

Comportamiento periódico en sistemas oscilatorios de una y dos dimensiones

J.S. Pérez-Huerta

*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 48-3, Cuernavaca Mor., 62251 México,
e-mail: jsperez@fis.unam.mx*

C. Meneses-Fabián y G. Rodríguez-Zurita

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Apartado Postal 1152, Puebla, Pue. 72000 México,
e-mail: cmeneses@fcfm.buap.mx*

Recibido el 11 de febrero de 2008; aceptado el 4 de noviembre de 2008

En este trabajo se analiza el comportamiento periódico de sistemas mecánicos bien conocidos de una y dos dimensiones, como lo es la cuerda homogénea, la membrana cuadrada y la membrana circular. Bajo una configuración particular inicial de la posición y velocidad del sistema se estudia la evolución en el tiempo de la superposición de modos normales de oscilación que están presentes según los coeficientes correspondientes (de Fourier o de Bessel-Fourier). De la relación entre las diferentes frecuencias temporales de los modos normales presentes, se decide si el movimiento mecánico será periódico o no. Se muestran resultados numéricos de la evolución temporal de los sistemas, verificando si existe periodicidad en el movimiento compuesto.

Descriptores: Vibraciones y ondas mecánicas; modos normales; ondas estacionarias.

In this work, we study the temporal periodic behavior of well-known one and two-dimensional mechanical systems as the vibrating homogeneous string, vibrating square membrane and vibrating circular membrane. When an initial configuration of position and velocity of the system is imposed, the temporal evolution of the superposition of the natural modes of vibration is analyzed according to the non-zero Fourier or Bessel-Fourier coefficients. The relations between the temporal frequencies of the normal modes are used to verify the periodicity of the mechanical movement. Numerical results show the temporal evolution of the systems and the periodicity or non-periodicity of the composed movement is verified.

Keywords: Vibrations and mechanical waves; normal modes; standing waves.

PACS: 46.40.f; 43.20.Ks; 43.25.Gf

1. Introducción

El estudio de oscilaciones en sistemas físicos tiene una trayectoria robusta en libros de física básica [1]. Su importancia se basa principalmente en dos hechos:

- el carácter práctico y cotidiano del movimiento vibratorio, y
- la introducción de manera natural a las funciones especiales como solución a la ecuación de onda (aspecto matemático).

También es bien conocido el principio de superposición sobre sistemas lineales así como el aspecto periódico del movimiento oscilatorio (periodo de la oscilación). Sin embargo, cuando se consideran estos dos últimos conceptos de manera simultánea, es decir, cuando más de una vibración se encuentra presente en el sistema, se debe tener en cuenta si las diferentes frecuencias son o no conmensurables entre sí. Este criterio es fundamental para el presente trabajo. En particular, se analizan sistemas oscilatorios mecánicos bien conocidos, como son la cuerda homogénea, la membrana rectangular, y la membrana circular. Se revisa en qué casos es posible obtener una superposición de modos periódica y en cuales estrictamente no. Se presentan simulaciones numéricas de las membranas con el fin de ilustrar estos conceptos.

De manera general, los sistemas mecánicos oscilatorios comparten características tales como:

- poseen una estructura continua y uniforme,
- existen ciertas condiciones a la frontera que determinan el valor de la oscilación,
- están controlados por fuerzas restauradoras que son proporcionales a la separación de la posición de equilibrio (para sistemas lineales) [2].

En tales sistemas es la ecuación de onda, correspondiente a la simetría del sistema y características físicas tales como masa y dimensión, la que rige el comportamiento dinámico del sistema. Al resolver dicha ecuación se obtienen soluciones comúnmente denominadas modos normales de oscilación o modos naturales de vibración del sistema. Si la ecuación de onda es lineal, la superposición de dichos modos es a su vez solución. Las condiciones en la frontera y la ecuación de onda determinan la relación de dispersión. Sin embargo, sólo en sistemas unidimensionales dicha relación resulta relativamente simple, pero para los sistemas de dos y tres dimensiones, sus relaciones son numéricamente complicadas. Es por ello que vale la pena indagar sobre la periodicidad de la superposición de modos en sistemas de dos dimensiones. Se

comenzará con el caso de la cuerda homogénea en una dimensión, luego se tratará el caso de la membrana cuadrada y enseguida la membrana circular en dos dimensiones.

2. Los modos normales en la cuerda homogénea

Cuando se estudian las oscilaciones de una cuerda homogénea tensada sujeta por sus extremos, es posible demostrar que la solución general que se obtiene al superponer los modos normales de oscilación es [3,4]

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad (1)$$

para cuando la velocidad inicial de la cuerda es cero ($\dot{\psi}(x, t=0)=0$).

De acuerdo a las condiciones a la frontera y a la ecuación de onda, se obtiene la relación de dispersión

$$\frac{\omega_n}{k_n} = v = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}, \quad (2)$$

con τ_0 la tensión de la cuerda y ρ_0 la densidad de masa por unidad de longitud. Dadas las condiciones a la frontera, el número de onda k_n está cuantizado de acuerdo a

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3)$$

donde L es la longitud de la cuerda y n un número entero. Por tanto, la frecuencia de oscilación del modo n es

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} = n\omega_1. \quad (4)$$

Esto es, las frecuencias normales son números irracionales proporcionales a la frecuencia ω_1 . Como es claro, la función $\psi(x, t)$ de la Ec. (1) es una función periódica, con un periodo igual al del modo de frecuencia más baja.

Según el análisis de Fourier, los coeficientes A_n de la Ec. (1) se pueden determinar para cualquier función $f(x)$ continua por partes y nula en la frontera de la cuerda $f(x=0)=0$ y $f(x=L)=0$.

A manera de ejemplo se toman dos configuraciones iniciales en particular:

- a) la cuerda en forma de triángulo isósceles con base igual a la longitud L y altura h ; y
- b) la cuerda en forma de triángulo escaleno de base L , altura h y con proyección del vértice superior en $L/4$.

Ambas con velocidades iniciales nulas.

2.1. Cuerda con perfil inicial de triángulo isósceles

Supongamos que se tiene la cuerda sometida a una configuración inicial en forma triangular dada por

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & \text{si } 0 < x < L/2; \\ \frac{2h}{L}(L-x), & \text{si } L/2 < x < L, \end{cases} \quad (5)$$

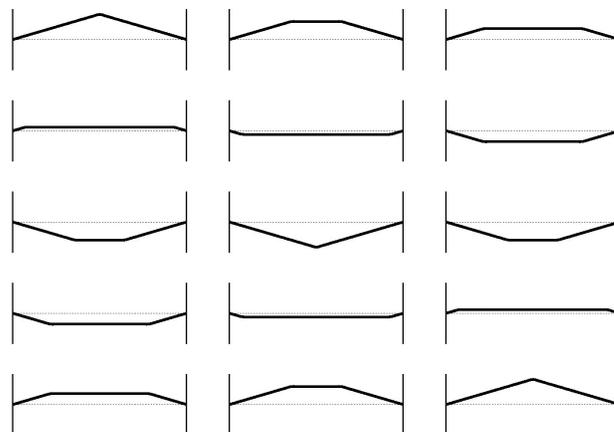


FIGURA 1. De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, se muestra la evolución temporal de la cuerda con la configuración inicial en forma de triángulo; cada toma presentada está separada por intervalos de tiempos iguales y de valor $\Delta T=T_1/14$.

donde h es la altura del triángulo. Haciendo el análisis de Fourier correspondiente, se tendrá que la forma que adopta la cuerda para tiempos posteriores está dada por

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad (6)$$

tomando también la velocidad inicial nula $\dot{\psi}(x, t=0)=0$. De esto, el modo más bajo ($n=1$) determina el periodo de la oscilación completa de la Ec. (6) de acuerdo a:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = L\sqrt{\frac{\rho_0}{\tau_0}}. \quad (7)$$

La evolución mostrada en la Fig. 1, revela que el perfil inicial se modifica hacia un trapecio que varía su altura y después de un tiempo igual a T_1 se reconfigura el perfil inicial propuesto. También para un tiempo igual a $T_1/2$, se obtiene el perfil inicial pero invertido respecto a la línea de equilibrio. En el cálculo numérico, elaborado en *Mathematica 6.0* y mostrado en la Fig. 1, se incluyeron los primeros 20 términos de la superposición (6). Resulta interesante señalar que aun al sumar los tres primeros modos, es posible intuir el comportamiento de la cuerda mostrado. Esto sugiere que la implementación experimental es posible.

2.2. Cuerda con perfil inicial de triángulo escaleno

De manera similar, se puede estudiar el caso en el que el vértice no se encuentre exactamente en el centro, por ejemplo a un cuarto de la longitud de la cuerda:

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} \frac{4h}{L}x, & \text{si } 0 < x < L/4; \\ \frac{4h}{3}(1 - \frac{x}{L}), & \text{si } L/4 < x < L. \end{cases} \quad (8)$$

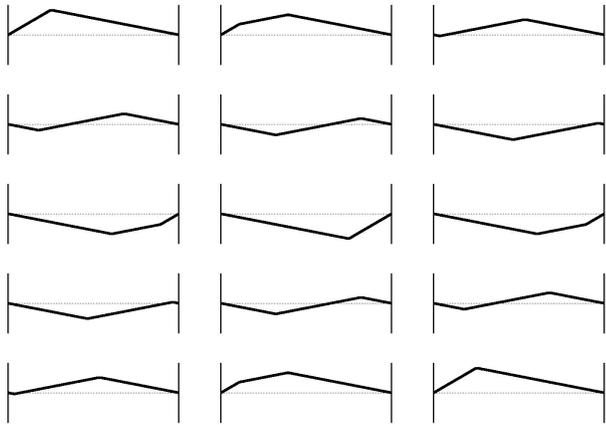


FIGURA 2. De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, se muestra la evolución temporal de la cuerda con la configuración inicial en forma de triángulo con vértice a $L/4$; cada toma presentada está separada por intervalos de tiempos iguales y de valor $\Delta T = T_1/14$.

En este caso, la serie de Fourier que determina los modos presentes y de ésta la evolución temporal de la cuerda es

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{3} \left(\frac{4}{n\pi} \right)^2 \times \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin(k_n x) \cos(\omega_n t); \quad (9)$$

aquí también el modo fundamental está presente y por ende el periodo del movimiento compuesto es el mismo que para el caso anterior ($T_1 = 2\pi/\omega_1$). Los términos numéricos que se consideraron para esta configuración fueron 38 modos no nulos.

Como se puede observar de los dos casos anteriores, el periodo es el mismo para las dos configuraciones. A pesar de que la forma de la cuerda no conserva la forma inicial, ésta evoluciona de tal modo que a medio periodo la forma de la cuerda se reconstituye (invertida y rotada) y después de un tiempo igual al periodo del modo más bajo, se reestructura la configuración inicial. Vale la pena señalar que debido a la linealidad que mantienen las eigenfrecuencias de la forma (4), es posible concluir que para este caso la superposición de modos resultará en un movimiento periódico sin importar la configuración inicial de la cuerda.

3. Los modos normales en la membrana cuadrada

De una manera muy parecida a la cuerda homogénea sujeta en los extremos, se tiene el caso de la membrana rectangular bidimensional elástica, la cual se encuentra fija en sus cuatro lados, con longitudes a y b . Del análisis adecuado se encuentra la solución general a la ecuación de onda superponiendo los modos normales de oscilación y considerando una velo-

cidad inicial nula [5]:

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \times \sin(k_m x) \sin(k_n y) \cos(\omega_{n,m} t). \quad (10)$$

En este caso, la relación de dispersión junto con la cuantización de k_m y k_n dice que

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} (k_m^2 + k_n^2)^{1/2} = v \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Más aún, con el fin de simplificar en lo posible la relación de dispersión (11), consideramos el caso de la membrana cuadrada $a=b$; con esto se tiene que

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} (k_m^2 + k_n^2)^{1/2} = \frac{v\pi}{a} (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad (12)$$

y desde luego la frecuencia temporal más baja corresponde a

$$\omega_{1,1} = \frac{\sqrt{2}v\pi}{a}. \quad (13)$$

De la Ec. (12) podemos observar que para los modos siguientes al más bajo (por ejemplo, $\omega_{1,2} = (\sqrt{5}v\pi)/a$, $\omega_{2,2} = (2\sqrt{2}v\pi)/a$, $\omega_{1,3} = (\sqrt{10}v\pi)/a$) es imposible cumplir con la condición de conmensurabilidad de manera estricta. Sólo algunas frecuencias en particular resultarán ser proporcionales (por ejemplo $\omega_{2,2}/\omega_{1,1} = 2$).

Ahora las frecuencias normales son, como en el caso unidimensional, también irracionales pero no son proporcionales entre sí. Se espera que $\Psi(x, y, t)$ de la Ec. (10) no sea periódica, como se muestra en los ejemplos siguientes:

Si se considera el análogo bidimensional de la función triangular dada por la Ec. (5) de modo que

$$\Psi(x, y, t = 0) = \psi(x, t = 0)\psi(y, t = 0), \quad (14)$$

Los coeficientes de Fourier y la superposición de modos de la Ec. (10) son

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{(n+m+2)}{2}} h \left(\frac{8}{mn\pi^2} \right)^2 \times \sin(k_m x) \sin(k_n y) \cos(\omega_{n,m} t). \quad (15)$$

Resulta interesante preguntarse sobre la periodicidad del movimiento de la membrana cuadrada para este caso, es decir, después de cierto tiempo, ¿será posible volver a tener la configuración inicial dada por (14)? Para ello nuevamente se implementó numéricamente la solución (15) con la ayuda de un programa elaborado en *Mathematica 6.0*. Se consideraron los primeros 225 términos de la doble sumatoria (15). Los resultados se muestran en la Fig. 3, y para el comportamiento en el tiempo de la membrana en la cual se ha impuesto como

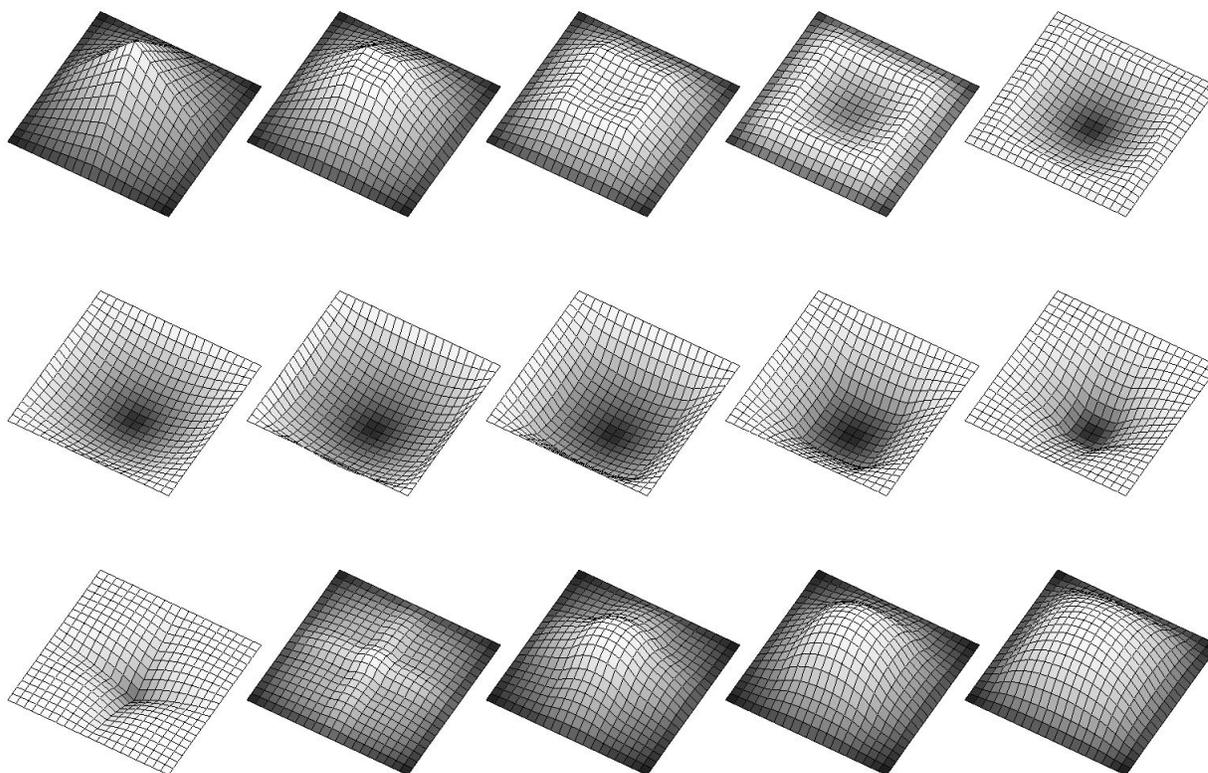


FIGURA 3. De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, se muestra la evolución temporal de la membrana cuadrada con la configuración inicial en forma de la función (15); cada toma presentada está separada por intervalos de tiempos iguales y de valor $\Delta T=T_{1,1}/14$.

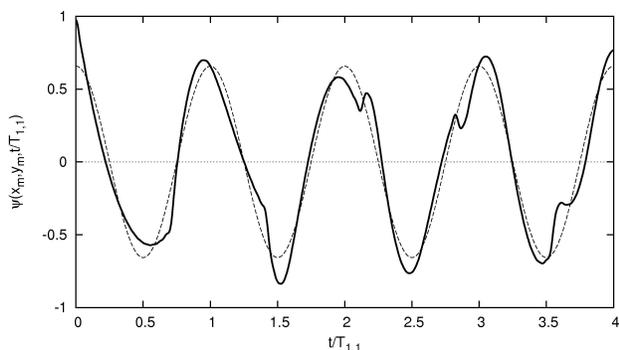


FIGURA 4. Movimiento en el centro de la membrana cuadrada respecto al tiempo. Se observa hasta un tiempo igual a $t = 4T_{1,1}$. También se muestra el comportamiento del modo de frecuencia más bajo en el mismo punto de la membrana (línea punteada).

condiciones iniciales en el tiempo que la posición sea aquella dada en (14) y la velocidad sea nula. Se muestra el progreso de $\Psi(x, y, t)$ hasta un tiempo igual al periodo del modo más bajo, que en este caso corresponde a $T_{1,1}=2\pi/\omega_{1,1}$, con $\omega_{1,1}$ dada en la Ec. (13). En cada figura, existe un incremento en el tiempo de $T_{1,1}/14$.

De la Fig. 3 se puede apreciar que la forma inicial de la membrana no se vuelve a reconstituir en dicho intervalo de tiempo, ni en ningún otro tiempo será posible obtenerlo nuevamente, ya que los modos no estarán en fase como se espera de la condición de conmensurabilidad entre cada frecuencia.

De manera general, se puede decir que la superposición (10), a pesar de estar constituida por modos normales periódicos, no presenta periodicidad en el tiempo como su análogo unidimensional dado por (1). Esto es una consecuencia directa de la forma funcional no lineal de la relación de dispersión (12).

Se puede estudiar el comportamiento en el tiempo en el centro de la membrana cuadrada, $x_m=a/2, y_m=a/2$, que se encuentra dado por

$$\Psi(x_m, y_m, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} h \times \left(\frac{8}{mn\pi^2}\right)^2 \cos(\omega_{n,m}t). \quad (16)$$

En la Fig. 4, se han usado los primeros 225 términos de la sumatoria (16). También se muestra el comportamiento, con línea punteada, del modo de frecuencia más bajo. Claramente se observa que el comportamiento se aparta de la oscilación armónica, o más aún, de cualquier movimiento periódico. La altura inicial (aquí se muestra normalizada) no se recupera en el intervalo de tiempo mostrado, ni a ningún otro.

Si bien no es periódica, ¿puede la membrana ser cuasi-periódica en el sentido de Bohr? En el apéndice se da una breve exposición sobre el concepto de cuasiperiodicidad. En otros términos, ¿es posible que exista un valor T tal que $|\Psi(x, y, t+T)-\Psi(x, y, t)| < \epsilon$ para toda epsilon? La respuesta a esta pregunta requiere cuidado, ya que la evolución

de la función $\Psi(x, y, t)$ a un tiempo $t+T$ no es igual para diferentes puntos (x, y) ; esto implica que ϵ es también función de la posición. Así que si se desea hacer la búsqueda de esta cota se debe realizar en algún conjunto continuo de puntos que pertenecen a la membrana. Aquí es importante mencionar que una elección cuidadosa de algunos de los modos normales puede producir una superposición completamente periódica, pero esta selección es muy restrictiva y no será suficiente para hacer un desarrollo de Fourier general.

4. Los modos normales en la membrana circular

Cuando una membrana elástica se tensa en un contorno con forma de circunferencia, como ocurre en un tambor, se encuentra que también existen modos normales de oscilación para esta simetría cuya superposición está dada por [6, 7]

$$\Psi(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{m,n} \sin(m\theta) + B_{m,n} \cos(m\theta)) J_m(k_{m,n}r) \cos(\omega_{m,n}t), \quad (17)$$

donde $m=0, 1, 2, \dots$, $J_m(x)$ es la función de Bessel de primera clase de orden entero, y la relación de cuantización para el vector de onda es

$$k_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{a}. \quad (18)$$

Aquí $\alpha_{m,n}$ es la n -ésima raíz de la función de Bessel de orden m y a es el radio de la membrana circular. La relación de

dispersión para este caso es

$$\omega_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{a} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \alpha_{m,n} \frac{v}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Para cualquier función $F(r, \theta)$ continua por partes y nula en la frontera $r=a$, la expresión (17), en virtud de que las funciones que la componen forman una base ortogonal y completa, se puede usar para representar dicha función (serie de Bessel-Fourier). En particular, si la distribución de desplazamientos es invariable respecto a rotaciones, $F(r, \theta)=F(r)$ y se sigue que sólo los términos con $m=0$ estarán presentes en la solución y por tanto con sólo una serie de Bessel-Fourier se podrá representar a la función

$$F(r) = \Psi(r, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,n} J_0(k_{0,n}r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,n} J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}r\right). \quad (20)$$

Es bien conocido el procedimiento para determinar los coeficientes $A_{0,n}$ a partir de las relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel. Por ejemplo, continuando con el caso análogo a la configuración triangular dada por la Ec. (5) para una membrana circular:

$$F(r) = h \left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad (21)$$

tiene como coeficientes de Bessel-Fourier a

$$A_{0,n} = \frac{2h}{(\alpha_{0,n})^3 (J_1(\alpha_{0,n}))^2} \int_0^{\alpha_{0,n}} J_0(u) du. \quad (22)$$

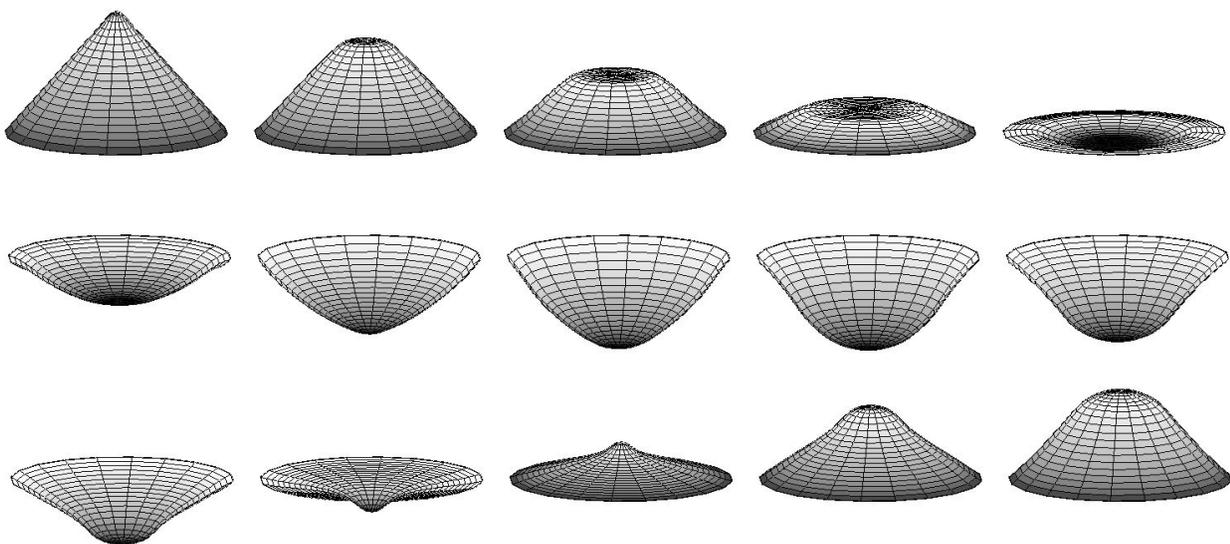


FIGURA 5. De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, se muestra la evolución temporal de la membrana circular con la configuración inicial en forma de cono circular; cada toma presentada está separada por intervalos de tiempos iguales y de valor $\Delta T=T_{0,1}/14$.

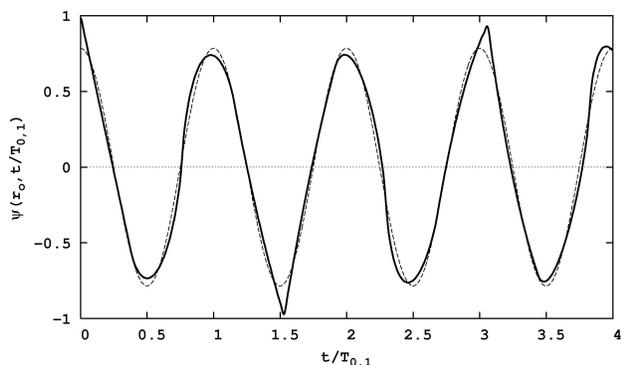


FIGURA 6. Movimiento en el centro de la membrana circular respecto al tiempo. Se observa hasta un tiempo igual a $t=4T_{0,1}$. También se muestra el comportamiento del modo de frecuencia más bajo en el mismo punto de la membrana (línea punteada).

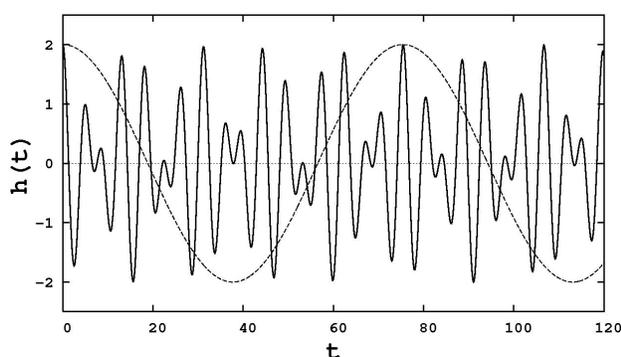


FIGURA 7. La función $h(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$ (línea sólida) no es periódica, pero sí es cuasi-periódica. En este caso se muestra uno de los cuasi-periodos mediante una función armónica con periodo $T=24\pi$ (Línea punteada).

Con ello, queda perfectamente establecido el movimiento de la membrana de la siguiente forma

$$\Psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,n} J_0 \left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r \right) \cos(\omega_{0,n} t). \quad (23)$$

El modo de frecuencia más baja de la anterior función es

$$\omega_{0,1} = \alpha_{0,1} \frac{v}{a}, \quad (24)$$

y por tanto el periodo de este modo es $T_{0,1} = 2\pi/\omega_{0,1}$. Las frecuencias de orden superior son proporcionales a las correspondientes raíces de la función de Bessel de orden cero. Como se sabe, estas raíces son números irracionales que no guardan relación de proporcionalidad numérica alguna entre ellas. Por lo tanto, el movimiento descrito por (23) [y de manera general, descrito por la Ec. (17)] no presentarán periodicidad y la forma inicial $\Psi(r, t=0)$ de la membrana no se volverá a presentar (Fig. 5). En libros de texto es común considerar sólo algunos dígitos de las raíces de Bessel con lo que se puede aproximar los cocientes de las frecuencias a números racionales [2]. En este cálculo se tomaron los 10 primeros términos de la sumatoria (23) y se le observa durante un intervalo igual a $T_{0,1}$.

Como ya se había señalado, la forma inicial de la membrana se pierde conforme pasa el tiempo y a ningún tiempo posterior se recupera.

Nuevamente, se puede estudiar el movimiento al centro de la membrana circular, $r_o=0$, que se encuentra dado por

$$\Psi(r_o, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,n} \cos(\omega_{0,n} t). \quad (25)$$

Se muestra también en la Fig. 6 con línea punteada la oscilación armónica del primer modo; ya que tiene el coeficiente mayor, el movimiento estará determinado en buena parte por este modo. Sin embargo, las contribuciones adicionales de los modos superiores modifican este comportamiento y lo convierten en un movimiento complicado no periódico. En la Fig. 6 se han usado los primeros 20 términos de la sumatoria (25) y se muestra el movimiento hasta un tiempo $t=4T_{0,1}$, es decir, 4 veces el tiempo mostrado en la Fig. (5), con lo que se sigue comprobando el comportamiento no periódico del movimiento.

5. Comentarios finales

A partir de diferentes sistemas mecánicos oscilatorios bien conocidos en la literatura, se han estudiado las implicaciones de la superposición de los modos naturales de cada sistema en la periodicidad del movimiento resultante. Para el sistema unidimensional de la cuerda elástica, se comprobó que es posible obtener nuevamente movimiento periódico cuando se considera una configuración inicial particular que involucra a todos los modos, pero no así para los casos bidimensionales como la membrana cuadrada y la membrana circular. Esta pérdida de la periodicidad se debe principalmente a que la relación de dispersión no es simple y no permite relaciones simples entre las diferentes frecuencias temporales. Mediante la implementación numérica de estos ejemplos, fue posible visualizar este tipo de comportamiento no periódico, que define la naturaleza de estos sistemas oscilatorios y condiciones iniciales arbitrarias.

Como trabajo posterior se busca hacer la implementación experimental de la superposición de modos en sistemas de una dimensión y de dos dimensiones (las membranas rectangulares y circulares) y poder observarla mediante métodos ópticos. Por ejemplo, se puede usar como membranas vibratorias a las películas de jabón y en dichos sistemas se deberán emplear técnicas no invasivas (como lo son las técnicas interferométricas o las de luz estructurada) con el fin de estudiar en detalle cuantitativo el movimiento y la topología de las superficies [8].

Aunque el estudio se enfocó a sistemas mecánicos bien conocidos, las discusiones sobre la periodicidad son de carácter general y se les puede aplicar a otros sistemas oscilatorios importantes, por ejemplo, a los modos electromagnéticos en una cavidad resonante (*Mode-locking*) o en sistemas cuánticos bidimensionales (la partícula confinada en el pozo

de potencial infinito). Así pues, el presente estudio se puede extender, con las debidas interpretaciones, a más campos de la física.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer los comentarios de Rafael Méndez Sánchez sobre la versión final de este trabajo. Este trabajo fue apoyado parcialmente por VIEP-BUAP (Número de referencia: 13/EXC/07) y PROMEP (Número de referencia: PROMEP/103.5/07/2594).

Apéndice

La cuasi-periodicidad de una función $h(t)$, en el sentido matemático según Bochner o Bohr (hermano de Niels Bohr), asegura que para cada $\epsilon > 0$, debe existir un cuasi-periodo $T(\epsilon)$, el cual cumple con $|h(t+T) - h(t)| < \epsilon$. En funciones estrictamente no periódicas, se tiene que $T \rightarrow \infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ [9].

Para periodos irracionales y no proporcionales, por ejemplo, si consideramos las funciones $\cos(t)$ y $\cos(\sqrt{2}t)$, se sabe que tienen periodo $T_1=2\pi$ y $T_2=\sqrt{2}\pi$, respectivamente.

Sin embargo, la función $h(t)=\cos(t)+\cos(\sqrt{2}t)$ no es periódica en el sentido que requiere la condición de conmensurabilidad. No obstante, es posible tratar con este tipo de superposiciones mediante el concepto de cuasi-periodicidad. Este tipo de tratamiento resulta extremadamente útil cuando las funciones son asequibles sólo mediante mediciones discretas y finitas, ya que los valores numéricos se conocen hasta cierto número de decimales. Para el ejemplo anterior, el irracional $\sqrt{2}$ se puede aproximar a dos decimales mediante el racional $17/12$ (menos del 0.2% de error), si esto es así $h(t) \approx \cos(t) + \cos([17/12]t)$, el periodo de esta suma es $\text{mcm}(2\pi, 24\pi/17)=24\pi$ [10, 11].

De la Fig. 7 se puede observar que el perfil de la función $h(t)$ a partir del cuasi-periodo $T=24\pi \approx 75.4$, es muy parecido al perfil a partir del origen. Este tipo de comportamiento suele presentarse cuando se realiza una medición de la superposición de dos excitaciones (por ejemplo, mecánicas, eléctricas), se puede entonces decir que se ha medido el “periodo” de la perturbación física resultante observada, sin considerar el aspecto de periodicidad que se ha estado discutiendo. Por ejemplo, la siguiente aproximación de $\sqrt{2}$ se puede tomar como $577/408$ y se deberá medir hasta un valor de t mayor al cuasi-periodo $T=816\pi \approx 2563.6$ para verificar esta cuasi-periodicidad.

-
1. F. Crawford, *Berkeley Physics course: Waves*, 3a edición (Reverté, Barcelona España, 1973) p. 3.
 2. S.P. Timoshenko y D.H. Young, *Problemas de vibración en ingeniería* (CECSA).
 3. G. Rodríguez Zurita, R. Alvarado Bustos, R. Alvarado Bustos y L.E. Zavala Ramírez, *Rev. Mex. Fís.* **47** (2001) 443.
 4. G. Rodríguez Zurita, R. Alvarado Bustos, R. Alvarado Bustos y L.E. Zavala Ramírez, *Rev. Mex. Fís.* **48** (2002) 463.
 5. A.P. French, *Vibraciones y ondas* (Reverté, 1988).
 6. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, 1953) Vol. I.
 7. E. Alvarado-Anell, M. Sosa y M.A. Moreles, *Rev. Mex. Fís. E* **51** (2005) 102.
 8. E. Arcos, *et al.*, *Am. J. Phy.* **66** (1998) 601.
 9. A.S. Besicovitch y H. Bohr, *Acta Mathematica* **57** (1931) 203.
 10. Fulks Watson, *Cálculo Avanzado* (Limusa, México, 1973).
 11. T.M. Apostol, *Calculus*, 2a. Edición (Reverté Mexicana, México, 1985) Vol. I.