} - \frac{\gamma^3 \beta^2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma^4 \beta^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})}{(\gamma + 1)^2} = 0, \quad (33)$$

por lo tanto se obtiene la ecuación de transferencia radiativa en el marco del laboratorio como

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla I = G, \quad (34)$$

la cual es funcionalmente idéntica a la del marco comóvil (28). De lo anterior se distingue que los efectos cinemáticos relativistas se presentan en la transformación de la frecuencia y dirección de propagación, *i.e.*, corrimiento Doppler y aberración.

La anterior demostraciónⁱ muestra que tanto para un observador euleriano como para un observador lagrangiano (*i.e.*, un marco de laboratorio y un marco comóvil, respectivamente) determinan el mismo tipo de ecuación de transferencia radiativa, sin ningún efecto aparente de su estado de movimiento. Por tal razón, en el estudio de procesos que involucran la transferencia radiativa en medios en movimiento, observadores moviéndose, se requiere de un marco mixto, es decir, un marco donde las variables dependientes estén en el marco de laboratorio y las variables independientes estén en el marco de comóvil.

5. Conclusiones

La demostración de la invariancia relativista especial de la ecuación de transferencia radiativa, encuentra que aun cuando no existe ningún tipo de interacción entre la radiación y la materia, se presentan los efectos relativistas de aberración y corrimiento Doppler, como consecuencia de que la materia esté en movimiento y dichos efectos son independientes del tipo de interacción entre la radiación y la materia; el presente trabajo sirve como complemento y aclaración del por qué de la necesidad de marcos mixtos en el tratamiento relativista de la ecuación de transferencia radiativa.

El efecto de corrimiento Doppler (factor de corrimiento) tiene un comportamiento irregular, ya que a medida que la norma del boost tiende a su valor máximo este va a cero cuando el ángulo entre los observadores es cero, lo cual muestra que cuando un observador va en la misma dirección de propagación de la radiación y a medida que su velocidad aumenta, este sistema observa que la frecuencia que mide y la que tiene la radiación tienden a ser las mismas, esto se observa en la Fig. 5.

El efecto de aberración tiene un valor límite π a diferencia del factor de corrimiento que puede variar hasta infinito. En la Fig. 7 se observa que sin importar el ángulo entre los observadores a medida que la norma del boost aumenta la aberración tiende a su valor límite, siempre y cuando el ángulo entre los observadores sea diferente de cero. Adicionalmente en la Fig. 8 se encuentra que el efecto de aberración es independiente del boost cuando el ángulo entre los observadores es 0 ó π .

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al Departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia donde este trabajo fue desarrollado, adicionalmente desean agradecer por los valiosos comentarios por parte del referí que hicieron más completo el presente trabajo.

Apéndice

A. Comportamiento de los efectos de corrimiento doppler y aberración

A continuación se presenta el comportamiento de los efectos relativistas de corrimiento Doppler (24) y aberración (25), con respecto al ángulo entre la dirección de propagación \mathbf{k} y el boost β .

Corrimiento Doppler

El factor de corrimiento [Ec. (24)] está dado por

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \beta \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{A.1}$$

donde el término \mathbf{k} indica la dirección de propagación de la radiación. Debido a que en la Ec. (A.1) se presenta el producto escalar $\beta \cdot \mathbf{k}$, el factor de corrimiento depende de las variables independientes $\beta \equiv |\beta|$ y θ , siendo θ el ángulo entre la dirección de propagación \mathbf{k} y el boost β , de manera que la expresión (A.1) se puede escribir como

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \beta \cos(\theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{A.2}$$

donde se ha tomado que la norma del vector dirección de propagación $|\mathbf{k}|$ es igual a la unidad [8]. El comportamiento del factor de corrimiento (A.2) se puede observar en la Fig. 3.

Una visión detallada del comportamiento del factor de corrimiento (Fig. 3) se puede observar en la Fig. 4 (boost constantes en magnitud) y en la Fig. 5 (ángulos constantes).

En la Fig. 4 se observa cómo el factor de corrimiento para un boost igual a cero es igual a la unidad, ya que esto significa que son dos sistemas que están en reposo relativo entre sí, pero que sus ejes pueden estar rotando un ángulo θ entre ellos. Para un boost diferente de cero (e.g., $\beta = 0.5$ ó $\beta = 0.99$) se puede observar como el factor de corrimiento no sólo va a depender de la norma de la velocidad relativa entre los sistemas inerciales sino de su dirección de manera que el factor

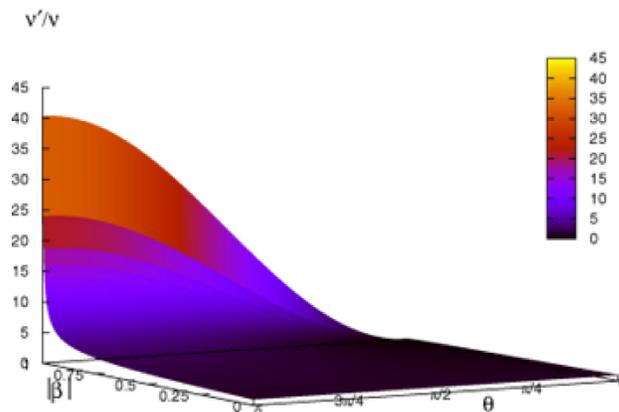


FIGURA 3. Comportamiento del factor de corrimiento con respecto a la norma del boost $|\beta|$ y el ángulo θ .

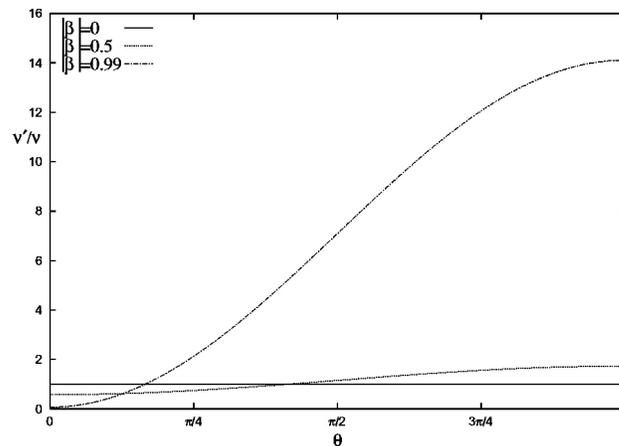


FIGURA 4. Comportamiento del factor de corrimiento a boost constantes.

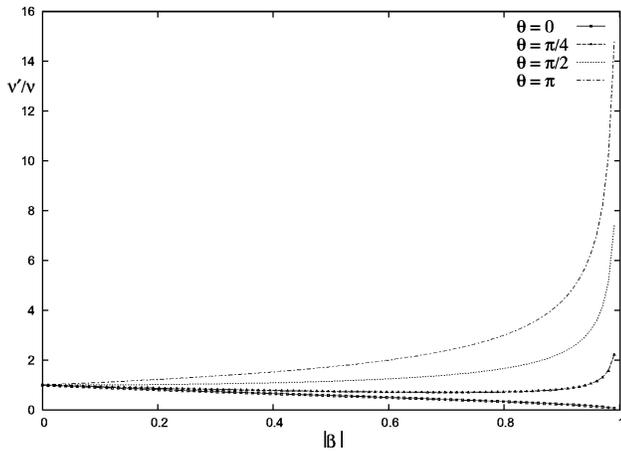


FIGURA 5. Comportamiento del factor de corrimiento a ángulos constantes.

ν'/ν crece a medida que la norma del *boost* y su dirección tienden hacia sus valores extremos, respectivamente.

En la Fig. 5 se observa cómo el factor de corrimiento para un ángulo θ igual a cero tiende a cero, ya que esto significa dos sistemas que se encuentran dirigidos en la misma dirección, pero a medida que aumenta la velocidad relativa entre ellos la frecuencia de la radiación que ve uno de ellos tiende a ser nula, ya que uno de los sistemas al aumentar su velocidad relativa respecto al otro sistema, se aproximaría a la velocidad de propagación de la onda por lo que no vería ninguna onda, por lo tanto el factor de corrimiento entre los observadores sería nulo. Para un ángulo diferente de cero (e.g., $\theta = \pi/2$ ó $\theta = \pi/4$) como el factor de corrimiento crece rápidamente a medida que la velocidad relativa entre los sistemas tiende a la unidad.

Aberración

El término de aberración [Ec. (25)] viene dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{\nu}{\nu'} \left\{ \mathbf{k} - \gamma\beta \left(1 - \frac{\gamma\beta \cdot \mathbf{k}}{\gamma + 1} \right) \right\}, \quad (A.3)$$

donde el término \mathbf{k} indica la dirección de propagación de la radiación. Debido a que en la Ec. (A.3) se presenta el producto escalar $\beta \cdot \mathbf{k}$, el término de aberración depende de las variables independientes $\beta \equiv |\beta|$ y θ , siendo θ el ángulo entre la dirección de propagación \mathbf{k} y el *boost* β , de manera que la expresión (A.3) se puede escribir como

$$\mathbf{k}' = \frac{\nu}{\nu'} \left\{ \mathbf{k} - \gamma\beta \left(1 - \frac{\gamma\beta \cos(\theta)}{\gamma + 1} \right) \right\}. \quad (A.4)$$

Como el efecto relativista de aberración Ec. (A.4), es realmente un efecto relativista sobre el ángulo entre la dirección de propagación \mathbf{k} y el *boost* β ya que la norma del vector dirección de propagación (ya sea $|\mathbf{k}|$ como $|\mathbf{k}'|$) es siempre igual a la unidad [8], al realizar el producto punto a ambos lados de la igualdad de la ecuación (A.4) con β se obtiene que

$$\beta \cdot \mathbf{k}' = \frac{\nu}{\nu'} \beta \cdot \left\{ \mathbf{k} - \gamma\beta \left(1 - \frac{\gamma\beta \cos(\theta)}{\gamma + 1} \right) \right\}, \quad (A.5)$$

definiendo a θ' el ángulo entre \mathbf{k}' y el *boost*, la relación (A.5) queda de la forma

$$\cos(\theta') = \frac{\nu}{\nu'} \left\{ \cos(\theta) - \gamma\beta \left(1 - \frac{\gamma\beta \cos(\theta)}{\gamma + 1} \right) \right\}, \quad (A.6)$$

y reemplazando el factor de corrimiento (A.2) en la relación (A.6), se encuentra que el efecto de aberración es

$$\cos(\theta') = \frac{\cos(\theta) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta)}, \quad (A.7)$$

donde se ha utilizado que $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$. El comportamiento del efecto de aberración (A.7) se puede observar en la Fig. 6.

Una visión detallada del comportamiento del efecto de aberración (Fig. 6) se puede observar en la Fig. 7 (*boost* constantes en magnitud) y en la Fig. 8 (ángulos constantes).

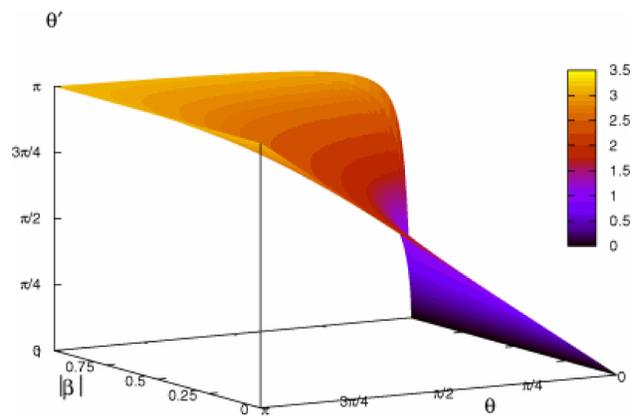


FIGURA 6. Comportamiento del efecto de aberración con respecto a la norma del *boost* ($|\beta|$) y θ el ángulo entre la dirección de propagación \mathbf{k} y el *boost* β .

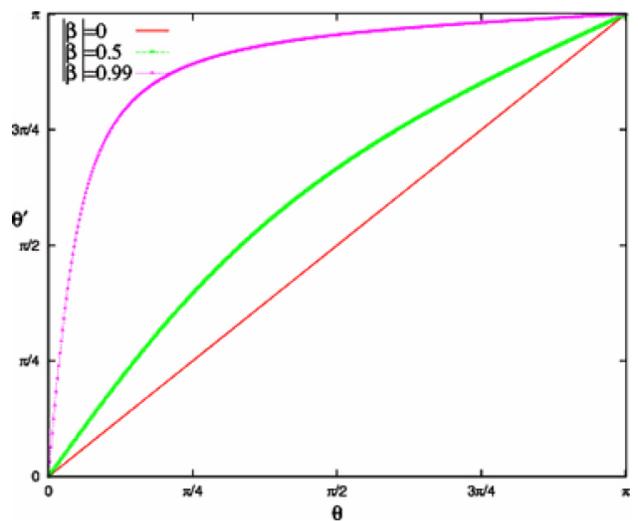


FIGURA 7. Comportamiento del efecto de aberración a *boost* constantes.

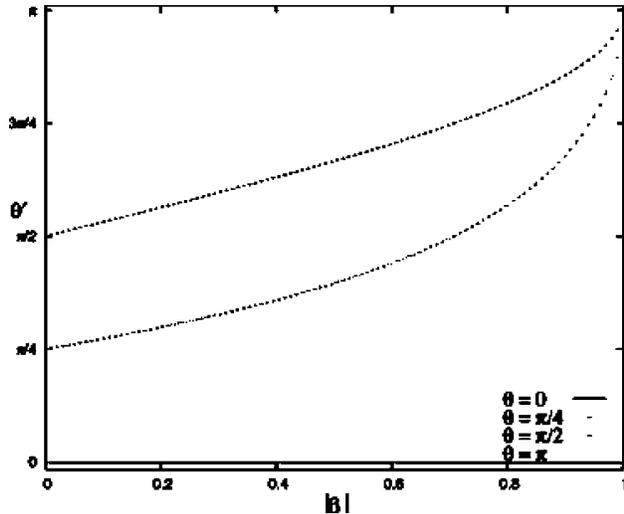


FIGURA 8. Comportamiento del efecto de aberración a ángulos constantes.

En la Fig. 7 se observa cómo el efecto de aberración para un boost nulo es igual a la unidad, ya que esto significa que son dos sistemas que están en reposo relativo entre sí, pero que sus ejes pueden estar rotando un ángulo θ entre ellos. Para un *boost* diferente de cero (e.g., $\beta = 0.5$ ó $\beta = 0.99$) se puede observar como el efecto de aberración no solo va a depender de la norma de la velocidad relativa entre los sistemas inerciales sino de su dirección de manera que la aberración θ' crece hacia su valor límite a medida que la norma del *boost* y su dirección (i.e., β y θ , respectivamente) tienden hacia sus valores extremos, respectivamente.

En la Fig. 8 se observa como el efecto de aberración para un ángulo θ igual a 0 ó π es independiente de la velocidad relativa entre los marcos de referencia (i.e., el boost), mientras que para ángulos con valor diferente a los anteriores valores (e.g., $\theta = \pi/2$ ó $\theta = \pi/4$) la aberración θ' crece hacia su valor límite a medida que la norma del boost y su dirección (i.e., β y θ , respectivamente) tienden hacia sus valores extremos, respectivamente.

B. Método directo

De acuerdo con (10), la ecuación de transferencia radiativa se puede escribir como:

$$k^\mu \partial_\mu I = g. \quad (\text{B.1})$$

Dada la invarianza de I y g , una manera compacta de demostrar la invarianza de la ecuación de transferencia radiativa es mostrar que el operador

$$k^\mu \partial_\mu, \quad (\text{B.2})$$

es invariante. Para ello se consideran las reglas de transformación

$$k^\mu = \Lambda^\mu_{\rho'} k^{\rho'}, \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_\mu = \Lambda^\sigma_{\mu'} \partial_{\sigma'}, \quad (\text{B.4})$$

donde Λ es una transformación ortogonal con álgebra

$$\Lambda^\mu_{\sigma'} \Lambda^{\rho'}_{\mu} = \delta^{\rho'}_{\sigma'}. \quad (\text{B.5})$$

La transformación Λ contiene como caso particular los *boost* de Lorentz. De esta manera es directo mostrar que

$$k^\mu \partial_\mu = k^{\rho'} \partial_{\rho'}, \quad (\text{B.6})$$

con lo cual se muestra de una manera directa la invarianza de la ecuación de transferencia radiativa. Sin embargo, dado el carácter educativo que pretende el artículo, nuestro enfoque se realiza más sobre los efectos cinemáticos y su interpretación física, dado que en los libros de texto y en la bibliografía especializada se dejan de lado y no se explotan a fondo sus riquezas.

* Presente dirección: AIfA Bonn, Germany.

i Otra manera de demostrar la invarianza de la ecuación de transferencia radiativa (10) aunque de manera más directa y compacta es la consignada en el apéndice 5.

1. S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover Publications, Inc., New York, 1967) p. 183.
2. Y.B. Zel'dovich and R.A. Sunyaev, *Astrophys. Space Sci.* **4** (1969) 301.
3. Donde se utiliza la visión de la radiación como un rayo; esta visión es válida para el caso en que las dimensiones físicas del sistema L sean muy grandes en comparación con la longitud de onda de la radiación λ , i.e., $L \gg \lambda$.
4. M.F. Duque, L. Castañeda C., and N.C. Forero, *Rev. Col. Fís.* **36** (2004) 405.

5. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, volume VI. Fluid Mechanics, Second English edition (Butterworth-Heinemann, Oxford, Revised, 1997) p. 1.
6. Macroscópicamente la radiación se puede describir por la intensidad específica. y desde una visión microscópica el campo de radiación esta compuesto por un conjunto de fotones que es descrito por una función de distribución de Boltzmann [7].
7. D. Mihalas and B. Weibel-Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Dover Publications, Inc., New York, 1999).
8. No se debe confundir el término \mathbf{k} dirección de propagación cuya norma siempre es igual a la unidad con el vector onda.
9. T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics*, volume I. Astrophysical Process, chapter 6. (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).

10. Para transferencia radiativa cuántica y como ésta se relaciona con la descripción fenomenológica se puede ver C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. A* **23** (1981) 062802.
11. G.C. Pomraning, *The Equations of Radiation Hydrodynamics* (Pergamon Press Ltd., Oxford, 1973).
12. G.B. Rybicki, *J. Astrophys. Astron.* **17** (1996) 95.
13. G.B. Rybicki and A.P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979).
14. S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Oxford University Press., Oxford, 1950).
15. B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
16. Se debe aclarar que el término $dt/ds \equiv 1/v$ con v la velocidad de propagación de la radiación, es siempre c . ya que la materia con la que interactúa el campo de radiación se supone es polvo, de manera que la interacción juega el papel de disminuir la energía, que se va a reflejar en un cambio en la frecuencia, longitud de onda y dirección de propagación, *i.e.*, ν , λ , y \mathbf{k} , respectivamente. pero no en la velocidad de propagación.
17. D. Semionov y V. Vansevicius, *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2005.
18. S.L. Shapiro. *Astrophys. J.* 180 (1973) 531; **185** (1973) 69; **189** (1974) 343; R.A. Sunyaev y L.G. Titarchuk, *Astron. Astrophys.* **86** (1980) 121; **143** (1985) 374.
19. L. Titarchuk and T. Zannias, *Astrophys. J.* 493 (1998) 863.
20. Utilizando la notación de Mihalas & Mihalas [7], Págs. 135 - 136.
21. Ya que en coordenadas curvilíneas, los vectores de la base rotan con respecto a la trayectoria determinada por el vector de propagación \mathbf{k} , *i.e.*, el segundo y tercer termino de la Ec. (4).
22. Ya que se desea es determinar cuanta intensidad varió en un rayo (energía) debido a interacciones se asume que el cilindro está paralelo a la dirección de propagación de la radiación. La suposición de que el cilindro encierre al rayo, es determinar que el único mecanismo de variación del campo de radiación es debido a interacciones, y no a que los fotones decaen espontáneamente, o que se salieron por los lados del cilindro, la limitación cuántica del tamaño del cilindro esta relacionada con el principio de incertidumbre para ver dicha limitación dirijase a Ref. 13.