

Choque inelástico entre dos partículas: análisis basado en el coeficiente de restitución

M.F. Ferreira da Silva

*Departamento de Física, Universidade da Beira Interior,
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, Portugal,
e-mail: mffs@ubi.pt*

Recibido el 6 de agosto de 2007; aceptado el 21 de agosto de 2007

Se estudia un choque inelástico entre dos partículas usando el coeficiente de restitución. Se obtiene su significado geométrico, y se muestran las ventajas de esta nueva formulación.

Descriptor: Choque inelástico; coeficiente de restitución.

An inelastic collision between two particles is treated using the restitution coefficient. Its geometrical interpretation is given, and the advantages of this new formulation are shown.

Keywords: Inelastic collision; coefficient of restitution.

PACS: 45.50.Tn

1. Introducción

En la física microscópica, particularmente en física atómica y subatómica, los choques inelásticos son normalmente estudiados a través de la cantidad Q , la energía cinética perdida en el choque, medida en el sistema del laboratorio. Cuanto mayor sea Q , más inelástico es el choque.

Por otro lado, en la física macroscópica (por ejemplo, en el estudio de choques entre esferas metálicas), el tratamiento de los choques inelásticos se basa en el llamado coeficiente de restitución, e . A mayor e , menos inelástico (o más elástico) es el choque.

En este trabajo nos proponemos analizar un choque inelástico entre dos partículas usando como parámetro el coeficiente de restitución. Veremos que este coeficiente tiene una interpretación geométrica muy sencilla, y que su uso presenta algunas ventajas en relación al uso de Q . En particular, nos parece que esta nueva formulación es pedagógicamente más apropiada.

2. Planteamiento del problema

Consideremos un choque entre dos partículas. Vamos a suponer que inicialmente una de ellas (de masa m_1) tiene una velocidad \vec{v}_0 , y que la otra (de masa m_2) está en reposo. Después del choque la partícula incidente adquiere una velocidad \vec{v}_1 y la otra adquiere una velocidad \vec{v}_2 . En ambas situaciones inicial y final, las partículas se encuentran infinitamente alejadas la una de la otra. No hay ninguna fuerza externa.

La ley de conservación de la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$ nos permite escribir [1]

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \implies \lambda\vec{v}_0 = \lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (1)$$

donde $\lambda \equiv m_1/m_2$ es un parámetro positivo sin dimensio-

nes. Elevando (1) al cuadrado y dividiendo por λ obtenemos

$$\lambda v_0^2 = \lambda v_1^2 + \frac{1}{\lambda} v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2. \quad (2)$$

La ley de conservación de la energía se traduce en la ecuación [1]

$$Q = T_0 - T_1 - T_2 = T_0 \left(1 - \frac{T_1 + T_2}{T_0} \right), \quad (3)$$

donde $T = mv^2/2$ es la energía cinética y la cantidad $Q \geq 0$ representa la energía cinética perdida en el choque, que es tanto mayor cuanto más inelástico sea éste (no consideramos aquí los llamados choques exoérgicos, en los cuales la energía cinética después del choque es mayor que la energía cinética antes del choque, siendo $Q < 0$). Entonces

$$Q = T_0 \left(1 - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{m_1 v_0^2} \right) = T_0 \left(1 - \frac{\lambda v_1^2 + v_2^2}{\lambda v_0^2} \right) \quad (4)$$

El grado de inelasticidad de un choque puede ser descrito también a través del llamado coeficiente de restitución e , una cantidad sin dimensiones que, para el caso de dos partículas, es definido como la razón entre la magnitud de la velocidad relativa después del choque y la magnitud de la velocidad relativa antes del choque [2]; aquí,

$$e = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{v_0} \implies e^2 v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2. \quad (5)$$

Para obtener la relación entre e y Q , se suman las expresiones (2) y (5), se reescribe la suma en la forma

$$\frac{\lambda v_1^2 + v_2^2}{\lambda v_0^2} = \frac{\lambda + e^2}{\lambda + 1} \quad (6)$$

y se sustituye este resultado en la fórmula (4); resulta

$$Q = \frac{1 - e^2}{\lambda + 1} T_0 \quad \text{o} \quad e = \sqrt{1 - (\lambda + 1) \frac{Q}{T_0}}. \quad (7)$$

De (5) y (7) se concluye que el coeficiente de restitución está comprendido entre 0 y 1: $0 \leq e \leq 1$. El significado físico de estos dos límites se entiende fácilmente ya que, cuanto menor sea e , mayor será Q , o sea, más inelástico será el choque.

Así, el valor límite $e = 1$ está asociado a un choque elástico, definido como aquel en que no se pierde energía cinética:

$$Q_{e=1} = 0 \quad [\text{choque elástico}]. \quad (8)$$

El otro valor límite, $e = 0$, corresponde a una situación en que las dos partículas siguen juntas después del choque, como se puede deducir de la definición (5); en este caso la energía cinética perdida alcanza su máximo valor posible (compatible con la conservación de la cantidad de movimiento), y equivale a la energía cinética del movimiento relativo, como se demuestra con facilidad:

$$Q_{e=0} = \frac{T_0}{\lambda + 1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 \quad (9)$$

o sea,

$$Q_{e=0} = \frac{1}{2} \mu v_{r0}^2 \quad [\text{choque totalmente inelástico}]. \quad (10)$$

En esta última expresión, μ es la masa reducida del sistema de dos partículas [3] y v_{r0} es la velocidad relativa inicial entre las partículas. Resulta claro porqué se da el nombre de choque totalmente inelástico a un choque de este tipo.

Analicemos ahora el choque con más detalle. La Ec. (1) muestra que los vectores \vec{v}_0 , \vec{v}_1 y \vec{v}_2 deben pertenecer al mismo plano (plano del choque). Sea x el eje definido por el vector \vec{v}_0 , orientado según su sentido, y sea y el eje perpendicular a x en el plano del choque. Designemos por θ y φ los ángulos que los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 hacen con el eje x , respectivamente, según el diagrama de la Fig. 1, que corresponde al llamado sistema del laboratorio. (En la siguiente discusión, admitiremos que ambos ángulos θ y φ son positivos; naturalmente, por simetría, ellos también pueden ser negativos.)

Siguiendo la terminología usual, podemos llamar ángulo de desvío al ángulo θ , y ángulo de retroceso al ángulo φ . Intentemos describir el choque en función de la velocidad inicial v_0 y de los parámetros λ y e .

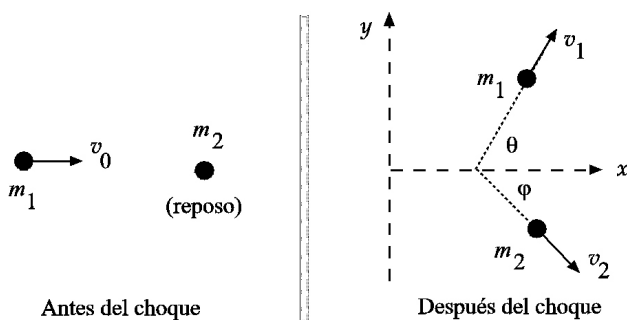


FIGURA 1. Choque entre dos partículas (en el sistema del laboratorio).

Proyectando la Ec. (1) sobre el eje x y sobre el eje y obtenemos, respectivamente (Fig. 1),

$$\lambda v_0 = \lambda v_1 \cos \theta + v_2 \cos \varphi, \quad (11)$$

$$0 = \lambda v_1 \sin \theta - v_2 \sin \varphi. \quad (12)$$

La Ec. (6) traduce la conservación de la energía:

$$\lambda v_1^2 + v_2^2 = \frac{\lambda(\lambda + e^2)}{\lambda + 1} v_0^2. \quad (13)$$

Las incógnitas son v_1 , v_2 , θ y φ . Como hay cuatro incógnitas y apenas tres ecuaciones escalares, existen infinitas soluciones. Para resolver el problema debemos escoger una de las incógnitas como variable independiente, y expresar las otras en función de ella.

3. Primera posibilidad: se escoge el ángulo de retroceso

Vamos a suponer que estamos más interesados en la partícula que retrocede. Escogemos entonces el ángulo de retroceso φ como variable independiente. Tenemos

$$\lambda v_1 \cos \theta = \lambda v_0 - v_2 \cos \varphi, \quad (11a)$$

$$\lambda v_1 \sin \theta = v_2 \sin \varphi. \quad (11b)$$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones, sumando y dividiendo por λ , obtenemos

$$\lambda v_1^2 = \lambda v_0^2 + \frac{1}{\lambda} v_2^2 - 2v_0 v_2 \cos \varphi. \quad (14)$$

Introduciendo ahora (14) en (13), resulta

$$\lambda v_0^2 + \frac{1}{\lambda} v_2^2 - 2v_0 v_2 \cos \varphi + v_2^2 - \frac{\lambda(\lambda + e^2)}{\lambda + 1} v_0^2 = 0,$$

que, después de algunas simplificaciones sencillas, se transforma en

$$(\lambda + 1)v_2^2 - (2\lambda v_0 \cos \varphi)v_2 + \frac{\lambda^2(1 - e^2)}{\lambda + 1} v_0^2 = 0. \quad (15)$$

Esta es una ecuación de segundo grado en v_2 y sus soluciones son

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2\lambda v_0 \cos \varphi \pm \sqrt{4\lambda^2 v_0^2 \cos^2 \varphi - 4\lambda^2(1 - e^2)v_0^2}}{2(\lambda + 1)} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left(\cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} \right) v_0 \\ &\equiv \frac{\lambda}{\lambda + 1} f_e^\pm(\varphi) v_0, \end{aligned} \quad (16)$$

en donde definimos $f_e^\pm(\varphi) = \cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}$.

La expresión (16) permite formular algunas conclusiones importantes. Veamos:

- El ángulo de retroceso debe ser inferior a $\pi/2$. Esto es intuitivo, pero vamos a probarlo. Supongamos que $\varphi \geq \pi/2$. Entonces $\cos \varphi \leq 0$ y el único signo posible en (16) sería el positivo. Para que $v_2 > 0$, debemos tener $f_e^+(\varphi) = \cos \varphi + \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} > 0$, o sea, $\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} > -\cos \varphi \geq 0$; luego,

$$e^2 - \sin^2 \varphi > \cos^2 \varphi \implies e^2 > 1 \implies e > 1,$$

lo que es imposible. Así, se concluye que $\varphi < \pi/2$.

- La expresión (16) sólo tiene sentido si

$$e^2 - \sin^2 \varphi \geq 0 \implies \sin \varphi \leq e. \quad (17)$$

Así, los ángulos de retroceso están limitados por el valor de e . El coeficiente de restitución determina el máximo ángulo de retroceso $\varphi_{\text{máx}}$ a través de

$$\varphi_{\text{máx}} = \arcsin e. \quad (18)$$

Cuanto más inelástico sea el choque, o sea, cuanto menor sea el valor de e , menor será el intervalo de valores que el ángulo de retroceso puede tener. Así, pues, para $e = 1$ (choque elástico) tendremos que $\varphi \in [0, \pi/2[$; para $e = 0$ (choque totalmente inelástico) tendremos apenas $\varphi = 0$ (lo que era de esperar, ya que en este caso las partículas deben seguir juntas después del choque).

Pasemos ahora a analizar el comportamiento de las dos soluciones obtenidas para v_2 en (16). Para tal, debemos estudiar las funciones f_e^\pm . Comenzamos por calcular sus derivadas:

$$\frac{df_e^\pm}{d\varphi}(\varphi) = \mp \frac{\sin \varphi}{\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} f_e^\pm(\varphi). \quad (19)$$

Como f_e^\pm es positiva, se concluye que f_e^+ es una función decreciente, y f_e^- es una función creciente. Es también fácil verificar que, para f_e^- ,

$$f_e^-(0) = 1 - e, \quad f_e^-(\varphi_{\text{máx}}) = \sqrt{1 - e^2}, \quad (20)$$

$$\frac{df_e^-}{d\varphi}(0) = 0, \quad \frac{df_e^-}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = +\infty, \quad (21)$$

y para f_e^+ ,

$$f_e^+(0) = 1 + e, \quad f_e^+(\varphi_{\text{máx}}) = \sqrt{1 - e^2}, \quad (22)$$

$$\frac{df_e^+}{d\varphi}(0) = 0, \quad \frac{df_e^+}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = -\infty. \quad (23)$$

La gráfica típica de estas dos funciones se muestra en la Fig. 2. Gráficas asociadas a varios valores del coeficiente de restitución se muestran en la Fig. 3. En estas gráficas, la solución $f_e^-(0)$ fué descartada porque representa una situación de choque central para la cual resulta $v_1 > v_2$, algo que no es físicamente aceptable.

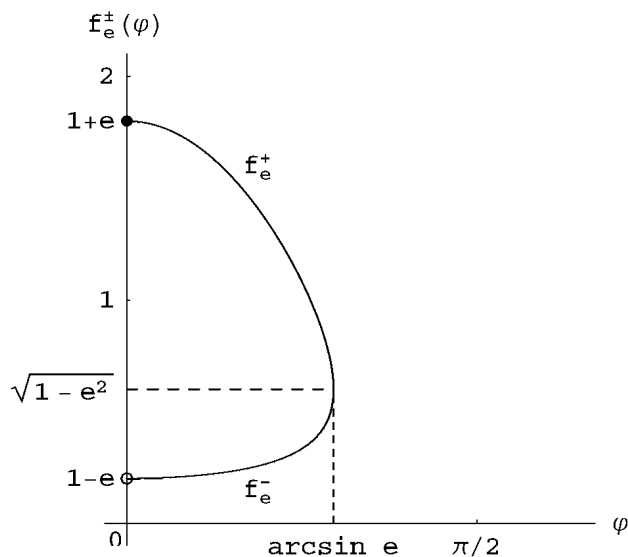


FIGURA 2. Gráfica típica de las funciones $f_e^\pm(\varphi)$ de (16).

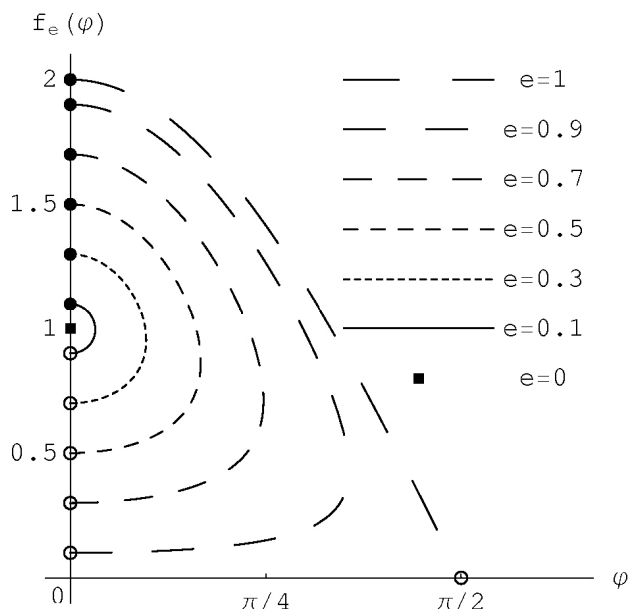


FIGURA 3. Gráfica de $f_e(\varphi)$ para varios valores de e .

Así, las velocidades de retroceso varían entre un valor mínimo

$$v_{2,\text{mín}} \equiv v_2^- = \frac{\lambda(1-e)}{\lambda+1} v_0 \quad [\text{para } \varphi \rightarrow 0^+], \quad (24)$$

y un valor máximo

$$v_{2,\text{máx}} \equiv v_2^+ = \frac{\lambda(1+e)}{\lambda+1} v_0 \quad [\text{para } \varphi = 0]. \quad (25)$$

La velocidad de retroceso correspondiente al ángulo máximo de retroceso es

$$v_2 = \frac{\lambda\sqrt{1-e^2}}{\lambda+1} v_0 \quad [\text{para } \varphi = \varphi_{\text{máx}}], \quad (26)$$

precisamente la media geométrica de las velocidades de retroceso máxima y mínima.

En el caso particular de un choque totalmente inelástico ($e = 0$), para el cual ya vimos que $\varphi = 0$, la expresión (16) da

$$v_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \text{ [choque totalmente inelástico]} \quad (27)$$

que es la velocidad v_{cm} del centro de masa del sistema de dos partículas. Para un choque elástico ($e = 1$), la expresión (16) da

$$v_2 = \frac{2\lambda}{\lambda + 1} v_0 \cos \varphi = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cos \varphi \text{ [choque elástico]} \quad (28)$$

ya que la solución $v_2 = 0$ representa una situación en que no hay choque.

Habiendo obtenido la fórmula para v_2 en función de φ (que da, como vimos, dos soluciones en general), el ángulo de desvío θ puede ser calculado a través de

$$\tan \theta = \frac{v_2 \sin \varphi}{\lambda v_0 - v_2 \cos \varphi}, \quad (29)$$

fórmula que resulta de dividir (11b) por (11a). El resultado final es

$$\tan \theta_{\lambda,e}^{\pm} = \frac{(\cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}) \sin \varphi}{1 + \lambda - (\cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}) \cos \varphi}. \quad (30)$$

El estudio de las funciones $\theta_{\lambda,e}^{\pm}$ muestra que $\theta_{\lambda,e}^{-}$ es una función creciente, con

$$\theta_{\lambda,e}^{-}(0) = 0, \quad (31)$$

$$\theta_{\lambda,e}^{-}(\varphi_{\text{máx}}) = \arctan \left(\frac{e\sqrt{1 - e^2}}{\lambda + e^2} \right) \equiv \theta_1, \quad (32)$$

$$\frac{d\theta_{\lambda,e}^{-}}{d\varphi}(0) = \frac{1 - e}{\lambda + e}, \quad \frac{d\theta_{\lambda,e}^{-}}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = +\infty, \quad (33)$$

y que el comportamiento de $\theta_{\lambda,e}^{+}$ depende de la relación entre los parámetros λ y e , siendo necesario distinguir tres casos: $e < \lambda$, $e = \lambda$ y $e > \lambda$. En el primer caso, la función es creciente si

$$0 \leq \varphi \leq \arctan \left(\frac{e\sqrt{\lambda^2 - e^2}}{\lambda + e^2} \right) \equiv \varphi_1$$

y decreciente si $\varphi_1 \leq \varphi < \arcsin e$, siendo su valor máximo $\arcsin(e/\lambda) \equiv \theta_2$; en los otros dos casos, la función es

decreciente. Además,

$$\theta_{\lambda,e}^{+}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } e < \lambda \\ \pi/2 & \text{si } e = \lambda \\ \pi & \text{si } e > \lambda \end{cases}, \quad (34)$$

$$\theta_{\lambda,e}^{+}(\varphi_{\text{máx}}) = \arctan \left(\frac{e\sqrt{1 - e^2}}{\lambda + e^2} \right) = \theta_1, \quad (35)$$

$$\frac{d\theta_{\lambda,e}^{+}}{d\varphi}(0) = \begin{cases} \frac{1 + e}{\lambda - e} & \text{si } e \neq \lambda \\ \frac{1 + e}{-2e} & \text{si } e = \lambda \end{cases}, \quad (36)$$

$$\frac{d\theta_{\lambda,e}^{+}}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = -\infty. \quad (37)$$

La Fig. 4 muestra la dependencia de θ con φ en las tres situaciones referidas.

En estas gráficas se observa claramente que los ángulos $\theta > \pi/2$, que traducen una situación en que la partícula incidente “viene para atrás”, sólo son posibles si su masa (m_1) es *suficientemente* inferior a la de la partícula blanco (m_2), siendo que *suficientemente* significa que la razón entre las masas (m_1/m_2) debe ser inferior al valor del coeficiente de restitución del choque. En tal situación, y para un choque frontal, el sentido del movimiento de la partícula incidente es invertido ($\theta = \pi$).

En la Fig. 5 puede verse, en cada caso, la dependencia de $\theta_{\lambda,e}(\varphi)$ con el valor de e .

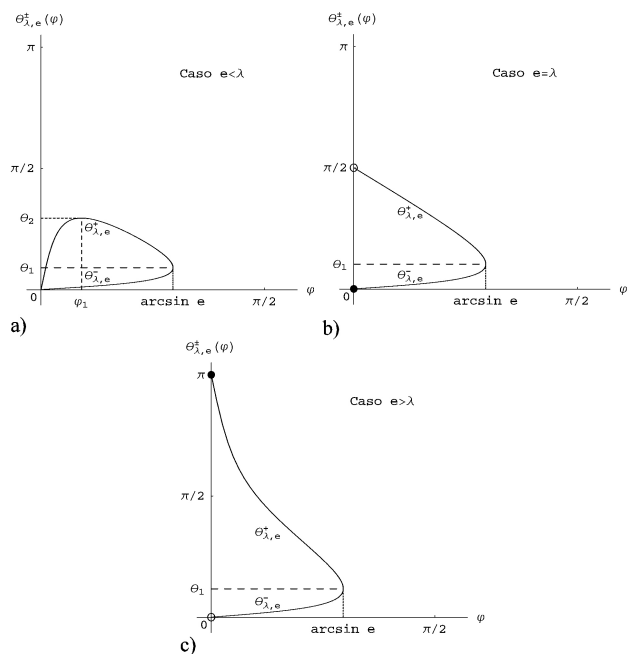


FIGURA 4. Gráficas típicas de las funciones $\theta_{\lambda,e}^{\pm}(\varphi)$ de (30).

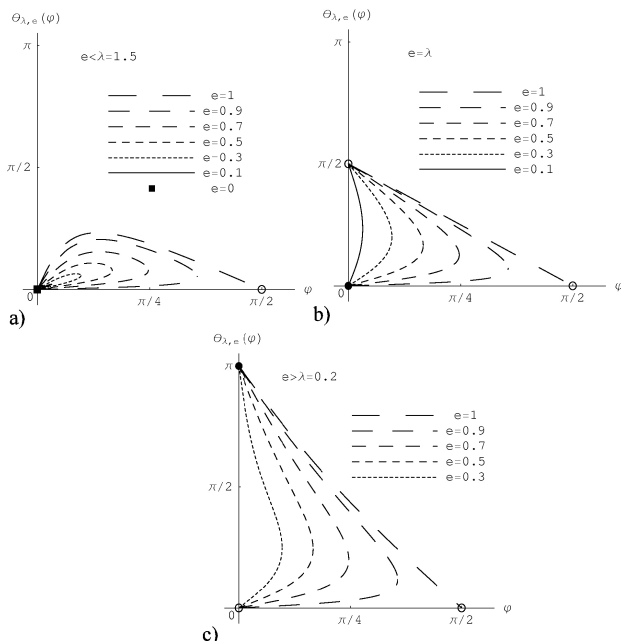


FIGURA 5. Gráficas de $\theta_{\lambda, e}(\varphi)$ para varios valores de e .

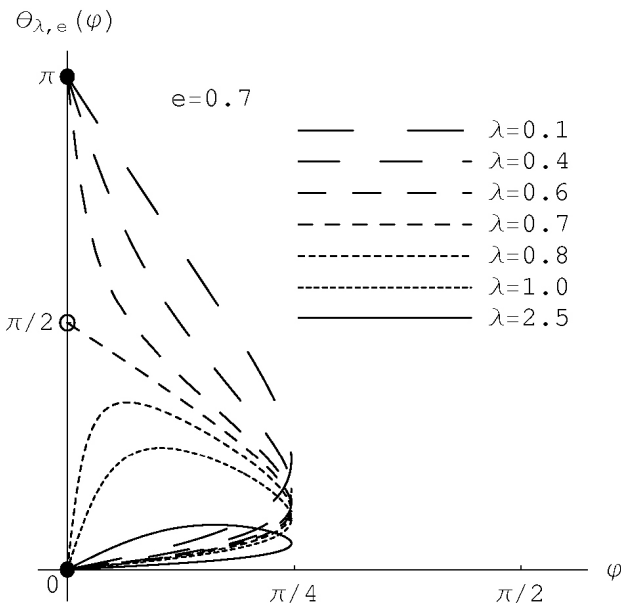


FIGURA 6. Gráfica de $\theta_{\lambda, e}(\varphi)$ para varios valores de λ , con e fijo.

La recta que se observa en el caso $e = \lambda = 1$ [cuya ecuación, $\theta + \varphi = \pi/2$, puede ser obtenida directamente a partir de (30)] traduce un resultado bien conocido: en un choque elástico y no central entre partículas de igual masa, las partículas abandonan el choque según trayectorias perpendiculares [4].

En la Fig. 6 se representa la dependencia de $\theta_{\lambda, e}(\varphi)$ con el valor de λ , para e fijo.

Con la fórmula (16) que da la velocidad v_2 en función de φ , es posible también combinar las expresiones (11a) y (11b) para obtener la velocidad final v_1 de la partícula incidente, como función de φ . Sin embargo, es mucho más ra-

zonable intentar relacionar v_1 con el ángulo θ . Eso es lo que haremos en la próxima sección.

4. Segunda posibilidad: se escoge el ángulo de desvío

Vamos a suponer ahora que estamos más interesados en la partícula incidente. Escogemos entonces el ángulo de desvío θ como variable independiente. Tenemos

$$v_2 \cos \varphi = \lambda(v_0 - v_1 \cos \theta) , \tag{11c}$$

$$v_2 \sin \varphi = \lambda v_1 \sin \theta . \tag{11d}$$

Elevando estas dos ecuaciones al cuadrado y sumando, obtenemos

$$v_2^2 = \lambda^2(v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1 \cos \theta) . \tag{38}$$

Introduciendo ahora (38) en (13), resulta

$$\lambda v_1^2 + \lambda^2(v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1 \cos \theta) = \frac{\lambda(\lambda + e^2)}{\lambda + 1} v_0^2 ,$$

que, después de algunos cálculos, se transforma en

$$(\lambda + 1)v_1^2 - (2\lambda v_0 \cos \theta)v_1 + \frac{\lambda^2 - e^2}{\lambda + 1} v_0^2 = 0 . \tag{39}$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado en v_1 son

$$v_1 = \frac{2\lambda v_0 \cos \theta \pm \sqrt{4\lambda^2 v_0^2 \cos^2 \theta - 4(\lambda^2 - e^2)v_0^2}}{2(\lambda + 1)} = \frac{\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}{\lambda + 1} v_0 \equiv g_{\lambda, e}^{\pm}(\theta) v_0 \tag{40}$$

en donde $g_{\lambda, e}^{\pm}(\theta) = (\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}) / (\lambda + 1)$.

La expresión (40) sólo tiene sentido si

$$e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta \geq 0 \implies \sin \theta \leq \frac{e}{\lambda} . \tag{41}$$

Así, si $e < \lambda$ los ángulos de desvío estarán limitados por el valor de e/λ :

$$\theta_{\text{máx}} = \arcsin \left(\frac{e}{\lambda} \right) \quad [\text{si } e < \lambda] . \tag{42}$$

Este ángulo $\theta_{\text{máx}}$ es precisamente el ángulo θ_2 indicado en la primera gráfica de la Fig. 4 (caso $e < \lambda$). Esta situación ocurre, en particular, si la masa de la partícula incidente es superior a la de la partícula blanco.

Si $e = \lambda$, la expresión (40) se reduce a

$$v_1 = \begin{cases} \frac{2e}{e+1} v_0 \cos \theta & \text{si } \theta \neq 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \end{cases} \quad [\text{si } e = \lambda]; \tag{43}$$

en este caso, el ángulo máximo de desvío sería $\pi/2$; ese ángulo, sin embargo, no llega a ser alcanzado ya que la fórmula (43) da $v_1 = 0$. Este resultado está de acuerdo con la segunda gráfica de la Fig. 4 (caso $e = \lambda$).

Finalmente, si $e > \lambda$, no hay ninguna limitación para el ángulo θ , como ya mostraba la tercera gráfica de la Fig. 4 (caso $e > \lambda$), en la cual se observa que θ puede variar entre 0 y π .

Estudiemos ahora las funciones $g_{\lambda,e}^{\pm}(\theta)$ con más detalle. Comenzaremos por probar que la función g^- sólo es aceptable si $e < \lambda$; efectivamente, como g^- debe ser positiva,

$$\lambda \cos \theta - \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta} > 0 \implies \lambda^2 \cos^2 \theta > e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta$$

de modo que $\lambda > e$.

El cálculo de las derivadas de las dos funciones da

$$\frac{dg_{\lambda,e}^{\pm}}{d\theta}(\theta) = \mp \frac{\lambda \sin \theta}{\sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}} g_{\lambda,e}^{\pm}(\theta), \quad (44)$$

de donde se concluye que $g_{\lambda,e}^-$ es una función creciente, mientras que $g_{\lambda,e}^+$ es una función decreciente. Para $g_{\lambda,e}^-$ tenemos

$$g_{\lambda,e}^-(0) = \frac{\lambda - e}{\lambda + 1}, \quad g_{\lambda,e}^-(\theta_{\text{máx}}) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - e^2}}{\lambda + 1}, \quad (45)$$

$$\frac{dg_{\lambda,e}^-}{d\theta}(0) = 0, \quad \frac{dg_{\lambda,e}^-}{d\theta}(\theta_{\text{máx}}) = +\infty. \quad (46)$$

En relación a $g_{\lambda,e}^+$: si $e \leq \lambda$, tenemos

$$g_{\lambda,e}^+(0) = \frac{\lambda + e}{\lambda + 1}, \quad g_{\lambda,e}^+(\theta_{\text{máx}}) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - e^2}}{\lambda + 1}, \quad (47)$$

$$\frac{dg_{\lambda,e}^+}{d\theta}(0) = 0, \quad \frac{dg_{\lambda,e}^+}{d\theta}(\theta_{\text{máx}}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } e < \lambda \\ -2e & \text{si } e = \lambda \end{cases}, \quad (48)$$

mientras que, si $e > \lambda$,

$$g_{\lambda,e}^+(0) = \frac{\lambda + e}{\lambda + 1}, \quad g_{\lambda,e}^+(\pi/2) = \frac{\sqrt{e^2 - \lambda^2}}{\lambda + 1}, \quad (49)$$

$$g_{\lambda,e}^+(\pi) = \frac{e - \lambda}{\lambda + 1}, \quad \frac{dg_{\lambda,e}^+}{d\theta}(0) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{dg_{\lambda,e}^+}{d\theta}(\pi/2) = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad \frac{dg_{\lambda,e}^+}{d\theta}(\pi) = 0. \quad (51)$$

La Fig. 7 muestra las gráficas típicas de las funciones $g_{\lambda,e}^{\pm}$.

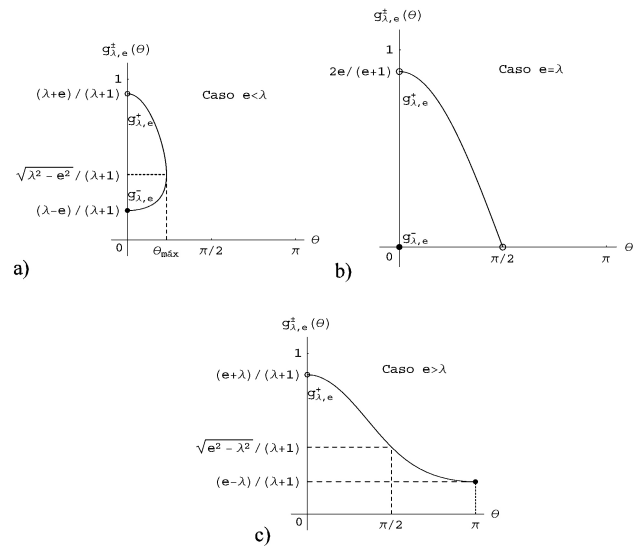


FIGURA 7. Gráficas típicas de las funciones $g_{\lambda,e}^{\pm}(\theta)$ de (40).

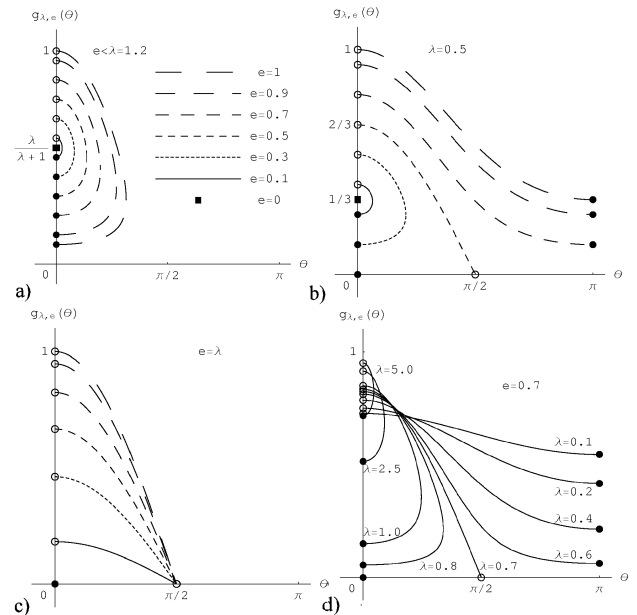


FIGURA 8. Dependencia de $g_{\lambda,e}(\theta)$ con los parámetros e y λ .

En cualquier caso, el valor mínimo de la velocidad final de la partícula incidente es

$$v_{1,\text{mín}} = \frac{|\lambda - e|}{\lambda + 1} v_0, \quad (52)$$

para un ángulo de desvío $\theta = 0$ (si $e \leq \lambda$) o $\theta = \pi$ (si $e > \lambda$). El valor máximo de esa velocidad es

$$v_{1,\text{máx}} = \frac{\lambda + e}{\lambda + 1} v_0, \quad (53)$$

para un ángulo de desvío $\theta \rightarrow 0^+$. La media geométrica de estas dos velocidades, $v_1 = v_0 \sqrt{|\lambda^2 - e^2|} / (\lambda + 1)$, es alcanzada para el ángulo de desvío máximo $\theta_{\text{máx}}$ (caso $e \leq \lambda$) o para $\theta = \pi/2$ (caso $e > \lambda$).

En la Fig. 8 se observa la dependencia de $g_{\lambda,e}$ en varias situaciones. Las tres primeras figuras distinguen las curvas de la misma forma.

En el caso particular de un choque totalmente inelástico ($e = 0$), la expresión (41) da $\theta = 0$, y de la expresión (40) se concluye que

$$v_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \text{ [choque totalmente inelástico]} \quad (54)$$

que es la velocidad del centro de masa de las dos partículas y que coincide con v_2 [ver (27)] confirmando que las partículas siguen juntas después del choque.

Podemos proceder ahora de una forma análoga a la de la sección anterior para expresar el ángulo de retroceso en función del ángulo de desvío. Efectivamente, dividiendo (11d) por (11c) resulta

$$\tan \varphi = \frac{v_1 \sin \theta}{v_0 - v_1 \cos \theta}, \quad (55)$$

y colocando en esta expresión la fórmula (40) se obtiene

$$\tan \varphi_{\lambda,e}^{\pm} = \frac{(\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}) \sin \theta}{1 + \lambda - (\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}) \cos \theta}. \quad (56)$$

El estudio de esta función no trae, sin embargo, ninguna información adicional, siendo que las gráficas de la Fig. 4 contienen ya todo lo que es necesario.

5. Pasando al sistema del centro de masa

En las dos secciones anteriores el análisis del choque fué hecho escogiendo, alternadamente, los ángulos de retroceso y de desvío. Como fué explicado en la Sec. 2, estos dos ángulos son medidos en el sistema del laboratorio, un sistema en el cual la partícula blanco se encuentra inicialmente en reposo. El choque puede también ser analizado en el llamado sistema del centro de masa, un sistema en el cual el centro de masa de las dos partículas se encuentra en reposo. (Como la velocidad del centro de masa v_{cm} es constante durante todo el choque, este es claramente un sistema inercial.)

La visión que se tiene del choque en el sistema del centro de masa es lo que se muestra en la Fig. 9. Veamos porqué. Antes del choque, en este sistema la partícula incidente se desplaza con una velocidad [ver expresión (27)]

$$\vec{v}'_{01} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{cm} = v_0 \hat{x} - v_{cm} \hat{x} = \left(v_0 - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \right) \hat{x} = \frac{1}{\lambda + 1} v_0 \hat{x} \quad (57)$$

(hacia la derecha, por lo tanto), y la partícula blanco se desplaza con velocidad

$$\vec{v}'_{02} = \vec{0} - \vec{v}_{cm} = -v_{cm} \hat{x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \hat{x} \quad (58)$$

(hacia la izquierda, por lo tanto). Después del choque, la partícula incidente se mueve con velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = v_1 \cos \theta \hat{x} + v_1 \sin \theta \hat{y} - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \hat{x} \\ &= \left(v_1 \cos \theta - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \right) \hat{x} + v_1 \sin \theta \hat{y}, \end{aligned} \quad (59)$$

y la partícula blanco se mueve con velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}'_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = v_2 \cos \varphi \hat{x} - v_2 \sin \varphi \hat{y} - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \hat{x} \\ &= \left(v_2 \cos \varphi - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \right) \hat{x} - v_2 \sin \varphi \hat{y}. \end{aligned} \quad (60)$$

Es fácil probar que los vectores \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 tienen la misma dirección y apuntan en sentidos opuestos. Efectivamente, debido a la conservación de la cantidad de movimiento, la velocidad del centro de masa puede también ser escrita en la forma

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda \vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\lambda + 1}; \quad (61)$$

entonces

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \frac{\lambda \vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\lambda + 1} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\lambda + 1} \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{\lambda \vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\lambda + 1} = \frac{\lambda(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\lambda + 1} \end{cases}$$

de modo que

$$\vec{v}'_2 = -\lambda \vec{v}'_1. \quad (62)$$

Así, en el sistema del centro de masa la descripción del choque requiere solamente un ángulo [5], que en la Fig. 9 fué designado por ψ y que representa el ángulo de desvío (igual para las dos partículas) en este sistema. Ya que, de la Fig. 9,

$$\vec{v}'_1 = v'_1 \cos \psi \hat{x} + v'_1 \sin \psi \hat{y}, \quad (63)$$

comparando con la expresión (59) resulta

$$\begin{cases} v'_1 \cos \psi = v_1 \cos \theta - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \\ v'_1 \sin \psi = v_1 \sin \theta \end{cases} \quad (64)$$

que permite obtener la relación

$$\tan \psi = \frac{v_1 \sin \theta}{v_1 \cos \theta - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0}. \quad (65)$$

De modo análogo,

$$\vec{v}'_2 = -v'_2 \cos \psi \hat{x} - v'_2 \sin \psi \hat{y}, \quad (66)$$

y comparando con la expresión (60) resulta

$$\begin{cases} -v'_2 \cos \psi = v_2 \cos \varphi - \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_0 \\ -v'_2 \sin \psi = -v_2 \sin \varphi \end{cases} \quad (67)$$

de la cual se obtiene

$$\tan \psi = \frac{v_2 \sin \varphi}{\frac{\lambda}{\lambda+1} v_0 - v_2 \cos \varphi} . \quad (68)$$

La expresión (65) permite estudiar la dependencia de ψ con θ , y la expresión (68) la dependencia de ψ con φ , ya que fórmulas para v_1 en función de θ y para v_2 en función de φ fueron ya deducidas en las dos secciones anteriores. Para ver de que forma ψ depende de θ , por ejemplo, sustituimos la fórmula (40) en (65) y obtenemos

$$\tan \psi_{\lambda,e}^{\pm} = \frac{(\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}) \sin \theta}{(\lambda \cos \theta \pm \sqrt{e^2 - \lambda^2 \sin^2 \theta}) \cos \theta - \lambda} . \quad (69)$$

El análisis de esta expresión obliga, una vez más, a considerar tres casos: $e < \lambda$, $e = \lambda$ y $e > \lambda$. Si $e < \lambda$, los ángulos θ quedan limitados al intervalo $[0, \theta_{\text{máx}}]$ con $\theta_{\text{máx}} = \arcsin(e/\lambda)$. La función $\psi_{\lambda,e}^+$ es creciente, con

$$\psi_{\lambda,e}^+(0) = 0, \quad \psi_{\lambda,e}^+(\theta_{\text{máx}}) = \pi - \arccos(e/\lambda) \equiv \psi_1, \quad (70)$$

$$\frac{d\psi_{\lambda,e}^+}{d\theta}(0) = \frac{e + \lambda}{e}, \quad \frac{d\psi_{\lambda,e}^+}{d\theta}(\theta_{\text{máx}}) = +\infty, \quad (71)$$

y $\psi_{\lambda,e}^-$ es una función decreciente, con

$$\psi_{\lambda,e}^-(0) = \pi, \quad \psi_{\lambda,e}^-(\theta_{\text{máx}}) = \pi - \arccos(e/\lambda) \equiv \psi_1, \quad (72)$$

$$\frac{d\psi_{\lambda,e}^-}{d\theta}(0) = \frac{e - \lambda}{e}, \quad \frac{d\psi_{\lambda,e}^-}{d\theta}(\theta_{\text{máx}}) = -\infty. \quad (73)$$

En el caso $e = \lambda$, se tiene $\theta \in [0, \theta_{\text{máx}}[$ con $\theta_{\text{máx}} = \pi/2$, siendo

$$\psi_{\lambda,e}^+ = 2\theta \text{ [para } \theta \neq 0] \text{ y } \psi_{\lambda,e}^- = \pi \text{ [para } \theta = 0]. \quad (74)$$

En el caso $e > \lambda$, θ varía entre 0 y π ; existe apenas la función $\psi_{\lambda,e}^+$, que es creciente, con

$$\psi_{\lambda,e}^+(0) = 0, \quad \psi_{\lambda,e}^+(\pi) = \pi, \quad (75)$$

$$\frac{d\psi_{\lambda,e}^+}{d\theta}(0) = \frac{e + \lambda}{e}, \quad \frac{d\psi_{\lambda,e}^+}{d\theta}(\pi) = \frac{e - \lambda}{e}. \quad (76)$$

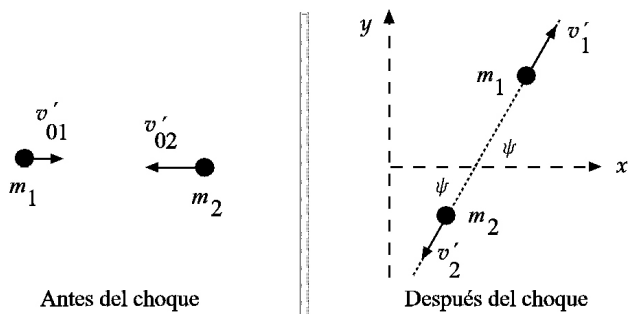


FIGURA 9. Choque entre dos partículas (en el sistema del centro de masa).

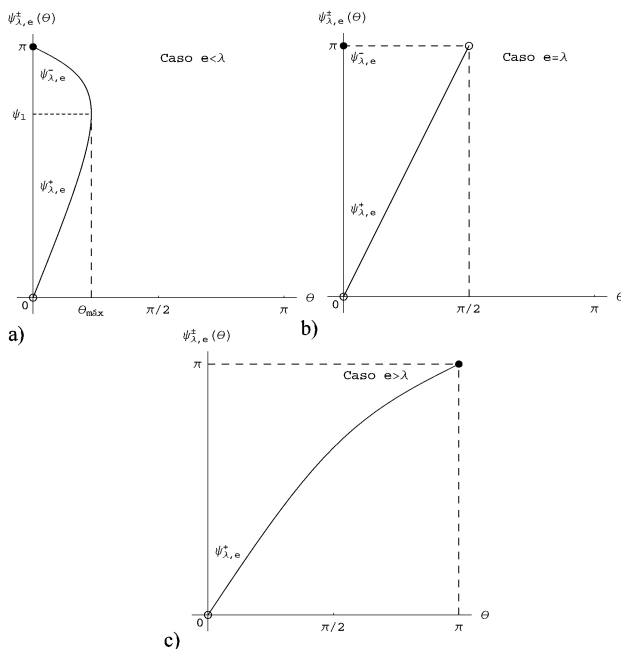


FIGURA 10. Gráficas típicas de las funciones $\psi_{\lambda,e}^{\pm}(\theta)$ de (69).

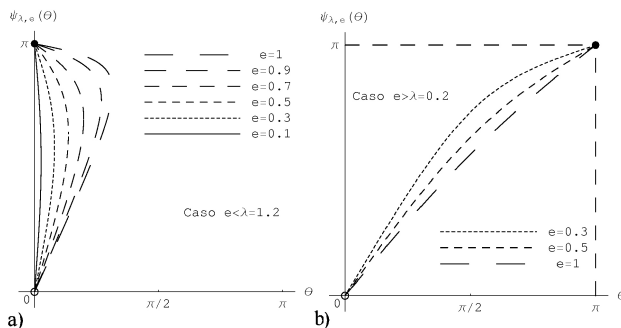


FIGURA 11. Dependencia de $\psi_{\lambda,e}(\theta)$ con e y λ .

En la Fig. 10 se muestran las gráficas típicas correspondientes. En la Fig. 11 se muestra la dependencia con los valores de e y de λ .

Estudiemos ahora la dependencia de ψ con φ ; introduciendo (16) en (68) resulta

$$\tan \psi_e^{\pm} = \frac{(\cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}) \sin \varphi}{1 - (\cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}) \cos \varphi} . \quad (77)$$

Notamos que esta expresión sólo depende del parámetro e . Es fácil probar que, en el intervalo $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{máx}}$ [ver (18)], ψ_e^+ es una función decreciente y ψ_e^- es una función creciente. Además

$$\psi_e^+(0) = \pi, \quad \psi_e^+(\varphi_{\text{máx}}) = \arccos e, \quad (78)$$

$$\frac{d\psi_e^+}{d\varphi}(0) = -\frac{e + 1}{e}, \quad \frac{d\psi_e^+}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = -\infty, \quad (79)$$

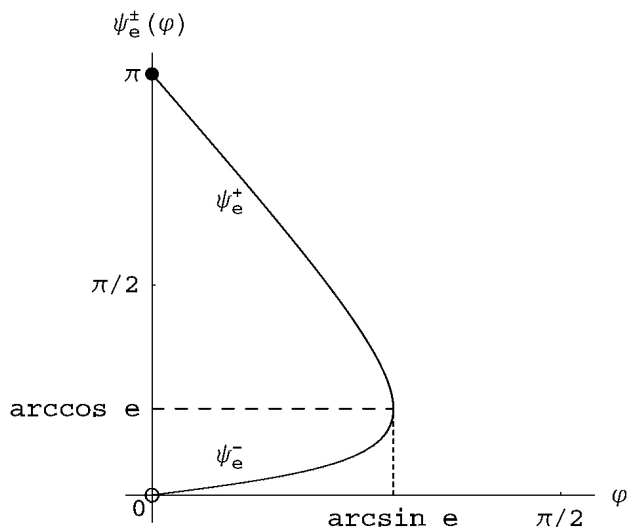


FIGURA 12. Gráfica típica de las funciones $\psi_e^\pm(\varphi)$ de (77).

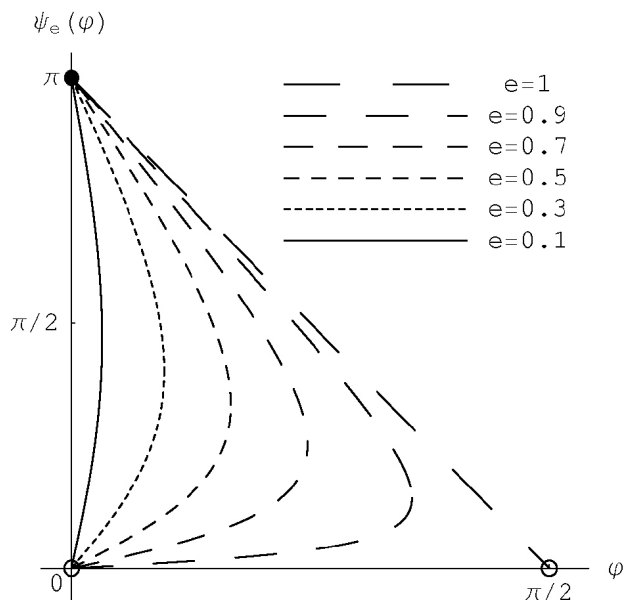


FIGURA 13. Dependencia de $\psi_e(\varphi)$ con e .

$$\psi_e^-(0) = 0, \quad \psi_e^-(\varphi_{\text{máx}}) = \arccos e, \quad (80)$$

$$\frac{d\psi_e^-}{d\varphi}(0) = \frac{1-e}{e}, \quad \frac{d\psi_e^-}{d\varphi}(\varphi_{\text{máx}}) = +\infty. \quad (81)$$

En la Fig. 12 se muestran las gráficas típicas correspondientes. En la Fig. 13 se muestra la dependencia con el valor de e .

Antes de concluir, veamos lo que podemos decir sobre las velocidades v'_1 y v'_2 . Elevando al cuadrado y sumando las dos ecuaciones del sistema obtenido en (64) resulta

$$v'^2_1 = v^2_1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}v_0\right)^2 - 2\frac{\lambda}{\lambda+1}v_0v_1 \cos \theta. \quad (82)$$

Sustituyendo en esta expresión la fórmula (40) y después de algunas simplificaciones algebraicas se obtiene

$$v'_1 = \frac{e}{\lambda+1}v_0. \quad (83)$$

De la misma forma, elevando al cuadrado y sumando las dos ecuaciones del sistema obtenido en (67) resulta

$$v'^2_2 = v^2_2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}v_0\right)^2 - 2\frac{\lambda}{\lambda+1}v_0v_2 \cos \varphi, \quad (84)$$

y si introducimos en esta expresión la fórmula (16) se obtiene, después de algunos cálculos,

$$v'_2 = \frac{\lambda e}{\lambda+1}v_0. \quad (85)$$

Las expresiones sorprendentemente sencillas (83) y (85) están de acuerdo con (62), y muestran claramente una de las ventajas de trabajar en el sistema del centro de masa: las magnitudes de las velocidades finales no dependen del ángulo de desvío (ψ , en ese sistema). Estas dos expresiones podrían haber sido obtenidas de una forma más directa combinando la fórmula (62) con la relación

$$e = \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{v_0}, \quad (86)$$

que resulta de (5) después de observar que el valor de e , tal como fué definido inicialmente, no depende del sistema en que nos coloquemos (laboratorio, centro de masa o cualquier otro). Este aspecto es muy importante, ya que evidencia la ventaja intrínseca de describir el choque en función de los parámetros e y λ en vez de hacerlo en función de los parámetros Q y λ : el valor de Q está necesariamente asociado al sistema del laboratorio.

6. Conclusiones

Se ha descrito un choque inelástico entre dos partículas usando como parámetros la razón (λ) entre sus masas y el coeficiente de restitución (e). Se ha probado que este tiene una interpretación geométrica clara: está relacionado con el máximo ángulo de retroceso (φ), medido en el sistema del laboratorio [ver la Ec. (18)]. Igualmente, se ha demostrado que la razón e/λ determina directamente los valores posibles del ángulo de desvío (θ), medido también en el sistema del laboratorio [ver la Fig. 4 y la Ec. (42)]. Expresiones sencillas [ver las ecuaciones (24), (25), (52) y (53)] permiten obtener los intervalos de velocidades (y, por lo tanto, los de energías) de las partículas después del choque. Finalmente, se ha mostrado que, en el sistema del centro de masa, las velocidades finales de las partículas quedan automáticamente determinadas por los dos parámetros escogidos [ver Ecs. (83) y (85)], y que basta un único ángulo (ψ) para describir el choque. La variación de ψ con φ y con θ se ha estudiado en detalle. En particular, se ha visto que la variación de ψ con φ depende solamente del parámetro e .

Esta nueva formulación constituye pues una alternativa muy interesante al enfoque tradicional basado en la cantidad Q , y nos parece que, didácticamente, sus ventajas son considerables.

Agradecimientos

Agradecemos al Prof. E. Segre por haber leído el manuscrito.

-
1. G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 6th ed. (Saunders College Publishing, Fort Worth, 1999), p. 287.
 2. V. D. Barger and M. G. Olsson, *Classical Mechanics - A Modern Perspective*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1995), p. 128, Eq. (4.67).
 3. J. R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, California, 2005), p. 296, Eq. (8.11).
 4. S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. (Brooks/Cole, Belmont, 2004), p. 351, Eq. (9.75).
 5. H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. (Addison-Wesley, San Francisco, 2002), pp. 115-116.