REVISIÓN REVISTA MEXICANA DE FÍSICA E **54** (2) 92–103 DICIEMBRE 2008

Sobre el caso de Euler del movimiento de un cuerpo rígido*

Eduardo Piña Garza
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa,
P.O. Box 55 534, Mexico, D.F., 09340 Mexico,
e-mail: pge@xanum.uam.mx

Recibido el 22 de noviembre de 2007; aceptado el 26 de agosto de 2008

Éste es un trabajo de revisión donde se estudia el movimiento de un sólido en ausencia de torcas. Este problema fue considerado previamente por Euler y resuelto por Jacobi mediante el uso de las funciones elípticas que llevan su nombre y de las funciones θ que él usó con los nombres de Θ y H. El objetivo de este trabajo es completar estudios publicados previamente sobre el mismo problema. En su solución he introducido caminos nuevos que son todavía poco conocidos. Se completan varios cálculos y se obtienen expresiones inéditas y generales.

Descriptores: Mecánica del trompo; caso de Euler; sin torcas.

This is a review paper on the rigid body motion with not torques. This subject was considered by Euler and solved by Jacobi in therms of elliptic functions known as jacobian, Θ and H. The purpose of this work is to complement the study published previously on that subject. In their solution new and not well known ways have been introduced. Some computations have been finishe and one fin unpublised and general expressions.

Keywords: Rigid body mechanics; Euler case; no torques case.

PACS: 45.20.Dc; 45.40.-f; 45.40.Cc

1. Introducción

El movimiento de un cuerpo rígido en ausencia de torcas es uno de los pocos problemas resueltos de la dinámica del cuerpo rígido en términos de funciones conocidas. Éste es un problema mecánico en que se escriben y resuelven las ecuaciones de movimiento, las cuales se pueden plantear a partir de una función de Lagrange, mediante una función de Hamilton o por medio de las ecuaciones de movimiento para la velocidad angular o para el momento angular, llamadas comúnmente ecuaciones de Euler.

Para describir el movimiento del cuerpo rígido [1] se introducen dos sistemas de coordenadas cartesianas: el sistema inercial y el sistema anclado al cuerpo rígido. Es conveniente elegir ambos con el mismo origen situado en el centro de masa. El cuerpo rígido se ha definid por la propiedad característica de tener todas las partículas del cuerpo rígido coordenadas cartesianas constantes de movimiento en el sistema anclado al cuerpo rígido. Representamos por $\mathbf{a}_j$ las componentes constantes del vector de posición de la partícula j en el sistema anclado, y por $\mathbf{x}_j(t)$ las componentes de la misma partícula en el sistema inercial en el tiempo t. Estas cantidades están relacionadas por una matriz de rotación $\mathbf{R}(t)$, la misma para todas las partículas del cuerpo rígido

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{a}_j\,. \tag{1}$$

Resolver un problema de la mecánica del cuerpo rígido signific escribir las nueve componentes de la matriz de rotación en función del tiempo.

Las nueve componentes de la matriz de rotación tienen únicamente tres cantidades independientes porque coinciden sus matrices traspuestas (denotada con el superíndice T) y su matriz inversa

$$\mathbf{R}(t)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}(t) = \mathbf{E}\,, \tag{2}$$

donde $\mathbf{E}$ es la matriz unidad. Esta ecuación conduce [1] a escribir la derivada respecto al tiempo de la matriz de rotación en función de la misma matriz y de la velocidad angular en el sistema anclado $\boldsymbol{\omega}$:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\,\boldsymbol{\omega}\times\,, \tag{3}$$

ecuación que defin la velocidad angular, como las componentes del vector asociado a la matriz antisimétrica $\mathbf{R}(t)^{\mathrm{T}}\,\dot{\mathbf{R}}(t)$, donde el punto sobre una letra denota la derivada temporal.

Se calculan por este camino la energía cinética y el momento angular del cuerpo rígido en función de la velocidad angular y de la matriz de inercia, evaluada en el sistema anclado. La matriz de inercia es una matriz simétrica, positiva definid para todo cuerpo rígido con dos o tres dimensiones:

$$\mathbf{I} = \sum_j m_j[\mathbf{a}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_j\,\mathbf{E} - \mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^{\mathrm{T}}]\,, \tag{4}$$

donde m_j es la masa de la partícula j.

El sistema anclado al cuerpo se elige de forma que esta matriz constante sea diagonal. Los ejes de coordenadas del sistema anclado se eligen en la dirección de los vectores propios de la matriz de inercia, los cuales son mutuamente perpendiculares. Los elementos en la diagonal son los valores propios de dicha matriz, se llaman momentos principales de inercia y se denotan como I_j con $j = 1, 2, 3$. Supondremos que son diferentes y se han ordenado en la forma $I_3 > I_2 > I_1$.

La energía cinética del cuerpo rígido resulta ser

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_j m_j\dot{\mathbf{x}}_j^{\mathrm{T}}\,\dot{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}\,, \tag{5}$$

y el momento angular en el sistema inercial

$$\mathbf{J} = \sum_j m_j \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{6}$$

Conviene también escribir las componentes del momento angular del sistema anclado

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{7}$$

Ambas componentes se relacionan por la matriz de rotación

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}\,\mathbf{L}\,. \tag{8}$$

Si se quiere ahora escribir las ecuaciones de movimiento según los formalismos de Lagrange o Hamilton se debe escribir la matriz de rotación en función de tres coordenadas independientes, calcular la velocidad angular en estas coordenadas y sustituir en la energía cinética.

Las ecuaciones de Euler vienen de que la derivada respecto al tiempo del momento angular en el sistema inercial es igual a la torca total que actúa sobre el cuerpo rígido. Se escribe dicha ecuación en el sistema anclado y se encuentran [1] las ecuaciones de Euler en la forma

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{K}\,, \tag{9}$$

donde $\mathbf{K}$ son las componentes de la torca en el sistema anclado.

Desde hace algunos años se vio conveniente considerar una forma novedosa de parametrizar la matriz de rotación [2]. Se toma en cuenta que en muchos casos se sabe que la matriz rota dos vectores conocidos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{u}\,. \tag{10}$$

Como la rotación no cambia el tamaño de estos vectores se supone que son unitarios y nos preguntamos sobre la relación de la matriz de rotación con estos vectores. Se encontró que la matriz es función de ellos y de otro parámetro independiente γ y se puede escribir en la forma [1,2]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \gamma) &= \mathbf{E}\cos\gamma \\ &- \frac{(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v})^{\mathrm{T}}}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\cos\gamma + \mathbf{v}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(1+\cos\gamma) \\ &+ \frac{\operatorname{sen}\gamma}{2(1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})}[(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v})^{\mathrm{T}}] \\ &+ \frac{\operatorname{sen}\gamma}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Si suponemos que el vector $\mathbf{v}$ es constante, la velocidad angular en esta parametrización resulta ser igual a

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}[\dot{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u}+\mathbf{v})] + \dot{\gamma}\mathbf{u}\,. \tag{12}$$

2. EL caso de Euler

El caso llamado de Euler consiste en suponer que la torca externa total es cero. El momento angular $\mathbf{J}$ en el sistema inercial es un vector constante de movimiento, mientras que este vector en el sistema anclado al cuerpo satisface las ecuaciones de Euler que se obtienen de (9) al hacer cero la torca y al sustituir en ella a la velocidad angular despejada de la Ec. (7):

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{L}) \times \mathbf{L} = \mathbf{0}\,. \tag{13}$$

Esta ecuación tiene dos constantes de movimiento: la conservación del tamaño del momento angular J, el cual es constante en el sistema inercial, y no cambia por la rotación al sistema anclado. Esto permite escribir al vector $\mathbf{L}$ en la forma

$$\mathbf{L} = J\mathbf{l}\,, \tag{14}$$

en función del vector unitario variable $\mathbf{l}$. La otra constante de movimiento es la energía E, en este caso igual a la energía cinética, que escribimos en función del momento angular como

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{L})\,, \tag{15}$$

o también como

$$\frac{2E}{J^2} = (\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{l})\,. \tag{16}$$

Para que exista solución del vector unitario $\mathbf{l}$ deben intersecarse la esfera de radio unidad con el elipsoide cuya ecuación es (16), por lo cual en general se cumplen las desigualdades $1/I_1 > 2E/J^2 > 1/I_3$. En lo que sigue supondremos además $2E/J^2 > 1/I_2$. El caso en que no se cumple esta desigualdad se puede obtener de este caso mediante el intercambio de los índices y componentes 1 y 3.

El método que hemos seguido en varias publicaciones [1-4] es introducir coordenadas esferoconales [5] para el vector unitario $\mathbf{l}$,

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \operatorname{sn}(\mu, k')\operatorname{dn}(u,k) \\ \operatorname{dn}(\mu, k')\operatorname{sn}(u,k) \\ \operatorname{cn}(\mu, k')\operatorname{cn}(u,k) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

de forma que se satisfaga idénticamente la conservación de energía (16) al hacer constante μ: una de las dos coordenadas esferoconales. Las ecuaciones necesarias para obtener dicho resultado se encuentran en el Apéndice 1 y son propiedades conocidas de las funciones elípticas. Los parámetros k y k' están relacionados por la ecuación que asegura la ortogonalidad de las coordenadas esferoconales

$$k^2 + k'^2 = 1\,. \tag{18}$$

Todos los parámetros constantes resultan funciones de los tres momentos principales de inercia, de la energía y de la magnitud del momento angular. Se ha recalcado en varias publicaciones [1,2] que las constantes a continuación solamente son funciones de dos parámetros independientes formados con esas cinco cantidades físicas:

$$\mathrm{sn}^2(\mu,k') = \frac{\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3}}{\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_3}}\,, \tag{19}$$

$$\mathrm{cn}^2(\mu,k') = \frac{\frac{J}{I_1} - \frac{2E}{J}}{\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_3}}\,, \tag{20}$$

$$\mathrm{dn}^2(\mu,k') = \frac{\frac{J}{I_1} - \frac{2E}{J}}{\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_2}}\,, \tag{21}$$

$$k^2 = \frac{\left(\frac{J}{I_2} - \frac{J}{I_3}\right)\left(\frac{J}{I_1} - \frac{2E}{J}\right)}{\left(\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3}\right)\left(\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_2}\right)}\,, \tag{22}$$

y

$$k'^2 = \frac{\left(\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_3}\right)\left(\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_2}\right)}{\left(\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3}\right)\left(\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_2}\right)}\,. \tag{23}$$

Estos resultados se sustituyen ahora en cualquier componente de la ecuación de movimiento (13) y se encuentra que la coordenada variable u de las coordenadas esferoconales es una función lineal del tiempo

$$\dot{u} = \sqrt{\left(\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3}\right)\left(\frac{J}{I_1} - \frac{J}{I_2}\right)} = \alpha\,, \quad u = \alpha t\,. \tag{24}$$

En esta forma se puede conocer la dependencia en el tiempo del vector de momento angular del sistema anclado. Mediante la Ec. (7), también se conocen las componentes del vector velocidad angular. La solución hasta este punto coincide con la que se encuentra en el texto de Landau y Lifshitz [6], si bien ellos no hablan de coordenadas esferoconales.

Para continuar con la solución notamos que estamos en el caso previsto en la Introducción. Se tienen dos vectores conocidos $\mathbf{L}$ y $\mathbf{J}$, relacionados por la rotación y en consecuencia, falta determinar el parámetro γ que aparece en la expresión (11). Una forma simple de encontrarlo es despejar su derivada respecto al tiempo de la Ec. (12). Pero este camino no parece igual al que se encuentra en varios textos donde se usa como parametrización de la matriz de rotación a los ángulos de Euler como se hace en Ref. 6. La equivalencia se puede lograr si se elige el vector de momento angular del sistema inercial en la dirección del eje coordenado 3. Entonces dos ángulos de Euler quedan determinados por el conocimiento del momento angular en el sistema anclado:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\theta\,\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{25}$$

donde θ y ψ son dos de los ángulos de Euler. Porque se puede suponer

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\theta\,\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Pero se ha encontrado [1,2] que entonces tenemos un caso particular de nuestra parametrización (11) si se cumple la igualdad

$$\gamma = \psi + \phi\,, \tag{27}$$

donde ϕ es el tercer ángulo de Euler; por medio de las cuales se puede establecer la relación con el tratamiento tradicional que hace uso de los ángulos de Euler. La integral de este ángulo se puede escribir [1] en la forma

$$\phi = \frac{J}{I_3}t + \frac{\mathrm{sn}(\mu,k')\mathrm{dn}(\mu,k')}{\mathrm{cn}(\mu,k')} \times \int_0^{\alpha t} \frac{du}{1-\mathrm{cn}^2(\mu,k')\mathrm{cn}^2(u,k)}\,, \tag{28}$$

Mientras que se ha aclarado la relación para encontrar la solución del caso de Euler por dos caminos diferentes, quiero hacer hincapié en que el uso de los ángulos de Euler no parece indispensable. Las coordenadas esferoconales para el vector $\mathbf{l}$ parecen muy superiores a las coordenadas esféricas en términos de dos ángulos de Euler. Por otra parte, aunque parece una buena selección el tomar al momento angular inercial en la dirección de un eje coordenado, planteamos la duda de si dicha selección es la mejor y de si no conviene elegir al momento angular inercial en otra dirección. Si tal es el caso, como se descubre en Ref. 1, conviene encontrar cómo se modific γ por un cambio en la dirección del vector constante $\mathbf{J}$, sin que se alteren los vectores $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$, cuya dependencia en el tiempo no puede cambiar porque están definido en el sistema de ejes principales de inercia.

Para estudiar este cambio en γ considero dos direcciones constantes pero diferentes $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$ del vector unitario en la dirección $\mathbf{J}$ y dos ángulos diferentes correspondientes ζ y γ y escribo dichas hipótesis con ayuda de la función (11)

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{v},\zeta)\,\mathbf{l}\,, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{b},\gamma)\,\mathbf{l}\,. \tag{29}$$

Cada una de estas matrices se factorizan [1,2] en

$$\mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{v},\zeta) = \mathbf{R}_G(\mathbf{v},\zeta-\pi)\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{v}) \tag{30}$$

y

$$\mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{b},\gamma) = \mathbf{R}_G(\mathbf{b},\gamma-\pi)\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{b})\,, \tag{31}$$

donde $\mathbf{R}_G(\mathbf{n},\Phi)$ es la forma de Gibbs para la rotación de un ángulo Φ alrededor del eje de rotación $\mathbf{n}$ (ver por ejemplo Ref. 1, p 16)

$$\mathbf{R}_G(\mathbf{n},\Phi) = \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}})\cos\Phi + \operatorname{sen}\Phi\,\mathbf{n}\times\,, \tag{32}$$

y $\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{n})$ es la rotación de un ángulo π alrededor de la bisectriz $\mathbf{l}+\mathbf{n}$, (ver Ref. 1, p 51)

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{n}) = -\mathbf{E} + \frac{(\mathbf{l}+\mathbf{n})(\mathbf{l}+\mathbf{n})^{\mathrm{T}}}{1+\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}}\,. \tag{33}$$

La rotación entre los vectores constantes $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ es también de la forma general (11), pero se puede simplifica el cálculo si la elegimos de la forma simplificad (33), con lo cual se observa que la diferencia de parámetros γ y ζ está definid hasta una constante aditiva arbitraria. Suponemos entonces

$$\mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{b},\gamma)\,\mathbf{l} = \mathbf{R}_A(\mathbf{v},\mathbf{b})\,\mathbf{R}(\mathbf{l},\mathbf{v},\zeta)\,\mathbf{l}\,, \tag{34}$$

por la cual

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_G(\mathbf{b},\gamma-\pi)\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{R}_A(\mathbf{v},\mathbf{b})\,\mathbf{R}_G(\mathbf{v},\zeta-\pi)\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{R}_G(\mathbf{b},\zeta-\pi)\,\mathbf{R}_A(\mathbf{v},\mathbf{b})\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{v})\,,\end{aligned} \tag{35}$$

donde se usaron las factorizaciones (30) y (31) y después otra factorización de la matriz (11) que también se encuentra en Refs. 1 y 2. El primer factor de los miembros más a la izquierda y derecha tienen ahora el mismo eje de rotación por lo cual encontramos el resultado buscado

$$\mathbf{R}_G(\mathbf{b},\gamma-\zeta) = \mathbf{R}_A(\mathbf{v},\mathbf{b})\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{v})\,\mathbf{R}_A(\mathbf{l},\mathbf{b})\,. \tag{36}$$

Si se hace explícito el producto en el miembro derecho se puede encontrar el ángulo $\gamma-\zeta$ a partir del seno y el coseno. De acuerdo a la fórmula de Gibbs (32), la traza del miembro izquierdo es $1+2\cos(\gamma-\zeta)$, por lo cual

$$\cos(\gamma-\zeta) = 1 - \frac{(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{l})^2}{(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})(1+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})}\,. \tag{37}$$

De forma similar al igualar la parte antisimétrica de ambos miembros encuentro

$$\mathrm{sen}(\gamma-\zeta) = \frac{(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{l})}{(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})(1+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})(1+\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})}(\mathbf{b}\times\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{l}. \tag{38}$$

Estas ecuaciones no se han publicado en la forma general que aquí se ve. En la Ref. 1 se presenta el ejercicio 16.3 de la página 135 donde la selección del vector constante, al elegirse diferente de la selección tradicional, se puede integrar fácilmente. En el mismo texto y en la Ref. 3 se descubren en la solución del trompo simétrico de Lagrange dos integrales, una de las cuales es idéntica a la que aparece en (28) y otra que se encuentra también en el caso de Euler, si el vector constante se toma en otra dirección perpendicular. La diferencia de parámetro resultante se puede obtener del caso general anterior, como ilustramos explícitamente en lo que sigue. Estos ejemplos son las aplicaciones que conozco de esta fórmula. Por supuesto se podrán hallar otras implicaciones en el futuro.

Por otra parte hay un caso particular que no permite la representación (11), cuando los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ son antiparalelos por no estar definid (11), ni las Ecs. (37) y (38). En tal caso, si la dirección es la del vector (25), la diferencia de parámetros se puede elegir en función de las componentes del vector $\mathbf{l}$ como

$$\gamma-\zeta = 2\arctan\frac{l_1}{l_2}\,. \tag{39}$$

Este ángulo viene a ser el doble del ángulo de Euler ψ, por lo cual es la integral de la diferencia

$$\dot\psi = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{k})}{1+\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} - \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{k})}{1-\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right] = \frac{d}{dt}\arctan\frac{l_1}{l_2}\,. \tag{40}$$

Mientras que el ángulo de Euler ϕ es la integral de la suma

$$\dot\phi = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{k})}{1+\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} + \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{k})}{1-\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right]\,. \tag{41}$$

El ángulo γ correspondiente es, de acuerdo a (27) la suma de los dos ángulos anteriores igual a la integral de

$$\dot\gamma = \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{k})}{1+\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\,. \tag{42}$$

La integración de estas dos últimas ecuaciones, cuando se sustituye la expresión de la componente l_3=$\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$=$\mathrm{cn}(\mu,k')\mathrm{cn}(\alpha t)$, da lugar a integrales elípticas de tercera especie, solo una de las cuales es independiente por estar relacionadas por la primera integral que es conocida. La integral (41) toma entonces la forma de la integral (28).

De manera semejante es conveniente escribir las integrales similares que resultan de sustituir en las tres integrales anteriores el vector $\mathbf{k}$ por el vector $\mathbf{i}$ en la dirección del eje coordenado 1, que distinguimos de las anteriores por el subíndice 1:

$$\dot\psi_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{i})}{1+\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} - \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{i})}{1-\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right] = \frac{d}{dt}\arctan\frac{l_2}{l_3}\,, \tag{43}$$

$$\dot\phi_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{i})}{1+\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} + \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{i})}{1-\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right]\,, \tag{44}$$

y

$$\dot\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{i})}{1+\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\,. \tag{45}$$

De nuevo estas tres integrales están relacionadas entre sí, pero ahora la diferencia de los ángulos γ_1 y $\gamma_3=\gamma$ se puede obtener de las expresiones generales (37) y (38) para darnos

$$\gamma_1-\gamma_3 = 2\arctan\frac{l_2}{1+l_1+l_3}\,. \tag{46}$$

La combinación de estos resultados permite obtener la diferencia entre los ángulos ϕ_1 y $\phi=\phi_3$

$$\begin{aligned}\phi_1-\phi_3 &= 2\arctan\frac{l_2}{1+l_1+l_3} + \arctan\frac{l_1}{l_2} \\ &\quad - \arctan\frac{l_2}{l_3} = \arctan\frac{l_1\,l_3}{l_2}\,.\end{aligned} \tag{47}$$

La integral (44) escrita en la forma semejante a (28) es ahora

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{J}{I_1}t - \frac{\mathrm{cn}(\mu,k')\mathrm{dn}(\mu,k')}{\mathrm{sn}(\mu,k')} \\ &\quad \times \int_0^{\alpha t} \frac{du}{1-\mathrm{sn}^2(\mu,k')\mathrm{dn}^2(u,k)}\,,\end{aligned} \tag{48}$$

la cual aparece en la solución por el método de separación de variables [4] que se estudia en la sección que sigue.

De nuevo cambiamos ahora los vectores $\mathbf{k}$ o $\mathbf{i}$ por el vector $\mathbf{j}$ a lo largo del eje coordenado 2, en las integrales aquí arriba, para defini tres ángulos parecidos que distinguimos con el subíndice 2

$$\dot{\psi}_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{j})}{1+\mathbf{j}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} - \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{j})}{1-\mathbf{j}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_3}{l_1}\,, \quad (49)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{j})}{1+\mathbf{j}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}} + \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}-\mathbf{j})}{1-\mathbf{j}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\right] \quad (50)$$

y

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\mathbf{l}+\mathbf{j})}{1+\mathbf{j}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}}\,. \quad (51)$$

De nuevo la suma de las dos primeras (49) y (50) es igual a la última.

La diferencia de los ángulos $\gamma_3 = \gamma$ y γ_2 se obtiene de las expresiones generales (37) y (38) para darnos

$$\gamma_3 - \gamma_2 = 2\mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_1}{1+l_2+l_3}\,. \quad (52)$$

La combinación de estos resultados permite obtener la diferencia entre los ángulos $\phi_3 = \phi$ y ϕ_2

$$\phi_3 - \phi_2 = 2\mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_1}{1+l_2+l_3} + \mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_3}{l_1} - \mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_1}{l_2} = \mathrm{arc\,tan}\,\frac{l_2\,l_3}{l_1}\,. \quad (53)$$

La integral (50) escrita en la forma semejante a (28) es en este caso

$$\phi_2 = \frac{J}{I_2}t + \frac{k'^2\mathrm{sn}(\mu,k')\mathrm{cn}(\mu,k')}{\mathrm{dn}(\mu,k')} \times \int_0^{\alpha t} \frac{du}{1-\mathrm{dn}^2(\mu,k')\mathrm{sn}^2(u,k)}\,, \quad (54)$$

la cual aparece en la solución del trompo simétrico de Lagrange [3] que se estudia en la cuarta sección.

3. La solución por el método de separación de variables

En esta parte del trabajo cambiamos ahora a otro método de solución que estudiamos previamente [4]. El origen de este trabajo se remonta al estudio del mismo problema en el caso cuántico.

El caso cuántico [7] da lugar a una ecuación de Schrödinger, la cual es separable en un sistema de coordenadas esferoconal que, aunque similar al usado previamente, se distingue en forma esencial porque si se usa en la dinámica clásica, las dos coordenadas varían en el tiempo. Además los parámetros de las funciones de Jacobi son diferentes, funciones únicamente de los tres momentos de inercia.

Como en la Ec. (10) suponemos que tenemos dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ relacionados por la matriz de rotación, suponemos de nuevo que $\mathbf{v}$ es un vector constante, usamos la parametrización (11) para la matriz de rotación y aceptamos la forma (12) de la velocidad angular. Vamos a usar las ecuaciones de movimiento de Lagrange a partir de la lagrangiana que obedece el principio variacional de Hamilton, la cual es la energía cinética (5):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}[\dot{\mathbf{u}}\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})]+\dot{\gamma}\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}} \times \mathbf{I}\left(\frac{1}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}[\dot{\mathbf{u}}\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})]+\dot{\gamma}\mathbf{u}\right)\,, \quad (55)$$

pero en esta lagrangiana supondremos que el vector unitario $\mathbf{u}$ está parametrizado por dos coordenadas esferoconales diferentes a las usadas previamente:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{dn}\,(c\phi_1,k_1)\,\mathrm{sn}\,(c\phi_2,k_2) \\ \mathrm{cn}\,(c\phi_1,k_1)\,\mathrm{cn}\,(c\phi_2,k_2) \\ \mathrm{sn}\,(c\phi_1,k_1)\,\mathrm{dn}\,(c\phi_2,k_2) \end{pmatrix}\,, \quad (56)$$

porque los parámetros son ahora diferentes, funciones de los momentos de inercia

$$k_1^2 = \frac{\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_3}}{\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}}\,, \quad (57)$$

$$k_2^2 = \frac{\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}}{\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}}\,, \quad (58)$$

pero se sigue satisfaciendo que la suma de estas ecuaciones es igual a uno, para que las coordenadas sean ortogonales:

$$k_1^2 + k_2^2 = 1\,. \quad (59)$$

La constante c que multiplica las coordenadas ϕ_1 y ϕ_2,

$$c = \sqrt{\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}}\,, \quad (60)$$

es un factor útil para simplifica expresiones.

La velocidad del vector $\mathbf{u}$ se escribe con ayuda de las derivadas de este vector respecto a las coordenadas que denotamos como $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_1 = c\begin{pmatrix} -k_1^2\mathrm{sn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{cn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{sn}(c\phi_2,k_2) \\ -\mathrm{sn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{dn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{cn}(c\phi_2,k_2) \\ \mathrm{cn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{dn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{dn}(c\phi_2,k_2) \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\mathbf{e}_2 = c\begin{pmatrix} \mathrm{dn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{cn}(c\phi_2,k_2)\mathrm{dn}(c\phi_2,k_2) \\ -\mathrm{cn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{sn}(c\phi_2,k_2)\mathrm{dn}(c\phi_2,k_2) \\ -k_2^2\mathrm{sn}(c\phi_1,k_1)\mathrm{sn}(c\phi_2,k_2)\mathrm{cn}(c\phi_2,k_2) \end{pmatrix}, \quad (62)$$

donde se usan las ecuaciones del Apéndice 1. Las otras ecuaciones del mismo apéndice y la Ec. (59) nos permiten demostrar las ecuaciones del Apéndice 2 donde se tiene que los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, son mutuamente ortogonales y los dos vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ tienen la misma magnitud:

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = F = \mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1)\,. \quad (63)$$

Que se ha escrito en función de las dos funciones de uso continuo en lo que sigue

$$\mathcal{P}_1(\phi_1) = \frac{1}{I_3} + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) \mathrm{sn}^2\,(c\phi_1, k_1)\,, \tag{64}$$

$$\mathcal{P}_2(\phi_2) = \frac{1}{I_1} - \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \mathrm{sn}^2\,(c\phi_2, k_2)\,. \tag{65}$$

Vamos ahora a calcular la hamiltoniana en estas coordenadas. Principiamos por calcular los momentos canónicos conjugados a las coordenadas ϕ_1, ϕ_2 y γ, respectivamente p_1, p_2 y p_γ:

$$p_j = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}_j} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\phi}_j}\,, \tag{66}$$

donde se han usado la segunda de (5) y la Ec. (7), aquí j representa a cualquier momento. Se sustituye en ésta la forma explícita (12) de $\boldsymbol{\omega}$ para obtener

$$p_1 = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \frac{1}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} [\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{u}+\mathbf{v})]\,, \tag{67}$$

$$p_2 = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \frac{1}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} [\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{u}+\mathbf{v})] \tag{68}$$

y

$$p_\gamma = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\,. \tag{69}$$

Estas ecuaciones permiten obtener fácilmente las componentes del vector $\mathbf{L}$ en la base de vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $(\mathbf{u}+\mathbf{v})/(1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})$, porque las Ecs. (67)-(69) son las proyecciones de dicho vector con tres vectores paralelos a la base dual. Se encuentra entonces

$$\mathbf{L} = \frac{1}{F}\,(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2) + p_\gamma\,\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\,. \tag{70}$$

La función de Hamilton está en el miembro derecho de (15) si se escribe $\mathbf{L}$ en la forma explícita dada por (70):

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F}\,(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2) + p_\gamma\,\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \times\,\mathbf{I}^{-1}\left(\frac{1}{F}\,(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2) + p_\gamma\,\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Antes de proseguir notamos que γ es una variable cíclica porque la hamiltoniana no es función de esta coordenada. De ahí viene que su momento canónico conjugado es una constante de movimiento. Esto es evidente en (69) donde aparece como el producto escalar de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{L}$, producto invariante ante rotaciones, igual al producto escalar de los mismos vectores después de rotar, los cuales son ambos constantes:

$$p_\gamma = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\,. \tag{72}$$

No perdemos generalidad al suponer que esta constante es cero, es decir, que el vector constante $\mathbf{v}$ se elige perpendicular al vector de momento angular $\mathbf{J}$ y esta hipótesis simplific la expresión del vector de momento angular $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{F}(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2)\,, \tag{73}$$

así como de la función de Hamilton

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F}\,(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2)\right)^{\mathrm{T}} \\ &\quad\times\,\mathbf{I}^{-1}\left(\frac{1}{F}\,(p_2\,\mathbf{e}_1 - p_1\,\mathbf{e}_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{p_1^2\,\mathcal{P}_2(\phi_2) + p_2^2\,\mathcal{P}_1(\phi_1)}{\mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1)}\,, \end{aligned} \tag{74}$$

donde la última simplificac ón proviene de las propiedades de las coordenadas esferoconales en el Apéndice 2.

Esta hamiltoniana tiene la forma para que sus ecuaciones de movimiento sean separables en el sentido de Liouville [8], y por tanto el problema es soluble en estas coordenadas como se vió en la Ref. 4.

También conviene calcular el cuadrado de la magnitud del momento angular

$$J^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1)}\,, \tag{75}$$

de las cuales se despejan los momentos en función de las coordenadas

$$p_1 = J\,\sqrt{\frac{2E}{J^2} - \mathcal{P}_1(\phi_1)}\,, \tag{76}$$

$$p_2 = J\,\sqrt{\mathcal{P}_2(\phi_2) - \frac{2E}{J^2}}\,. \tag{77}$$

A continuación voy a efectuar la transformación de las coordenadas ϕ_1 y ϕ_2 a las coordenadas h_1 y h_2 de la Ref. 4. Se encuentran ahí

$$\mathrm{sn}\,(h_1, k) = \frac{k_2\,\mathrm{sn}\,(c\phi_1, k_1)}{\mathrm{dn}\,(c\phi_1, k_1)}\,, \tag{78}$$

y

$$k\,\mathrm{sn}\,(h_2, k) = -\frac{k_1\,\mathrm{sn}\,(c\phi_2, k_2)}{\mathrm{dn}\,(c\phi_2, k_2)}\,, \tag{79}$$

donde vuelve a aparecer el parámetro k del otro sistema de coordenadas esferoconal en la sección anterior, las cuales invertimos para obtener las ecuaciones

$$\mathrm{sn}\,(c\phi_1, k_1) = \frac{\mathrm{dn}\,(\mu, k')\,\mathrm{sn}\,(h_1, k)}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\,(\mu, k')\,\mathrm{dn}^2\,(h_1, k)}}\,, \tag{80}$$

$$\mathrm{cn}\,(c\phi_1, k_1) = \frac{\mathrm{cn}\,(\mu, k')\,\mathrm{cn}\,(h_1, k)}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\,(\mu, k')\,\mathrm{dn}^2\,(h_1, k)}}\,, \tag{81}$$

y

$$\mathrm{dn}\,(c\phi_1, k_1) = \frac{\mathrm{cn}\,(\mu, k')}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\,(\mu, k')\,\mathrm{dn}^2\,(h_1, k)}}\,, \tag{82}$$

y también

$$\operatorname{sn}(c\phi_2, k_2) = -\frac{\operatorname{dn}(\mu, k')\operatorname{sn}(h_2, k)}{\sqrt{1 - \operatorname{cn}^2(\mu, k')\operatorname{cn}^2(h_2, k)}}, \quad (83)$$

$$\operatorname{cn}(c\phi_2, k_2) = -\frac{\operatorname{sn}(\mu, k')\operatorname{dn}(h_2, k)}{\sqrt{1 - \operatorname{cn}^2(\mu, k')\operatorname{cn}^2(h_2, k)}}, \quad (84)$$

y

$$\operatorname{dn}(c\phi_2, k_2) = \frac{\operatorname{sn}(\mu, k')}{\sqrt{1 - \operatorname{cn}^2(\mu, k')\operatorname{cn}^2(h_2, k)}}, \quad (85)$$

donde vuelven a aparecer los parámetros k' y μ del otro sistema coordenado esferoconal de la sección precedente, ecuaciones (19-23).

Vamos a sustituir las Ecs. (76)-(77) y (80)-(85) en la forma (73) del momento angular y dividimos por J para encontrar la expresión del vector unitario $\mathbf{l}$ en estas coordenadas

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \operatorname{sn}(\mu, k')\operatorname{dn}(h_1 - h_2, k) \\ \operatorname{dn}(\mu, k')\operatorname{sn}(h_1 - h_2, k) \\ \operatorname{cn}(\mu, k')\operatorname{cn}(h_1 - h_2, k) \end{pmatrix}. \quad (86)$$

El cálculo es directo. Hemos usado en él las fórmulas de adición de las funciones elípticas de Jacobi (ver por ejemplo la Ref. 9):

$$\operatorname{sn}(h_1 - h_2) = \frac{\operatorname{sn}h_1\operatorname{cn}h_2\operatorname{dn}h_2 - \operatorname{cn}h_1\operatorname{dn}h_1\operatorname{sn}h_2}{1 - k^2\operatorname{sn}^2h_1\operatorname{sn}^2h_2}, \quad (87)$$

$$\operatorname{cn}(h_1 - h_2) = \frac{\operatorname{sn}h_1\operatorname{dn}h_1\operatorname{sn}h_2\operatorname{dn}h_2 + \operatorname{cn}h_1\operatorname{cn}h_2}{1 - k^2\operatorname{sn}^2h_1\operatorname{sn}^2h_2}, \quad (88)$$

$$\operatorname{dn}(h_1 - h_2) = \frac{\operatorname{dn}h_1\operatorname{dn}h_2 + k^2\operatorname{sn}h_1\operatorname{cn}h_1\operatorname{sn}h_2\operatorname{cn}h_2}{1 - k^2\operatorname{sn}^2h_1\operatorname{sn}^2h_2}, \quad (89)$$

y la identidad

$$\mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1) = \frac{c^2\operatorname{sn}^2\mu\operatorname{cn}^2\mu(1 - k^2\operatorname{sn}^2h_1\operatorname{sn}^2h_2)}{(1 - \operatorname{sn}^2\mu\operatorname{dn}^2 h_1)(1 - \operatorname{cn}^2\mu\operatorname{cn}^2 h_2)}. \quad (90)$$

Los vectores (17) y (86) son iguales porque tenemos la expresión de la Ref. 4

$$h_1 - h_2 = \alpha\, t, \quad (91)$$

donde α es la constante (24). Dicha ecuación resultó en la Ref. 4 de la diferencia de las ecuaciones diferenciales para las coordenadas h_1 y h_2.

De esta forma podemos mostrar, de forma mucho más clara que la que se hizo en la Ref. 4, cómo llegar, a partir de una formulación muy diferente del problema de Euler, a las expresiones usuales de la solución a este problema común en los textos.

4. El teorema de Jacobi para los casos de Euler y Lagrange de movimientos de cuerpos rígidos

Entre las obras completas de Jacobi se incluyó un teorema inédito [10] mediante el cual la matriz de rotación del trompo simétrico de Lagrange en el campo de gravedad constante se encuentra igual al producto de dos matrices de rotación que son formalmente similares a las matrices de rotación del caso de Euler al cual está dedicado este trabajo. El caso de Lagrange y el teorema de Jacobi fueron estudiados previamente en la Ref. 3, por lo cual seremos menos explícitos. Para el trompo de Lagrange se supone hay un eje de simetría, dos momentos de inercia iguales $I_1 = I_2$ y un punto inmóvil sobre el eje de simetría. La matriz de rotación del trompo de Lagrange representa ahora un giro alrededor de este punto inmóvil.

El hamiltoniano del trompo simétrico de Lagrange en las coordenadas de Euler, pero en un sistema de referencia que rota con velocidad angular constante alrededor del eje de simetría del cuerpo, de magnitud

$$p_\psi\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)$$

(ver Refs. 3 y 11), se simetriza en la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{I_1}\left[p_\theta^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}(p_\phi^2 - 2p_\phi p_\psi\cos\theta + p_\psi^2)\right] + Q\cos\theta, \quad (92)$$

donde Q es el producto del peso del cuerpo multiplicado por la distancia del centro de masa al punto inmóvil, y donde p_θ, p_ϕ, p_ψ son los momentos canónicos conjugados a los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ, respectivamente. Los ángulos ϕ y ψ, no aparecen en el hamiltoniano y son constantes sus momentos angulares p_ϕ y p_ψ. Si llamamos E al valor constante de este hamiltoniano en el sistema rotante y usamos la coordenada $z = \cos\theta$, las ecuaciones de movimiento se reducen a cuadraturas, como lo hace Lagrange [12] en forma similar a

$$\dot{z}^2 = \frac{2E}{I_1}(1 - z^2) - \frac{2Q}{I_1}(1 - z^2)z - \frac{1}{I_1^2}(p_\phi^2 - 2p_\phi p_\psi z + p_\psi^2), \quad (93)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_1}\frac{p_\phi - p_\psi z}{1 - z^2}, \quad (94)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_1}\frac{p_\psi - p_\phi z}{1 - z^2}. \quad (95)$$

Notamos que el momento de inercia I_3 ha desaparecido del formalismo y únicamente se toma en cuenta en la rotación con velocidad angular constante.

Se ha usado la unidad de tiempo $T^2 = I_1/(2Q)$ para defini cantidades sin dimensiones

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad a = T\frac{p_\psi}{I_1}, \quad b = T\frac{p_\phi}{I_1}, \quad c = \frac{E}{Q}. \quad (96)$$

La Ec. (93) se convierte en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[(1 - z^2)(c - z) + 2zab - a^2 - b^2\right] = 0, \quad (97)$$

que hemos considerado como la ecuación de conservación de energía (cero) de una partícula (de masa unidad) que se mueve a lo largo de la coordenada z en el pozo de potencial cúbico

$$V(z) = -\frac{1}{2}\left[(1-z^2)(c-z) + 2zab - a^2 - b^2\right] = -\frac{1}{2}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\,, \tag{98}$$

donde z_1, z_2, z_3, son las tres raíces de este potencial, que en general satisfacen las desigualdades

$$z_1 > 1 > z_2 > z > z_3 > -1. \tag{99}$$

Las tres raíces del potencial son funciones de las constantes físicas del problema, simétricas respecto a un intercambio del valor de las constantes a y b; y el movimiento en z resulta también simétrico respecto a dicho intercambio

$$c = z_1 + z_2 + z_3\,, \tag{100}$$

$$2ab - 1 = z_1 z_2 + z_3 z_1 + z_2 z_3\,, \tag{101}$$

$$a^2 + b^2 - c = z_1 z_2 z_3\,. \tag{102}$$

Se usan frecuentemente las propiedades

$$(a+b)^2 = (z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)\,, \tag{103}$$

$$(a-b)^2 = (z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)\,. \tag{104}$$

La integración de la Ec. (97) se escribe en términos de las funciones elípticas de Jacobi

$$z = z_3 + (z_2 - z_3)\mathrm{sn}^2(\alpha\tau, k)\,, \quad k^2 = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\,, \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{z_1 - z_3}\,. \tag{105}$$

Esta solución se encuentra en las referencias ya mencionadas [3,11], pero también resuelve la ecuación similar de Korteweg-de Vries [13] y el fluj espiral de Oseen [14].

La integración de los otros dos ángulos de Euler se reduce a cuadraturas al sustituir este resultado en las Ecs. (94) y (95). Es preferible escribir la suma y diferencia de ambas ecuaciones y usar las cantidades sin dimensiones en (96) para obtener

$$\frac{d}{d\tau}(\psi+\phi) = \frac{a+b}{1+z} = \frac{a+b}{1+z_3+(z_2-z_3)\mathrm{sn}^2(\alpha\tau,k)}, \tag{106}$$

$$\frac{d}{d\tau}(\psi-\phi) = \frac{a-b}{1-z} = \frac{a-b}{1-z_3-(z_2-z_3)\mathrm{sn}^2(\alpha\tau,k)}\,. \tag{107}$$

Estas ecuaciones son de la forma que aparece en la integración del tercer ángulo de Euler en la dinámica del trompo de Euler. Para hacer más clara la equivalencia se introducen dos parámetros μ y λ tales que

$$\mathrm{sn}(\mu,k') = \sqrt{\frac{1+z_3}{1+z_2}}\,, \quad \mathrm{cn}(\mu,k') = \frac{\sqrt{(z_2-z_3)(1+z_1)(1+z_3)}}{a+b}\,, \quad \mathrm{dn}(\mu,k') = \sqrt{\frac{(1+z_1)(z_2-z_3)}{(1+z_2)(z_1-z_3)}} \tag{108}$$

y

$$\mathrm{sn}(\lambda,k') = \sqrt{\frac{(1-z_2)(z_1-z_3)}{(1-z_3)(z_1-z_2)}}\,, \quad \mathrm{cn}(\lambda,k') = \sqrt{\frac{(z_1-1)(z_2-z_3)}{(1-z_3)(z_1-z_2)}}\,, \quad \mathrm{dn}(\lambda,k') = \frac{\sqrt{(z_2-z_3)(1-z_2)(z_1-1)}}{a-b}\,. \tag{109}$$

En todas ellas el módulo k' es el complementario de k:

$$k'^2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\,. \tag{110}$$

Las integrales (106) y (107) toman la forma

$$\frac{\psi+\phi}{2} = \frac{\mathrm{sn}(\mu,k')\mathrm{dn}(\mu,k')}{\mathrm{cn}(\mu,k')} \times \int_0^{\alpha\tau} \frac{du}{1-\mathrm{cn}^2(\mu,k')\mathrm{cn}^2(u,k)}\,, \tag{111}$$

$$\frac{\psi-\phi}{2} = \frac{k'^2\mathrm{sn}(\lambda,k')\mathrm{cn}(\lambda,k')}{\mathrm{dn}(\lambda,k')} \times \int_0^{\alpha\tau} \frac{du}{1-\mathrm{dn}^2(\lambda,k')\mathrm{sn}^2(u,k)}\,, \tag{112}$$

que son de la forma de las mismas integrales elípticas de tercera especie, similares a las que se encuentran en el caso de Euler. La primera aparece en forma casi idéntica en la Ec. (28) para uno de los ángulos de Euler, la segunda corresponde también al mismo problema si se cambia la dirección del momento angular a la de otro de los ejes coordenados, como se vio previamente en (54). Éste es un primer anuncio de que la matemática es similar en ambos sistemas dinámicos, pero la relación se vuelve mucho más estrecha como encontró Jacobi en un teorema póstumo publicado en sus obras completas.

El teorema de Jacobi asegura que la matriz de rotación del caso de Lagrange se puede factorizar en el producto de dos matrices de rotación, cada una de las cuales es de la forma de la matriz de rotación del caso de Euler. Con ello quiso decir Jacobi que las funciones son idénticas y se discute si los trompos asociados de Euler se pueden considerar reales o no, porque sus momentos principales de inercia son o no son positivos. Veremos que parte de esta discusión es irrelevante. Como en la Ref. 3 hemos demostrado muchas de las afirmacione que siguen, es preferible dar los resultados más importantes asociados a este teorema de Jacobi.

Llamamos $\mathbf{R}$ a la matriz de rotación del caso de Lagrange, la cual se considera sin la rotación de velocidad angular constante, como se hizo antes. $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ son las matrices de rotación del tipo de Euler. Entre ellas se satisface la ecuación

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_1^{\mathrm{T}}\,. \tag{113}$$

$\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ son las velocidades angulares del trompo de Lagrange en los sistemas inercial y anclado, respectivamente, y en forma similar, $\boldsymbol{\Omega_1}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega_2}$, $\boldsymbol{\omega}_2$ las velocidades angulares de las dos matrices de Euler. Entre estas seis velocidades angulares se tienen [3] las tres ecuaciones no triviales

$$\boldsymbol{\omega} = -2\boldsymbol{\Omega}_1\ : \tag{114}$$

la velocidad angular en el sistema del trompo de Lagrange es menos el doble de la herpolodia del cuerpo de Euler 1;

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega}_2\ : \tag{115}$$

la velocidad angular en el sistema inercial del trompo de Lagrange es el doble de la herpolodia del cuerpo de Euler 2; y

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2\ : \tag{116}$$

las velocidades angulares en el sistema fij de los dos cuerpos de Euler difiere en signo.

Las constantes a y b del trompo simétrico de Lagrange son las componentes de la velocidad angular en la dirección del eje 3 del sistema fij al trompo y del sistema inercial en las unidades adimensionales ya usadas

$$a = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\,, \quad b = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\,. \tag{117}$$

Se escriben a continuación las constantes que aparecen en las Ecs. (19)-(24) de los dos trompos auxiliares de Euler, en función de estas dos constantes, de la energía sin dimensiones c y de las tres raíces del potencial cúbico. Sólo tres de las seis son independientes, pero a, b, c como son funciones simétricas de las raíces son muy útiles. Los momentos de inercia del cuerpo 1, para distinguir, se denotan A_1, B_1, C_1 y los del cuerpo 2 serán A_2, B_2, C_2; J_1 y J_2 son las magnitudes de los momentos angulares de los cuerpos de Euler 1 y 2, respectivamente y E_1 y E_2 las energías respectivas. Se encuentra para el trompo 1:

$$\frac{J_1}{A_1} = -\frac{b-az_1}{2(c-a^2-z_1)} = \frac{z_1^2-1}{2(b-az_1)}\,,$$

$$\frac{J_1}{B_1} = -\frac{b-az_3}{2(c-a^2-z_3)} = \frac{1-z_3^2}{2(az_3-b)}\,,$$

$$\frac{J_1}{C_1} = -\frac{b-az_2}{2(c-a^2-z_2)} = \frac{1-z_2^2}{2(az_2-b)}\,,$$

$$\frac{2E_1}{J_1} = -\frac{a}{2}\,; \tag{118}$$

para el trompo 2:

$$\frac{J_2}{A_2} = \frac{a-bz_1}{2(c-b^2-z_1)} = \frac{z_1^2-1}{2(bz_1-a)}\,,$$

$$\frac{J_2}{B_2} = \frac{a-bz_3}{2(c-b^2-z_3)} = \frac{1-z_3^2}{2(a-bz_3)}\,,$$

$$\frac{J_2}{C_2} = \frac{a-bz_2}{2(c-b^2-z_2)} = \frac{1-z_2^2}{2(a-bz_2)}\,,$$

$$\frac{2E_2}{J_2} = \frac{b}{2}\,. \tag{119}$$

Las dobles igualdades en seis de estas ecuaciones nos aseguran simplemente que z_1, z_2, z_3 son las raíces del potencial cúbico, pero dichas igualdades son importantes para las verificacione que siguen.

Si se sustituyen estas cantidades en la Ec. (24) para la constante α que multiplica al tiempo en el argumento de las funciones elípticas de Jacobi del momento angular se encuentra para ambos cuerpos de Euler

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\left(\frac{2E_1}{J_1}-\frac{J_1}{C_1}\right)\left(\frac{J_1}{A_1}-\frac{J_1}{B_1}\right)}\\ &= \sqrt{\left(\frac{2E_2}{J_2}-\frac{J_2}{C_2}\right)\left(\frac{J_2}{A_2}-\frac{J_2}{B_2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{z_1-z_3}\,,\end{aligned} \tag{120}$$

que coincide con la constante que multiplica al tiempo en la función elíptica de Jacobi (105) del trompo de Lagrange.

Si se sustituyen esas mismas constantes en la expresión (22) para el parámetro k de las funciones de las componentes del momento angular se encuentra el mismo resultado para los dos cuerpos de Euler y para el trompo de Lagrange

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{\left(\frac{J_1}{B_1}-\frac{J_1}{C_1}\right)\left(\frac{J_1}{A_1}-\frac{2E_1}{J_1}\right)}{\left(\frac{2E_1}{J_1}-\frac{J_1}{C_1}\right)\left(\frac{J_1}{A_1}-\frac{J_1}{B_1}\right)}\\ &= \frac{\left(\frac{J_2}{B_2}-\frac{J_2}{C_2}\right)\left(\frac{J_2}{A_2}-\frac{2E_2}{J_2}\right)}{\left(\frac{2E_2}{J_2}-\frac{J_2}{C_2}\right)\left(\frac{J_2}{A_2}-\frac{J_2}{B_2}\right)}\\ &= \frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\,.\end{aligned} \tag{121}$$

Cada uno de los dos trompos de Euler tiene un vector unitario en la dirección del momento angular en el sistema del cuerpo que se transforma por la matriz respectiva en la dirección $\mathbf{k}$ del eje coordenado 3 del sistema inercial

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{R}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{l}_2 = \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{k}\,. \tag{122}$$

Las componentes de ambos vectores deben ser de la forma de la Ec. (17) y la única diferencia se puede encontrar en un valor diferente del parámetro μ: μ_1, μ_2, porque sus componentes nos deben conducir a componentes proporcionales de la velocidad angular, de conformidad con las Ecs. (7) y (116). Pero las ocho constantes (118) y(119) determinan los valores de estos parámetros μ de acuerdo a las Ecs. (19)-(21). Se encuentran

$$\mathrm{sn}(\mu_1, k') = \sqrt{\frac{(1-z_3^2)(1-z_2^2)}{z_1 - z_2}\,\frac{az_1 - b}{a^2 - b^2}}\,,$$

$$\mathrm{dn}(\mu_1, k') = \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_2^2)}{z_1 - z_3}\,\frac{b - az_3}{a^2 - b^2}}\,,$$

$$\mathrm{cn}(\mu_1, k') = \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_3^2)}{z_1 - z_2}\,\frac{b - az_2}{a^2 - b^2}}\,, \qquad (123)$$

y

$$\mathrm{sn}(\mu_2, k') = \sqrt{\frac{(1-z_3^2)(1-z_2^2)}{z_1 - z_2}\,\frac{bz_1 - a}{a^2 - b^2}}\,,$$

$$\mathrm{dn}(\mu_2, k') = \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_2^2)}{z_1 - z_3}\,\frac{a - bz_3}{a^2 - b^2}}\,,$$

$$\mathrm{cn}(\mu_2, k') = \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_3^2)}{z_1 - z_2}\,\frac{a - bz_2}{a^2 - b^2}}\,. \qquad (124)$$

Por lo cual las componentes de los dos vectores $\mathbf{l}_1$ y $\mathbf{l}_2$ son

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(1-z_3^2)(1-z_2^2)}{z_1-z_2}\frac{az_1-b}{a^2-b^2}}\,\mathrm{dn}(\alpha\tau, k) \\ \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_2^2)}{z_1-z_3}\frac{b-az_3}{a^2-b^2}}\,\mathrm{sn}(\alpha\tau, k) \\ \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_3^2)}{z_1-z_2}\frac{b-az_2}{a^2-b^2}}\,\mathrm{cn}(\alpha\tau, k) \end{pmatrix} \qquad (125)$$

y

$$\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(1-z_3^2)(1-z_2^2)}{z_1-z_2}\frac{bz_1-a}{a^2-b^2}}\,\mathrm{dn}(\alpha\tau, k) \\ \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_2^2)}{z_1-z_3}\frac{a-bz_3}{a^2-b^2}}\,\mathrm{sn}(\alpha\tau, k) \\ \sqrt{\frac{(z_1^2-1)(1-z_3^2)}{z_1-z_2}\frac{a-bz_2}{a^2-b^2}}\,\mathrm{cn}(\alpha\tau, k) \end{pmatrix}. \qquad (126)$$

La velocidad angular en el sistema del cuerpo, del trompo de Euler, se puede expresar en función del vector de momento angular y del inverso de la matriz de inercia, de acuerdo a la Ec. (7). Las componentes de la velocidad angular del primer cuerpo de Euler se obtiene multiplicando cada componente del vector (125) por las tres primeras cantidades de las Ecs. (118), y las componentes de la velocidad angular del cuerpo 2 de Euler se encuentran del producto de las componentes del vector (126) por las primeras tres cantidades de las Ecs. (119). Pero ambos vectores de velocidad angular difiere en signo, de conformidad con (116), se encuentran así

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{(a^2-b^2)\mathrm{dn}(\alpha\tau,k)}{\sqrt{(z_1-z_2)(1-z_2^2)(1-z_3^2)}} \\ \frac{(a^2-b^2)\mathrm{sn}(\alpha\tau,k)}{\sqrt{(z_1-z_3)(z_1^2-1)(1-z_2^2)}} \\ \frac{(a^2-b^2)\mathrm{cn}(\alpha\tau,k)}{\sqrt{(z_1-z_2)(z_1^2-1)(1-z_3^2)}} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\omega}_1\,. \qquad (127)$$

Además el producto escalar de los dos vectores $\mathbf{l}_1$ y $\mathbf{l}_2$, resulta igual por (122) y (113) a la componente $3,3$ de la matriz de rotación del trompo de Lagrange, igual a $z = \cos\theta$

$$\mathbf{l}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{l}_1 = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{k} = \cos\theta = z\,, \qquad (128)$$

la que es igual en (105) a

$$\mathbf{l}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{l}_1 = z_3 + (z_2 - z_3)\mathrm{sn}^2(\alpha\tau, k)\,, \qquad (129)$$

la cual se satisface por los vectores (125) y (126).

Finalmente, las energías de los dos trompos de Euler deben ser iguales a la mitad del producto escalar del momento angular y la velocidad angular. Pero estos valores están predeterminados por las cuartas ecuaciones en los conjuntos (118) y (119):

$$\mathbf{l}_1^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{2E_1}{J_1} = -\frac{a}{2}\,, \quad \mathbf{l}_2^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{2E_2}{J_2} = \frac{b}{2}\,, \qquad (130)$$

ecuaciones que también se satisfacen por los vectores (125), (126) y (127).

Conviene aquí hacer un alto para recalcar algunos aspectos de este cálculo. Obsérvese que las Ecs. (120)-(130) conllevan una verificac ón en gran detalle de la congruencia del teorema de Jacobi. El número de ecuaciones satisfechas sobrepasa mucho en número al número de cantidades independientes: z_1, z_2, z_3. La identificac ón de los ocho parámetros en (118) y (119), que se hizo en la Ref. 3, fue en dirección contraria: se buscaron los parámetros que podían satisfacer las once condiciones anteriores.

La presencia de la misma función de Jacobi en cada componente de los tres vectores (125), (126) y (127) viene de (7) y (116), que a su vez implica tener los mismos parámetros α y k en todas estas funciones.

En la Ref. 3 se hizo notar un cambio en signo en el cálculo que hicieron otros autores [15] de las cuatro cantidades en (118). Este factor diferente no modific muchas de estas ecuaciones, pero en lugar del conjunto de Ecs. (114)-(116) tendríamos el conjunto absurdo $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{0}$, es decir el trompo de Lagrange estaría en reposo. Esto es una crítica constructiva a dicha referencia [15], pero en Ref. 3 no se dijo tan claramente, aunque se demostró con más detalle matemático.

Varios autores que consideraron el teorema de Jacobi afi - maron que los parámetros físicos (momentos de inercia, momento angular, energía) de los dos cuerpos rígidos de Euler podrían no tener el signo correcto. Esto es verdad hasta cierto punto. En las Refs. 1 y 3 se hizo notar que en el cálculo del vector unitario $\mathbf{l}$, en la dirección del momento angular, la adición de una constante arbitraria y el producto por otra constante a los momentos de inercia, no modific dicho vector, excepto por un factor constante conocido en la variable temporal. En este sentido se puede demostrar que los dos vectores unitarios de los trompos de Euler auxiliares sí corresponden a cuerpos rígidos con momentos de inercia y energías positivos. Por otra parte, la velocidad angular sí se ve afectada por las constantes aditiva y multiplicativa y en el teorema de Jacobi no hay libertad en el cumplimiento de las Ecs. (114)-(116) que relacionan las velocidades angulares. La diferencia sin embargo no es tan importante. Afecta exclusivamente al ángulo ϕ de Euler con la adición de una velocidad angular constante. Aquí tenemos dos ángulos ϕ, uno para cada cuerpo de Euler, que para el trompo de Lagrange signifi can multiplicar antes y después por rotaciones alrededor de $\mathbf{k}$ con una velocidad angular constante. Pero recordemos que al principio de esta sección simetrizamos el problema del trompo de Lagrange haciendo una multiplicación previa con una velocidad angular constante alrededor de $\mathbf{k}$. Vemos pues que una buena parte de esta discusión es bizantina.

La discusión, aunque bizantina para valores genéricos de las constantes a, b, c, deja de serlo en el caso del trompo cuspidal en que se tienen las condiciones [1]

$$z_2 = \frac{b}{a} = c - a^2; \tag{131}$$

entonces el parámetro J_1/C_1 no está definid y el teorema de Jacobi no se demuestra.

Otro resultado admirable en el enunciado completo del teorema de Jacobi es la relación simple que existe entre los parámetros constantes μ y λ que aparecen en (108) y (109) y los otros parámetros constantes μ_1 y μ_2 definido en las Ecs. (123) y (124). Encuentra Jacobi [10] las relaciones

$$\mu_1 = 2K(k) - \lambda - \mu\,, \quad \mu_2 = \mu - \lambda\,, \tag{132}$$

donde $K(k)$ es la integral elíptica completa de primera especie. La demostración hace uso de las fórmulas de adición de las funciones elípticas de Jacobi (87-89). Algunos autores escriben $\mu_1 = \lambda + \mu$, que es más elegante, pero aunque para las funciones sn y dn no hay diferencia, para la función cn hay un cambio de signo.

Apéndice 1. Propiedades elementales de las funciones de Jacobi

Las funciones elípticas satisfacen algunas identidades de uso frecuente en la teoría del caso de Euler. Dos identidades son

$$\mathrm{sn}^2(u,k) + \mathrm{cn}^2(u,k) = 1\,, \tag{A.1}$$

$$\mathrm{dn}^2(u,k) + k^2\mathrm{sn}^2(u,k) = 1\,. \tag{A.2}$$

También se deben conocer sus derivadas

$$\frac{d\,\mathrm{sn}(u,k)}{du} = \mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)\,, \tag{A.3}$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}(u,k)}{du} = -\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)\,, \tag{A.4}$$

y

$$\frac{d\,\mathrm{dn}(u,k)}{du} = -k^2\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k)\,, \tag{A.5}$$

Apéndice 2. Coordenadas esferoconales

En este apéndice se escriben ecuaciones que se anuncian o se usan en el texto, pero que no se escribieron en el mismo, o se escribieron en otra forma. Su demostración se basa en las ecuaciones del apéndice 1 o en otras ecuaciones del texto. En todos los casos se refiere a las coordenadas utilizadas en el método de separación de variables.

Escribo primero las propiedades de ortogonalidad de vectores:

$$0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\,. \tag{B.1}$$

El cuadrado de la magnitud de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = \mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1)\,, \tag{B.2}$$

La contracción de la inversa de la matriz de inercia con los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{I}^{-1}\cdot\mathbf{e}_2 = 0\,, \tag{B.3}$$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{I}^{-1}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathcal{P}_1(\phi_1)(\mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1))\,, \tag{B.4}$$

$$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{I}^{-1}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathcal{P}_2(\phi_2)(\mathcal{P}_2(\phi_2) - \mathcal{P}_1(\phi_1))\,, \tag{B.5}$$

* Trabajo dedicado a la memoria de Leonard Euler en el tercer centenario de su nacimiento.

1. E. Piña , *Dinámica de Rotaciones* (UAM-Iztapalapa, México, 1996).
2. E. Piña, *Am. J. Phys*, **51** (1983) 375.
3. E. Piña, *Rev. Mex. Fís.*, **39** (1993) 10.
4. E. Piña, *Rev. Mex. Fís.*, **43** (1997) 205.
5. P.H. Morse y H. Feshback, *Methods of Theoretical Physics* (Mc. Graw-Hill, New York, 1953) p. 659.
6. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1976).
7. E. Piña, *Journal of Molecular Structure (Theochem)* **493** (1999) 159.
8. E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge University Press, 1965).

9. G. Bautista, E. Soto y E. Piña, *Rev. Mex. Fís.*, **49** (2003) 275.
10. C.G. Jacobi, *Gesamelte Werke* (Chelsea, New York, 1969) Vol. II, p. 476.
11. J.V. José y E.J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, 1998).
12. J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique, Oeuvres* (Gauthier Villars, París, 1889) Vol XII, p. 251.
13. G.L. Lamb Jr., *Elements of Soliton Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1980).
14. E. Piña y S.M.T. de la Selva, *The Oseen's Spiral Flow*, en *Developments in Mathematical and Experimental Physics* (A. Macías, F. Uribe y E. Díaz eds., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003) Vol. C, p. 79-86.
15. K. Yamada y S. Shieh, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1584.