# Campos eléctricos generados por elipsoides uniformemente polarizados

C.E. Solivérez
*Suiza 1096, 8400 Bariloche (Río Negro), Argentina,*
*e-mail: csoliverez@gmail.com*

Recibido el 24 de junio de 2008; aceptado el 29 de julio de 2008

Se expresan los campos eléctricos $\vec{E}(\vec{r})$, dentro y fuera de elipsoidales uniformemente polarizados, en términos de integrales elípticas y sin necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. Las expresiones son válidas para materiales homogéneos cualesquiera, sean isótropos o anisótropos, sean electretos, dieléctricos o conductores. Se dan las expresiones explícitas del campo inducido $\vec{E}(\vec{r})$ para esferas dieléctricas y conductoras inmersas en campos aplicados constantes y uniformes.

*Descriptores:* Electrostática; ecuaciones de Poisson y Laplace; problemas de límite-valor.

The electric fields $\vec{E}(\vec{r})$, inside and outside uniformly polarised ellipsoidal electrets, dielectrics and conductors, is given in terms of elliptic integrals. The derivation, valid for homogeneous isotropic and anisotropic materials, makes no recourse to differential equations. The full expression of the $\vec{E}(\vec{r})$ induced for spherical bodies embedded in uniform aplied constant electric fields, either dielectrics or conductors, is explicity given.

*Keywords:* Electrostatics; Poisson and Laplace equations; boundary-value problems.

PACS: 41.20.Cv

## 1. Introducción

Los libros introductorios de electricidad rara vez discuten el problema de la electrificación de cuerpos finitos. La razón es la dificultad del cálculo de distribuciones de campos eléctricos generados por materiales cuyo estado de polarización depende de la misma configuración final de estos campos. Por tratarse de un problema que debe resolverse de modo autoconsistente (la polarización de una porción de materia depende de los campos de la materia restante y ésta depende a su vez de los campos que genera esa porción), se deja usualmente para cursos avanzados donde se resuelven las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales de Maxwell por el método de separación de variables. Entre los pocos cuerpos detalladamente discutidos en los textos elementales se cuentan las láminas de espesor constante y extensión infinita y los cilindros rectos de sección circular y longitud infinita, siempre para materiales homogéneos e isótropos. La esfera, el cuerpo finito más simple, sólo se resuelve con ecuaciones diferenciales. Resulta entonces que sólo en los cursos más avanzados de electromagnetismo, usualmente no tomados por ingenieros, es posible trabajar con cuerpos reales (finitos) y discutir importantes comportamientos de interés técnico, como el análisis de las condiciones en que su polarización puede ser uniforme, los efectos de la anisotropía (materiales cristalinos) y el comportamiento de conductores finitos en presencia de campos aplicados uniformes.

La principal razón de la dificultad para resolver casos más realistas es que los cursos introductorios de electricidad se dictan usualmente antes de que los estudiantes conozcan los métodos del análisis vectorial. La situación está cambiando en las universidades donde los cursos de electricidad y magnetismo se dictan inmediatamente a continuación de los de análisis vectorial. Esto permite tanto dar demostraciones generales rigurosas de las propiedades electromagnéticas de la materia (en vez de los usuales casos especiales que sólo ilustran la plausibilidad de las leyes invocadas) como resolver sin necesidad de ecuaciones diferenciales el único caso conocido de cuerpos finitos cuya polarización eléctrica es uniforme, los elipsoides generales, problema este último que resolvemos detalladamente en este trabajo.

## 2. Cuerpos con polarización permanente

El potencial eléctrico $V$ generado por un volumen $v$ de dieléctrico con polarización uniforme $\vec{P}$ es

$$V(\vec{r}) = k_1 \iiint_v \frac{\vec{P}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d^3\vec{r} = k_1\, \vec{P}\cdot \iiint_v \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d^3\vec{r}, \qquad (1)$$

donde $k_1 = 4\pi/\varepsilon_0 = 10^{-7}c^2$ en el Sistema Internacional (SI)[1], donde $c$ es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío y $d^3\vec{r}$ es el elemento diferencial de volumen. Como

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3},$$

donde el gradiente se toma respecto de la variable vectorial $\vec{r}$, se puede reescribir (1) de la forma:

$$V(\vec{r}) = -\hat{P}\cdot\nabla\phi(\vec{r}), \quad \text{donde}$$
$$\phi(\vec{r}) = k_1 \iiint_v \frac{P}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}, \qquad (2)$$

donde $\hat{P}$ es el versor adimensional en la dirección y sentido de $\vec{P}$, $\hat{P}\cdot\nabla$ es el operador derivada en la dirección $\hat{P}$y $\phi(\vec{r})$

es —salvo una diferencia de unidades[i]—el potencial eléctrico generado cuando el volumen $v$ está cargado con densidad de carga uniforme $P/[l]$[ii]. Este mismo resultado puede obtenerse mediante la superposición de dos distribuciones de carga uniforme $Q$ idénticas cuya distancia $a$ se hace tender a 0 mientras se mantiene constante el producto $Q \cdot a = P$ (definición matemática de dipolo puntual).

De la relación entre campo y potencial eléctrico se tiene que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\nabla \left[ (\hat{P} \cdot \nabla)\phi(\vec{r}) \right]. \tag{3}$$

Para simplificar la escritura de las ecuaciones posteriores definimos

$$I(\vec{r}) = \frac{\phi(\vec{r}) \cdot [l]}{k_1 P} = \iiint_v \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3\vec{r}', \tag{4}$$

lo que permite simplificar mucho los cálculos al remitirnos al problema más simple del cálculo de $\phi$. Explicitando las derivadas se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= k_1 \sum_\alpha \hat{x}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_\beta \frac{\partial I(\vec{r})}{\partial x_\beta}\, \hat{x}_\beta \cdot \vec{P} \\ &= k_1 \sum_\alpha \hat{x}_\alpha \sum_\beta \frac{\partial^2 I(\vec{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\, P_\beta, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\hat{x}_\beta$ es el versor del eje coordenado $x_\beta$, con $x_\beta = x, y, z$. Las componentes del campo eléctrico son entonces[2]

$$E_\alpha(\vec{r}) = -4\pi k_1 \sum_\beta n_{\alpha\beta}\, P_\beta, \quad \text{donde}$$

$$n_{\alpha\beta}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 I(\vec{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{6}$$

El tensor adimensional de componentes $n_{\alpha\beta}$ fue originalmente introducido para la resolución de problemas de magnetización[3] donde se lo denomina *tensor demagnetización*. Su aplicabililidad a problemas tanto de polarización eléctrica como magnética, donde caracteriza los efectos de depolarización provenientes de la forma del cuerpo, justifica el uso de un nombre más general, como el de **tensor depolarización** que se usará aquí. Se introduce el factor $-1/4\pi$ en la definición para que su traza valga la unidad (véase la sección **Propiedades del tensor depolarización**).

Es más fácil calcular $\vec{E}(\vec{r})$ en notación matricial. Para ello se reescriben los vectores como matrices columna y el tensor depolarización como una matriz cuadrada, dando

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} n_{xx}(\vec{r}) & n_{xy}(\vec{r}) & n_{xz}(\vec{r}) \\ n_{yx}(\vec{r}) & n_{yy}(\vec{r}) & n_{yz}(\vec{r}) \\ n_{zx}(\vec{r}) & n_{zy}(\vec{r}) & n_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}. \tag{7}$$

En esta notación la Ec. (6) se escribe simplemente de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = -4\pi\, k_1 \mathbf{n}(\vec{r}) \cdot \vec{P}$, o más explícitamente,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -4\pi k_1 \begin{pmatrix} n_{xx}(\vec{r}) & n_{xy}(\vec{r}) & n_{xz}(\vec{r}) \\ n_{yx}(\vec{r}) & n_{yy}(\vec{r}) & n_{yz}(\vec{r}) \\ n_{zx}(\vec{r}) & n_{zy}(\vec{r}) & n_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Se ve así que el problema del cálculo del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ producido por un volumen $v$ de materia con polarización uniforme $\vec{P}$ se ha reducido al cálculo del tensor depolarización $\mathbf{n}(\vec{r})$. Este tensor se obtiene a partir del potencial generado por una densidad de carga $\rho = P/[l]$ uniformemente distribuida en el volumen $v$. En todos los casos donde este potencial pueda expresarse analíticamente (caso de los elipsoides generales), se puede también expresar el campo eléctrico generado por ese volumen cuando tiene polarización eléctrica uniforme.

## 3. Propiedades del tensor de polarización

Se dan a continuación, sin demostración, propiedades de **n** que pueden deducirse de su definición[4]:

- El tensor depolarización es simétrico: $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}$.
- La traza del tensor depolarización vale 1 dentro del volumen $v$ y 0 afuera:

$$\text{Tr n} = n_{xx}(\vec{r}) + n_{yy}(\vec{r}) + n_{zz}(\vec{r}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \vec{r} \in v \\ 0 \text{ si } \vec{r} \notin v \end{cases}.$$

- Cuando el volumen $v$ es un elipsoide general[5]:
  - Los valores de las componentes del tensor depolarización, que denominamos N, son constantes para todos los puntos interiores a $v$. No sucede lo mismo en los puntos exteriores a $v$, donde $\mathbf{n}(\vec{r})$ no es constante [Ec. (12)]. Los valores de N derivados de la Ec. (6) pueden expresarse en términos de integrales elípticas[6].
  - De la Ec. (8) se ve que el campo eléctrico generado por la polarización es uniforme en el interior de elipsoides, pero que ambos vectores no son en general paralelos. Este fenómeno, bien conocido en el campo de experimentos con materia magnéticamente polarizada, se denomina anisotropía de forma.
  - El tensor depolarización interior **N** es diagonal en el sistema cartesiano de coordenadas coincidente con los ejes principales del elipsoide de semiejes $a_1$, $a_2$ , $a_3$ y ecuación

$$(x/a_1)^2 + (y/a_2)^2 + (z/a_3)^2 = 1.$$

  - Los términos diagonales son entonces, como se demuestra en cualquier curso de teoría de matrices, los autovalores de **N**.

- Si dos semiejes del elipsoide son iguales, los autovalores correspondientes de **N** también lo son.
- Cuando un semieje tiende a $\infty$, el correspondiente autovalor de **N** tiende a 0.

## 4. Tensor depolarización de una esfera

Se calcula a continuación el tensor depolarización de la esfera, el cuerpo finito de máxima simetría. Para ello se evalúa el potencial $\phi$ dado por la Ec. (2). Si el radio de la esfera es $R$, su carga total es $Q$ y se toma el origen del sistema de coordenadas cartesianas en el centro de la esfera, del teorema de Gauss de la electrostática se obtiene[7]:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{k_1 Q}{R^3} r & \text{si} \quad r \leq R, \\ \dfrac{k_1 Q}{r^2} & \text{si} \quad r \geq R. \end{cases} \tag{9}$$

El campo eléctrico es radial y de sentido saliente de la esfera cuando $Q$ es positivo. Su módulo $E(r)$ es función sólo del módulo $r$ del vector posición $\vec{r}$. Como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\,\hat{r} = E(r)\,\hat{r},$$

se puede integrar $\partial V(r)/\partial r = -E(r)$ para obtener

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{k_1 Q}{2R^3} r^2 & \text{si} \quad r \leq R, \\ \dfrac{k_1 Q}{r} & \text{si} \quad r \geq R. \end{cases} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que $v = (4\pi/3)R^3$, $Q = \rho \cdot v$, $\rho = P/[l]$, $Q = (4\pi/3)R^3(P/[l])$, donde $v$ es el volumen de la esfera, se obtiene, de la Ec. (4),

$$I(r) = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{3} r^2 & \text{si} \quad r \leq R, \\ \dfrac{v}{r} & \text{si} \quad r \geq R. \end{cases} \tag{11}$$

Utilizando la definición de **n** [Ec. (6)] se obtiene finalmente

$$\mathbf{N}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{1},$$
$$\mathbf{n}(\vec{r}) = -\frac{v}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3x\cdot y}{r^5} & \frac{3y\cdot z}{r^5} \\ \frac{3x\cdot y}{r^5} & \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3z\cdot x}{r^5} \\ \frac{3y\cdot z}{r^5} & \frac{3z\cdot x}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

donde **N** es el tensor depolarización interior ($r \leq R$), **1** es la matriz unidad y **n** el tensor depolarización exterior ($r \geq R$). Nótese que Tr **N** = 1 y Tr **n** = 0, como corresponde a las propiedades generales enunciadas. El campo eléctrico exterior a la esfera es exactamente el de un dipolo puntual con momento dipolar eléctrico $\vec{p} = v \cdot \vec{P}$.

Usando las Ecs. (8) y (12) se obtiene la expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ generado por una esfera con polarización uniforme $\vec{P}$ cuando no hay aplicado un campo externo. Para que la expresión resultante resulte familiar se ha remplazado la polarización eléctrica $\vec{P}$ por el momento dipolar eléctrico $\vec{p} = v \cdot \vec{P} = (4\pi/3)R^3\vec{P}$, obteniéndose finalmente

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{4\pi\, k_1}{v}\mathbf{n}(\vec{r}) \cdot \vec{p} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi k_1}{3}\vec{p} & \text{si} \quad r \leq R, \\ -4\pi k_1 \begin{pmatrix} \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3x\cdot y}{r^5} & \frac{3y\cdot z}{r^5} \\ \frac{3x\cdot y}{r^5} & \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3z\cdot x}{r^5} \\ \frac{3y\cdot z}{r^5} & \frac{3z\cdot x}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} & \text{si} \quad r \geq R \end{cases} \tag{13}$$

Para $r \leq R$ el campo obtenido corresponde al llamado campo de Lorentz[8], cuyo valor se calcula usualmente mediante la expresión integral del campo eléctrico para densidades superficiales de cargas de polarización. Usando la relación

$$(3x^2 - r^2)p_x + 3x\,y\,p_y + 3x\,z\,p_z = 3x\,\vec{p}\cdot\vec{r} - r^2 p_x$$

y las ecuaciones análogas para cada fila del producto matricial $\mathbf{n}\cdot\vec{p}$, se puede reescribir la expresión del campo exterior exclusivamente en término de vectores:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{4\pi k_1}{v}\mathbf{n}(\vec{r})\cdot\vec{p} = k_1\frac{3\vec{r}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}}{r^5} \quad si \quad r \geq R. \tag{14}$$

Este campo corresponde exactamente al de un dipolo puntual de momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ situado en el origen de coordenadas[9].

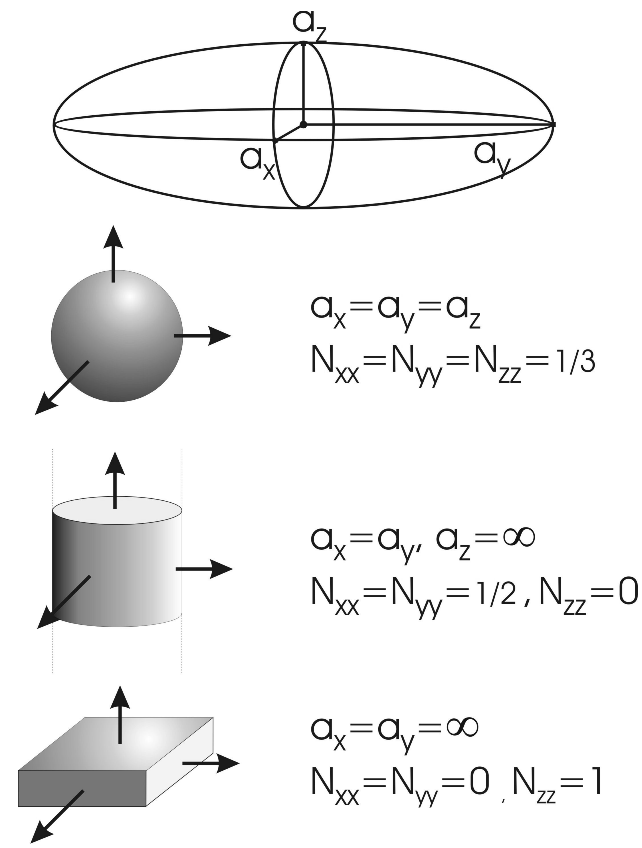


FIGURA 1.

## 5. Cálculo de n a partir de sus propiedades

En casos de alta simetría, o cuando alguno de los semiejes tiende a $\infty$, el valor del tensor depolarización interior **N** puede obtenerse sin necesidad de evaluar ninguna integral. Para ello basta utilizar algunas de las propiedades antes enunciadas, todas cumplidas por la Ec. (12):

- **N** es diagonal cuando el sistema de coordenadas cartesiano coincide con los ejes principales del elipsoide, cuyos semiejes denotamos con $a_x$, $a_y$ y $a_z$.
- La traza de **N** vale siempre 1.
- Si dos semiejes del elipsoide son iguales, los autovalores correspondientes de **N** también lo son.
- Cuando el valor de un semieje tiende a $\infty$, el correspondiente autovalor de **N** tiende a 0.

Usando estas propiedades se pueden calcular fácilmente los valores de **N** correspondientes a una esfera, un cilindro infinitamente largo de sección circular y una lámina de espesor finito y extensión indefinida. Los resultados se ilustran en la Fig. 1.

Es importante señalar que cuando uno o más semiejes divergen el tensor depolarización interior **N** sólo puede evaluarse tomando límites en la integral elíptica general (no dada aquí) o usando las propiedades de simetría precedentes. No es correcto en este caso usar el potencial derivado del teorema de Gauss de la electrostática. Como ejemplo de la aplicación de las propiedades señaladas, se calcula a continuación el tensor depolarización interior de una lámina dieléctrica de extensión indefinida y espesor finito $d$, donde se toma como $z$ el eje normal a la interfase dieléctrico-vacío. Como los semiejes $a_x$ y $a_y$ tienden a $\infty$, se tiene que $\mathrm{N}_{xx}$ = $\mathrm{N}_{yy}$ = 0. Por la regla de la traza se obtiene finalmente que

$$N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 1, \quad \text{es decir}, \quad N_{zz} = 1.$$

No hay ninguna propiedad general que permita simplificar de manera análoga el cálculo del tensor depolarización exterior. En este caso las únicas propiedades disponibles son

- $\mathrm{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \mathrm{n}_{\beta\alpha}(\mathbf{r})$;
- Tr **n** = 0.

Usando estas propiedades el número de componentes a evaluarse se reduce a 5, derivándose de éstas las cuatro restantes.

## 6. Polarización inducida

Por ser el conceptualmente más simple, se ha discutido hasta ahora sólo el caso de polarizaciones eléctricas permanentes, es decir, el de ferroeléctricos o electretos. En el caso de dieléctricos normales la polarización es generada por el mismo campo eléctrico aplicado. En el rango lineal se tiene entonces

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi \cdot \vec{E}(\vec{r}), \tag{15}$$

donde, salvo en el caso isótropo, la matriz susceptibilidad eléctrica $\chi$ no es múltiplo de la matriz unidad **1** (matriz no diagonal o diagonal con autovalores diferentes). Se considera aquí sólo el caso homogéneo ($\chi$ es una matriz constante independiente de las coordenadas) cuando se aplica un campo $\vec{E}_0$ uniforme en todo el volumen $v$. De la primera de las Ecs. (8) se obtiene entonces que para los puntos interiores al elipsoide

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 - 4\pi\, k_1 \mathbf{N} \cdot \chi \cdot \vec{E}(\vec{r}),$$

ecuación matricial (o sistema de ecuaciones lineales) que puede resolverse para el campo $\vec{E}(\vec{r})$. Se ve que el campo eléctrico interior es uniforme en $v$ y satisface la ecuación

$$(\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi) \cdot \vec{E} = \vec{E}_0, \quad \text{que invertida da}$$

$$\vec{E} = (\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi)^{-1} \cdot \vec{E}_0, \tag{16}$$

donde **1** es la matriz unidad y $(\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi)^{-1}$ es la matriz inversa de $(\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi)$. A partir de la Ec. (16) se obtiene la expresión completa del campo eléctrico de un elipsoide dieléctrico de susceptibilidad $\chi$ colocado en un campo aplicado uniforme $\vec{E}_0$. El campo eléctrico interior genera una polarización, también uniforme,

$$\vec{P} = \chi \cdot \vec{E} = \chi \cdot (\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi)^{-1} \cdot \vec{E}_0. \tag{17}$$

Esta polarización genera a su vez el campo exterior al elipsoide dado por Ec. (8), al que debe sumarse el aplicado, dando finalmente

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0 - 4\pi\, k_1 \mathbf{n}(\vec{r}) \cdot \vec{P} \\ &= [\mathbf{1} - 4\pi\, k_1 \mathbf{n}(\vec{r}) \cdot \chi \cdot (\mathbf{1} + 4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \chi)^{-1}] \cdot \vec{E}_0, \end{aligned} \quad (18)$$

donde la dependencia espacial (pero no la orientación cuando $\chi$ no es múltiplo de la matriz unidad) está exclusivamente determinada por $\mathbf{n}(\vec{r})$.

Es importante discutir ahora la hipótesis de polarización uniforme hecha al comienzo del trabajo. Cuando a un dieléctrico de forma arbitraria se le aplica un campo uniforme $\vec{E}_0$, la polarización inducida no será en general uniforme. Esto se debe a que el campo inductor en cualquier molécula del material es la composición del campo aplicado y el campo dipolar $\vec{E}_{\vec{P}}$ generado por las restantes moléculas. Maxwell demostró que $\vec{E}_{\vec{P}}$ sólo puede ser uniforme cuando la superficie límite del dieléctrico está descrita por una expresión algebraica de segundo grado en las coordenadas $x$, $y$, $z$[10]. La única superficie cerrada de este tipo es el elipsoide general, mientras que los casos límites de semiejes infinitos corresponden a superficies abiertas[iii]. Ésta es la razón por la cual el caso más simple en que un dieléctrico puede tener polarización uniforme es cuando tiene forma elipsoidal, y su polarización está entonces dada por la Ec. (17).

## 7. Esfera conductora en campo aplicado uniforme

La redistribución de cargas en conductores puede obtenerse como el caso límite en que la polarización de la materia puede producirse con total libertad de desplazamiento de las cargas eléctricas. En tal caso, todas las cargas se ubican en la superficie y ninguna en el interior. La polarización que resulta equivalente $\vec{P}$ puede calcularse sabiendo que en el estado de equilibrio en el interior del conductor el campo resultante debe ser nulo. Es decir, el campo generado por la distribución superficial de cargas debe cancelar exactamente el campo aplicado. Si $\vec{E}_0$ es el campo uniforme aplicado, se tiene entonces, por la adición de este campo al de polarización descrito por la Ec. (8)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 - 4\pi\, k_1 \mathbf{N} \cdot \vec{P} = 0, \quad \text{que permite despejar}$$

$$4\pi k_1 \mathbf{N} \cdot \vec{P} = \vec{E}_0. \quad (19)$$

Se obtiene $\vec{P}$ resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, que es equivalente a invertir la matriz **N**. Para una esfera metálica de radio $R$, donde **N** = **1**/3, la Ec. (19) da

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi k_1}\vec{E}_0, \quad \vec{p} = v \cdot \vec{P} = \frac{R^3}{k_1}\vec{E}_0, \quad (20)$$

donde $\vec{p}$ es el momento dipolar eléctrico de la esfera. El campo resultante en el exterior es la composición del campo aplicado con el campo dipolar dado por la Ec. (14). Se puede asimismo calcular la densidad superficial de carga $\sigma$ inducida sobre la superficie de la esfera usando la bien conocida fórmula

$$\sigma(\vec{R}) = \hat{R} \cdot \vec{P}, \quad (21)$$

donde $\hat{R}$ es el versor adimensional normal y saliente de la superficie de la esfera en el punto $\vec{R}$. Si se elige el sistema de coordenadas de modo que $\vec{P}$ coincida con el eje $z$ y $\theta$ es el ángulo que forma $\hat{R}$ con $z$, se obtiene $\sigma(\theta) = P\cdot\cos(\theta)$. Esto muestra que, como debe ser, $\sigma$ alcanza su valor máximo positivo en (0, 0, $R$), su máximo negativo en (0, 0, $R$) y se anula sobre el plano ecuatorial $z$ = 0.

---

*i*. La diferencia consiste en que el numerador debiera tener unidades de densidad de carga $[q]\cdot[l]^3$ (C/m$^3$ en SI) y tiene en cambio unidades de densidad de polarización $[q]\cdot[l]^2$ (C/m$^2$ en SI).

*ii*. $[l]$ es, en notación internacional, la designación de la unidad de longitud del sistema en uso.

*iii*. Según el conocimiento del autor, no parece haber sido estudiado el caso en que el cuerpo está delimitado por la intersección de dos o más superficies diferentes de segundo grado.

1. Los correspondientes a otros sistemas de unidades pueden obtenerse de John David Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York 1962) p. 616.
2. La versión magnética de este resultado fue publicado por primera vez por el autor en *IEEE Trans. Magn.* **17** (1981) 1363.
3. D. Landau y E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media* (London 1941), p. 26.
4. R. Moskowitz y E. Della Torre, *IEEE Trans. Magn.* **2** (1966) 739 y referencias allí dadas.
5. Las condiciones para que una función algebraica de segundo grado describa un elipsoide general están detalladamente discutidas en G.A. Korn y T.M. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers* (McGraw-Hill, New York, 1968) p. 79.
6. MacMillan, *The theory of the potential* (Dover, London 1958) p. 45.
7. Véase, por ejemplo, Young y Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics*, 10$^a$ edición (Addison-Wesley, EE. UU. 2000) p. 723.
8. Véase, por ejemplo, A.J. Dekker, *Solid State Physics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962) p. 42.
9. Véase, por ejemplo, J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Christy, *Foundations of electromagnetic theory* (Addison Wesley, Reading Mass., 1979) p. 39.
10. J.C. Maxwell, *A treatise on Electricity and Magnetism* (Dover Books, New York, 1954) Vol. 2, p. 66.