

# Colisión en dirección vertical

A. Manzur

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,  
Apartado Postal 55-534, 09340 México, D.F., México,  
e-mail: amg@xanum.uam.mx*

Recibido el 2 de agosto de 2007; aceptado el 8 de octubre de 2007

Se presenta un experimento de demostración que ilustra una situación en la que las leyes de conservación del ímpetu y de la energía mecánica no se cumplen; sin embargo, su uso permite obtener una buena descripción cualitativa del resultado. El objetivo se logra al analizar la colisión vertical que se produce entre dos pelotas. Las pelotas con masas apropiadas se dejan caer, con la más liviana encima de la más masiva. Después de chocar con el suelo, la pelota inferior carece de movimiento vertical, mientras que la pelota de encima rebota hasta una altura mayor que la altura desde donde fueron soltadas.

*Descriptor:* Experimentos de demostración; métodos de enseñanza; colisiones verticales.

The demonstration experiment here presented illustrates a situation where the conservation laws of linear momentum and mechanical energy are not satisfied; however, their use allows a good qualitative description of the result observed. The objective is satisfactorily gotten by the analysis of the vertical collision between two balls. The balls with the appropriate masses are dropped, the small mass resting on top of the larger mass; after the collision between the bottom ball and the floor this ball does not have vertical motion, whereas the top ball rebounds up to a height higher than its original height.

*Keywords:* Demonstration experiments; teaching methods; vertical collisions.

PACS: 01.50.My; 01.40.gb

## 1. Introducción

Los experimentos de demostración (también llamados experimentos de cátedra o demostraciones a secas) tienen gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje como un recurso pedagógico en la clase de teoría, ya que ilustran y refuerzan los conceptos involucrados. De este tipo de experimentos, los más exitosos para motivar a estudiar un fenómeno son los que presentan un resultado espectacular, por ser opuesto o diferente a lo esperado intuitivamente.

El propósito de una demostración es hacer resaltar un concepto físico y dejar en los estudiantes una impresión, tan memorable como sea posible, de cómo se aplica algún principio físico para explicar el fenómeno observado[1,2]. Para que esto se logre, la característica principal que debe tener es que exhiba o revele la física involucrada de la manera más simple posible. En el caso particular de algunos temas de mecánica clásica no se requieren dispositivos especiales, se pueden hacer buenas demostraciones cualitativas y de corta duración con objetos sencillos, tales como pelotas, un palo, un yoyo o una rueda de bicicleta.

Cuando se estudian colisiones elásticas entre dos cuerpos, la práctica usual es considerar que se producen en la dirección horizontal y en el vacío, porque en ese caso tanto la energía mecánica como el ímpetu se conservan. Sin embargo, suponer válidas estas leyes de conservación para estudiar colisiones en situaciones donde se sabe que no se cumplen, conducen a un resultado que al menos cualitativamente es congruente con el experimento.

En la demostración que aquí se presenta se produce una colisión entre dos pelotas en la dirección vertical. Las pelotas

se dejan caer libremente estando una encima de la otra; después que la pareja choca con el suelo la pelota de encima rebota hasta una altura mayor que la altura inicial. Para explicar este resultado se hace la suposición de que la colisión es elástica, aunque no lo sea. Una manera de cuantificar qué tan cerca está una colisión de ser elástica es a través del coeficiente de restitución; se menciona que este coeficiente se aplica como control de calidad de pelotas en algunos deportes. Con el fin de dirigir la atención en el propósito de la demostración, aquí se le presenta en forma de un problema el que se resuelve experimental y teóricamente[2].

## 2. Problema

Dos pelotas de masas diferentes se dejan caer por separado desde una altura fija; cada pelota rebota en el suelo y sube hasta una altura menor que la altura desde donde fue soltada. Luego las pelotas se dejan caer como una pareja, estando una encima de la otra. ¿Qué valores deben tener las masas para que, dejando caer las dos pelotas una encima de la otra, la de abajo se quede en el suelo y la de encima rebote hasta una altura mayor que la altura desde donde fueron soltadas?

## 3. Objetivos

Mostrar que aun cuando en una colisión en dirección vertical, estrictamente, no se cumplen las leyes de conservación del ímpetu y de la energía mecánica, su uso permite obtener una buena descripción cualitativa del resultado de la colisión.

Repasar el significado del coeficiente de restitución y dar ejemplos de su aplicación.

#### 4. Descripción experimental

Se dispone de varias pelotas de masas diferentes. Entre ellas debe haber dos cuyas masas están en la relación 1:3, aproximadamente (es decir, la masa de una es el triple de la masa de la otra). Primero se deja caer cada una de las pelotas y se observa que al rebotar no sube hasta su altura inicial. Ahora se escogen dos pelotas, cuyas masas no están en la relación 1:3, y se dejan caer, con una encima de la otra. Después de chocar con el suelo, la pelota inferior rebota hasta una altura pequeña; mientras que la pelota de encima rebota, pero sube hasta una altura menor que la altura inicial desde donde fue soltada.

Después se escogen las dos pelotas cuyas masas están en la relación 1:3; se dejan caer ambas, con la más masiva encima, y el resultado no es diferente al de las parejas anteriores. Sin embargo, cuando se sueltan estando encima la más ligera o liviana se obtiene un resultado espectacular e inesperado: la pelota de encima rebota hasta una altura notoriamente mayor que la altura inicial, mientras que la más masiva queda en el suelo prácticamente sin movimiento vertical.

#### 5. Descripción teórica

El hecho de que ninguna pelota, soltada individualmente, regrese hasta su altura inicial, es una evidencia de que la energía mecánica no se conserva. La pelota pierde energía debido a la resistencia que el aire opone a su movimiento y a la deformación que sufre al chocar con el suelo; también se pierde energía en forma de calor y de sonido durante la colisión con el suelo.

El hecho observado de que al caer juntas las dos pelotas cuyas masas están en la relación 1:3 con la más ligera encima, ésta rebota hasta una altura mayor que desde donde fue soltada, significa que de alguna manera ganó energía mecánica durante la colisión; esta energía ganada es mayor que la que pierde cuando cae ella sola. La única posibilidad de adquirir esta energía es que la tome de la energía de la otra pelota, durante la colisión entre ellas. En el cálculo que sigue se supondrá que durante la colisión la pelota de masa mayor transfiere a la otra toda su energía mecánica; es decir, la pelota mayor se queda sin movimiento en el suelo.

Aunque las dos pelotas caen unidas, para facilitar la explicación teórica se hará la suposición de que justo antes de que la pelota inferior toque el suelo, ambas pelotas no están en contacto sino que están separadas por una distancia lo suficientemente pequeña para que las velocidades puedan considerarse de igual magnitud, pero lo suficientemente grande para que la pelota inferior tenga tiempo de chocar con el suelo y después chocar con la otra justo cuando empieza a rebotar. El tiempo de duración en este tipo de colisiones (entre pelotas o entre pelota y bate, por ejemplo) es del orden de milisegundos.

El interés aquí es explicar por qué la pelota de encima rebota tan alto. Para ello se supondrá (como una aproximación) que las colisiones son unidimensionales y elásticas, lo cual

es equivalente a pedir que tanto la ley de conservación de la energía mecánica como la ley de conservación del ímpetu se cumplan. Sin embargo, es importante estar consciente que, estrictamente, el ímpetu no se conserva en la dirección vertical, pues dos fuerzas externas están presentes: la fuerza de gravedad y la resistencia del aire.

Las pelotas individualmente son soltadas desde la altura  $h+R$ , siendo  $R$  el radio de cada una de ellas (ver Fig. 1). Si las pelotas tienen masas  $m_i$  y si se conserva la energía mecánica, con el nivel cero de la energía potencial en la altura  $R$ , entonces para cada pelota que llega al suelo con velocidad  $v_i$  se cumple que  $m_i gh = m_i v_i^2 / 2$ , de donde se obtiene que  $v_i^2 = 2gh$ . Usando este resultado se puede considerar que todas las pelotas que recorren la altura  $h$  llegan al suelo con la misma velocidad si el valor de  $R$  es muy pequeño comparado con el valor de  $h$ . Con la suposición de que la colisión de la pelota inferior con el suelo es elástica, la magnitud de la velocidad con que llega al suelo es la misma con la que tiende a abandonarlo.

La información relevante sobre la colisión entre las dos pelotas se muestra en la Fig. 2. La parte (a) de la figura ilustra la situación antes de que la pelota de encima (etiquetada como pelota 1) choque con la pelota 2, la cual en ese momento empieza a subir con la misma rapidez  $v_{2a}$  con que llegó al suelo y que es el mismo valor de la velocidad que lleva la pelota 1, es decir,  $v_{1a} = v_{2a}$ . Estas magnitudes son iguales porque ambas pelotas recorren la misma altura  $h$ , pues se ha supuesto que los radios son despreciables. Las flechas indican el sentido de las velocidades. La parte (b) de la figura ilustra la situación justamente después de que la pelota 1

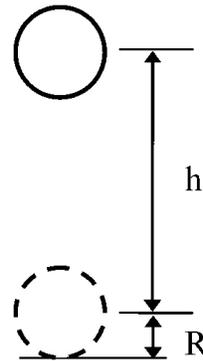


FIGURA 1. La pelota de radio  $R$  recorre la altura  $h$ .

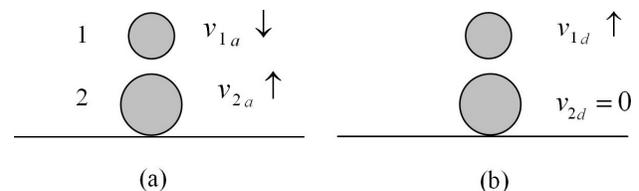


FIGURA 2. (a) Justo antes de que las pelotas choquen entre sí, la pelota 1 cae con velocidad  $v_{1a}$  mientras que la pelota 2 va a subir con velocidad  $v_{2a}$ . (b) Justo después de que las pelotas chocan, la pelota 1 sube con velocidad  $v_{1d}$  mientras que la pelota 2 permanece estática.

choca con la pelota 2; la pelota 2 se queda sin movimiento (su velocidad tiene magnitud nula,  $v_{2d} = 0$ ) y la pelota 1 empieza a subir con velocidad  $v_{1d}$ . Los subíndices  $a$  y  $d$  se refieren a antes y después de la colisión entre las pelotas.

Las pelotas tienen masas  $m_1$  y  $m_2$ . Con referencia a la figura y tomando la dirección positiva hacia arriba, el ímpetu antes de la colisión entre las pelotas es  $p_a = m_2v_{2a} - m_1v_{1a}$  y el ímpetu después es  $p_d = m_1v_{1d}$ . Al igualar estos ímpetus y teniendo en cuenta que las magnitudes de las velocidades antes de la colisión son iguales ( $v_{1a} = v_{2a}$ ), se obtiene

$$m_1v_{1d} = (m_2 - m_1)v_{1a}. \quad (1)$$

Por su parte, la energía cinética antes de la colisión es  $K_a = (m_1v_{1a}^2/2) + (m_2v_{2a}^2/2)$  y después es  $K_d = m_1v_{1d}^2/2$ . Si se escoge como el nivel cero de la energía potencial del sistema la posición donde se produce la colisión, entonces para usar la conservación de la energía mecánica es suficiente considerar solamente a la energía cinética. Igualando las energías cinéticas  $K_a$  y  $K_d$ , pues suponemos colisión elástica, se llega a que

$$m_1v_{1d}^2 = m_1v_{1a}^2 + m_2v_{2a}^2. \quad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro la fórmula (2) entre la (1), y usando  $v_{1a} = v_{2a}$ , se obtiene la velocidad inicial con que la pelota 1 sube, el resultado es

$$v_{1d} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}v_{1a}. \quad (3)$$

Sustituyendo este valor de  $v_{1d}$  en cualquiera de las expresiones (1) o (2) se obtiene que los valores de las masas deben satisfacer la siguiente relación

$$m_2 = 3m_1. \quad (4)$$

Con estos resultados para  $v_{1d}$  y  $m_2$  puede ser calculada la altura a la que llegaría la pelota 1 en su rebote. Si se cumpliere la conservación de la energía mecánica, para el movimiento de caída se tendría que  $m_1gh_1 = (m_1v_{1a}^2)/2$ , mientras que para el movimiento de subida (rebote) tendríamos que  $m_1gh'_1 = (m_1v_{1d}^2)/2$ , donde  $h_1$  es la altura desde donde se dejó caer y  $h'_1$  es la altura a la que regresaría; ambas alturas se miden desde el nivel de referencia ya escogido para la energía potencial. Al sustituir en esta última expresión el valor de la velocidad  $v_{1d}$  expresado en (3), con el valor de la masa de la pelota 2 expresado en (4) y, después, usando la expresión de la energía mecánica para el movimiento de caída, se llega a que la pelota subiría hasta la altura

$$h'_1 = 4h_1 \quad (5)$$

Este resultado es una verdadera sorpresa. Si uno no hubiera ya realizado este experimento, dudaría de lo correcto de este resultado. Experimentalmente no se logra que la altura del rebote sea de 4 veces la altura inicial, pues el ímpetu y la energía mecánica no se conservan; se logra con relativa facilidad el resultado espectacular de que la pelota llega hasta una altura del orden del doble de la altura inicial. Se obtienen

buenos resultados con una pelota de esponja de masa 37.4 g y una pelota obtenida del ratón de computadora con 11.8 g; también se obtienen buenos resultados con una pelota de tenis de masa 53.8 g y una pelota de uso inespecífico de 18.5 g.

## 6. Coeficiente de restitución

Regresemos al caso cuando las pelotas se dejan caer individualmente. Durante la colisión con el suelo la pelota se deforma, lo cual causa que la colisión no sea perfectamente elástica; pero ¿qué tan lejos está de ser considerada como elástica? La altura a la que rebota cualquier pelota depende del material de que está hecha y del material de que está hecho el suelo. Una manera de medir qué tan elástica es una colisión es a través del coeficiente de restitución, el cual es una propiedad común de los dos cuerpos que participan; digamos que estos cuerpos sean A y B. Esta cantidad adimensional se define como el negativo del cociente de la velocidad relativa después de la colisión entre la velocidad relativa antes de la colisión[3-4]; es decir,

$$e = -\frac{v_{Ad} - v_{Bd}}{v_{Aa} - v_{Ba}}.$$

El valor de  $e$  varía entre 0 y 1. Para colisiones perfectamente elásticas  $e = 1$ ; y para colisiones completamente inelásticas  $e = 0$ . Como en nuestro caso la pelota choca contra el suelo, éste no se mueve, el coeficiente de restitución se reduce a  $e = v_d/v_a$  donde  $v_a$  es la magnitud de la velocidad de la pelota justo antes de la colisión y  $v_d$  es justo después de chocar; el valor de  $e$  es positivo porque las velocidades tienen signos opuestos. El valor del coeficiente de restitución también puede expresarse en términos de las alturas; si la pelota es soltada desde la altura  $h_a$  y rebota hasta  $h_d$ , entonces

$$e = \frac{v_d}{v_a} = \frac{\sqrt{2gh_d}}{\sqrt{2gh_a}} = \sqrt{\frac{h_d}{h_a}}.$$

El coeficiente de restitución es un parámetro importante que se usa en el control de estándares de calidad. Las pelotas y materiales usados en los deportes profesionales deben cumplir con características específicas. Por ejemplo, para una pelota de beisbol usada en las ligas mayores se requiere que tenga un valor de  $0.546 \pm 0.032$ ; se calcula produciendo colisiones entre la pelota y una pared hecha con el mismo material con que están hechos los bates[5]. Otro ejemplo es el tenis de mesa o ping-pong; la mesa puede ser confeccionada de cualquier material que cumpla con la condición siguiente: al dejar caer una pelota de ping-pong sobre su superficie desde una altura de 30 cm dé un primer rebote de 20 a 23 cm de alto[6]; con la expresión dada al final del párrafo anterior se obtiene que el valor del coeficiente de restitución debe estar comprendido entre 0.816 y 0.876. Un ejemplo más es la pelota de tenis[7], debe rebotar más de 1.35 metros y no más de 1.47 m cuando se deja caer en un piso de cemento desde una altura de 2.54 m.

## 7. Observaciones finales

En el caso de las pelotas soltadas en parejas, experimentalmente es muy difícil hacer cumplir que las colisiones sean unidimensionales. Si los centros de las esferas no están alineados verticalmente o si al sostener a la pelota inferior los dos dedos no la agarran en un diámetro horizontal, entonces, al soltarlas, la pelota inferior gira al ir cayendo; esto causa que la pelota de encima no rebote en la dirección vertical; la colisión que se produce es bidimensional. Para asegurar que la pelota de encima se mantenga estática antes de soltar la inferior, se sugiere adherir a la pelota más grande un pequeño

anillo de hule o de plástico para en él colocar la pelota superior.

Este experimento de demostración es apropiado para realizarse en el salón de clase del curso de mecánica que se imparte en el primer año de la licenciatura en física o de licenciaturas afines, también puede adaptarse a cursos de física en los niveles de secundaria y bachillerato. Complementar la enseñanza de la física con experimentos de demostración ayuda considerablemente a su comprensión

Una importante referencia para esta demostración es el Dr. Héctor Riveros quien es un gran creador de experimentos de demostración que invitan a reflexionar.

- 
1. H.F. Meiners, Ed. *Physics Demonstration Experiments*. Ronald (New York, 1970).
  2. A. Manzur Guzmán, *Experimentos de Demostración para Física I y Física II* (Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1992).
  3. M. Alonso y E.J. Finn, *Física, Volumen I: Mecánica* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1986) Problema 9-25.
  4. P.A. Tipler, *Física*, Tercera edición (Reverté, Barcelona, 1995) Sec. 7-6.
  5. D.T. Kagan. *American Journal of Physics* (1990) **58** 151.
  6. *Nueva Enciclopedia Temática: el mundo del estudiante*, Vigésima séptima edición. Editorial Cumbre, México, 1981. Volumen 13, página 546.
  7. *Enciclopedia Barsa de consulta fácil*, Encyclopaedia Britannica Publishers, México, 1980. Tomo14, página 157.