

Un tratamiento alternativo para el análisis de la colisión elástica bidimensional no relativista entre dos esferas rígidas con parámetro de impacto dado

S. Díaz-Solórzano^{a,b} y L.A. González-Díaz^a

^aDepartamento de Matemáticas y Física, Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL,
Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela.

^bCentro de Investigación de Física y Matemáticas, CIMAFL,
AP47270. Caracas 1041-A, Venezuela.

Recibido el 19 de junio de 2008; aceptado el 6 de febrero de 2009

Presentamos un novedoso tratamiento para el cálculo de las velocidades después de la colisión elástica bidimensional de dos esferas rígidas con un parámetro de impacto dado. Para tal fin, definimos el vector de colisión \vec{A} , el cual es invariante ante transformaciones de Galileo. El vector \vec{A} conduce a una forma alternativa de la regla de colisión de Newton.

Descriptor: Colisión elástica; regla de colisión; parámetro de impacto; mecánica clásica.

We present a novel treatment for the calculation of the velocities after a two-dimensional elastic collision of two rigid spheres with impact parameter given. For that, we define the collision vector which is invariant under Galilean transformations. The vector gives an alternative form of Newton's collision rule.

Keywords: Elastic collision; collision rule; impact parameter; classical mechanics.

PACS: 01.55+b; 45.20df; 45.20dh; 45.50.Tn

1. Introducción

El tópico de colisiones elásticas, enmarcado en la conservación de la cantidad de movimiento y conservación de la energía cinética, suele ser tratado en los textos básicos [1–3] en forma elemental. Allí se consideran colisiones unidimensionales (colisiones frontales) y luego incorporan el tratamiento bidimensional (colisiones oblicuas) por separado, pudiéndose estudiar colisiones frontales como un caso particular de las colisiones oblicuas. Aun en textos avanzados se sigue esta estrategia de enseñanza y pocos [8] orientan al lector a una simplificación del problema. En tal sentido, consideramos existe un vacío. Para el análisis de colisiones elásticas oblicuas frecuentemente se enseña al estudiante una estrategia de resolución orientada a la descomposición cartesianas de la ley de conservación de la cantidad de movimiento, lo cual induce al estudiante a realizar operaciones algebraicas sin reflexionar sobre los aspectos básicos de la interacción; es decir, a las fuerzas involucradas en la interacción de los cuerpos que colisionan. Por consiguiente, en este trabajo se propone un formalismo para la búsqueda de las velocidades después de una colisión elástica para dos esferas rígidas en dos dimensiones con parámetro de impacto dado, sin hacer uso de coordenadas, analizando sólo el proceso de interacción durante la colisión.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2 se hace una breve descripción del parámetro de impacto y del proceso de interacción entre dos esferas rígidas; en la Sec. 3 se plantea un procedimiento vectorial para la obtención de las velocidades después de un choque elástico. En dicha sección se propone una forma alternativa y novedosa para la regla de colisión de Newton a través de la definición del vector de colisión \vec{A} . Finalmente, en la Sec. 4 se estable-

ce una técnica geométrica para la determinación del vector de colisión.

2. Parámetro de impacto entre dos esferas rígidas y el proceso de interacción durante la colisión

Para la colisión de dos objetos con extensión se debe tener en cuenta su geometría, por tal razón se introduce el *parámetro de impacto*, denotado por la letra b . La magnitud de esta cantidad indica la menor distancia entre dos rectas, tales que una de ellas queda determinada por la dirección de incidencia y la otra es paralela a ésta y pasa por el centro de la esfera que supondremos inicialmente en reposo (ver Fig. 1). En general, el parámetro de impacto se mide en un sistema de referencia relativo a una de las esferas. La dirección de incidencia queda determinada por una recta paralela a la velocidad relativa de las esferas en movimiento. En la Fig. 1 se muestra la situación previa a la colisión entre dos esferas con parámetro de impacto dado, donde se observa que el centro de la esfera de radio R_1 está por encima del centro de la esfera de radio R_2 ($b < 0$). Sin embargo, puede presentarse la situación donde los centros se encuentren sobre una misma línea ($b = 0$) o en la situación inversa a la descrita inicialmente ($b > 0$).

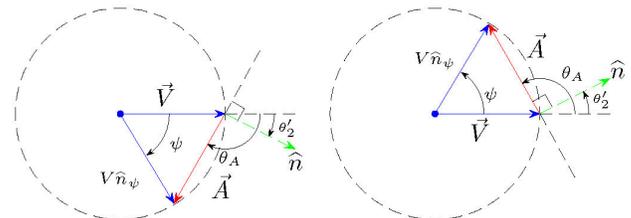


FIGURA 1. Parámetro de impacto b para la colisión de dos esferas.

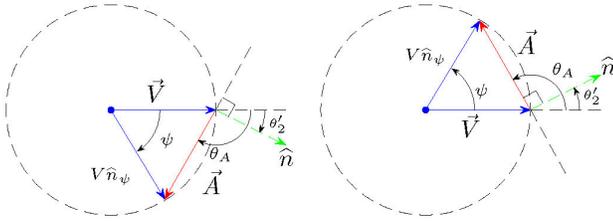


FIGURA 2. Colisión entre dos esferas, para el momento del contacto, con parámetro de impacto $b < 0$.

Durante el proceso de colisión elástica (Fig. 2), las esferas se pueden deformar y restituir en la dirección de la recta que une los dos centros y que pasa por el punto de contacto [9]. De esta manera, la fuerza de contacto será colineal a dicha recta y no cambiará de dirección durante el proceso de colisión. La fuerza que actúa sobre la esfera de radio R_1 debido al contacto con la esfera de radio R_2 se denota como \vec{N} . Del principio de acción y reacción, la fuerza que actúa sobre la esfera de radio R_2 es $-\vec{N}$ tal como se muestra en la Fig. 2. Así las únicas fuerzas involucradas en la interacción son internas.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el cambio del momento $\Delta\vec{p}'_1$ ($\Delta\vec{p}'_2$) de la esfera de radio R_1 (R_2) es paralelo (antiparalelo) a la fuerza de contacto \vec{N} como se muestra en la Fig. 2. El momento lineal $m_1\vec{U}'_1$ ($m_2\vec{U}'_2$) de la esfera de radio R_1 (R_2) después de la colisión forma un ángulo θ'_1 (θ'_2) respecto a la dirección de incidencia, además el momento $m_2\vec{U}'_2$ coincide con $\Delta\vec{p}'_2$, por estar inicialmente en reposo.

A partir de la geometría de la figura Fig. 2 se puede relacionar al ángulo θ'_2 , el cual describe la dispersión de la esfera de radio R_2 , con el parámetro de impacto b , mediante la siguiente expresión:

$$\sin\theta'_2 = \frac{b}{R_1 + R_2} \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta'_2 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

El ángulo θ'_2 es negativo para la situación mostrada en la Fig. 2, siendo positivo cuando el centro de la esfera de radio R_1 esté por debajo del centro de la esfera de radio R_2 , y nulo justo cuando ambos centros estén sobre la misma línea (en este caso el parámetro de impacto también es nulo). En particular, cuando el ángulo θ'_2 sea $-\pi/2$ ó $\pi/2$ la esfera de radio R_2 se dispersará formando un ángulo recto respecto a la dirección de incidencia. Según el valor del parámetro de impacto las colisiones se pueden clasificar en *frontales*, donde el parámetro de impacto se anula ($b = 0$) y las esferas presentan movimiento en una dimensión, y *oblicuas*, donde el parámetro de impacto es no nulo ($b \neq 0$) y las esferas se dispersan formando un ángulo entre sí.

3. Colisión elástica

Considere un sistema de referencia S , para el cual una esfera de masa m_1 y radio R_1 se dirige con parámetro de impacto b y velocidad \vec{V} hacia otra esfera de masa m_2 y radio R_2 que inicialmente está en reposo, tal como se muestra en la

Fig. 1. Sean \vec{U}'_1 y \vec{U}'_2 las velocidades de m_1 y m_2 , respectivamente, referidas al sistema S después de la colisión. En S la conservación de la cantidad de movimiento, así como la conservación de la energía, toman la forma [10]

$$\vec{V} = \vec{U}'_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{U}'_2, \quad (2a)$$

$$\vec{V}^2 = \vec{U}'_1{}^2 + \frac{m_2}{m_1}\vec{U}'_2{}^2. \quad (2b)$$

Para el caso bidimensional, este conjunto de ecuaciones contienen cuatro incógnitas, a saber, $|\vec{U}'_1|$, $|\vec{U}'_2|$, θ'_1 y θ'_2 , por lo que es necesario información adicional para poder hallar los valores de las incógnitas mencionadas. Puesto que el parámetro de impacto es dado, entonces es posible determinar mediante (1), el ángulo θ'_2 .

Para dar solución al problema, escribimos (2b) de la siguiente manera:

$$(\vec{V} - \vec{U}'_1) \cdot (\vec{V} + \vec{U}'_1) = \frac{m_2}{m_1}\vec{U}'_2 \cdot \vec{U}'_2.$$

A partir de (2a) se extrae la diferencia $\vec{V} - \vec{U}'_1$, que al sustituirse en la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} \vec{U}'_2 \cdot (\vec{V} + \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2) &= 0, \\ \hat{n} \cdot \vec{A} &= 0 \quad \text{con} \quad \hat{n} \equiv \vec{U}'_2, \end{aligned} \quad (3)$$

donde el *vector de colisión* se define como

$$\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 + \vec{V}. \quad (4)$$

Obsérvese que (3) representa la proyección del vector \vec{A} en la dirección donde ocurre el contacto entre las esferas. Esta proyección se corresponde con la regla de colisión de Newton para un choque elástico. Por otro lado, la expresión (3) es una forma alternativa del resultado presentado por Crawford [11].

El problema (2) puede ser replanteado en términos de la conservación de la cantidad de movimiento (2a), la regla de colisión de Newton para choque elástico (3) y la expresión (4). Con las expresiones (2a) y (4), se construye el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 = \vec{A} - \vec{V}, \\ \vec{U}'_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{U}'_2 = \vec{V}, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$\vec{U}'_1 = 2\vec{V}'_{CM} - \vec{V} + \frac{\mu}{m_1}\vec{A}, \quad (5a)$$

$$\vec{U}'_2 = 2\vec{V}'_{CM} - \frac{\mu}{m_2}\vec{A}. \quad (5b)$$

donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida de las esferas, \vec{V}'_{CM} es la velocidad del centro de masa en S y \vec{A} el vector de colisión, el cual depende de la ley de interacción entre las esferas.

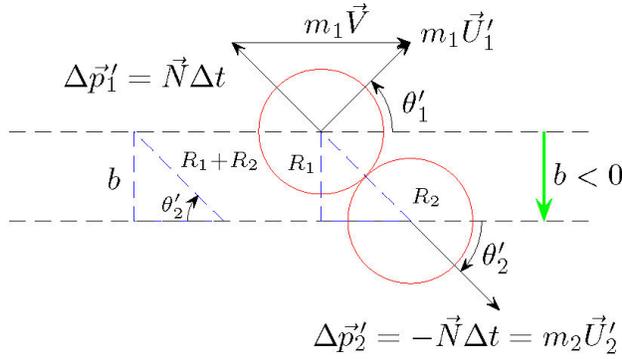


FIGURA 3. Construcción del vector de colisión \vec{A} con parámetro de impacto $b < 0$ (izquierda) y $b > 0$ (derecha).

Las velocidades mostradas en (5) pueden ser expresadas en el sistema de laboratorio (LAB), usando las transformaciones $\vec{U}'_i = \vec{U}_i - \vec{V}_2$; $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ y $\vec{V}'_{CM} = \vec{V}_{CM} - \vec{V}_2$ donde \vec{V}_i y \vec{U}_i son las velocidades antes y después de la colisión para la esfera i -ésima en el sistema LAB. Así,

$$\vec{U}_i = 2\vec{V}'_{CM} - \vec{V}_i + (-1)^{i+1} \frac{\mu}{m_i} \vec{A} \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (6)$$

quedando el vector de colisión \vec{A} inalterado por ser covariante galileana. La forma concreta de este vector se expone en la siguiente sección.

4. Vector de colisión

De la Ec. (3) se tiene que el vector de colisión \vec{A} es ortogonal a la velocidad de la esfera de masa m_2 después de la colisión, lo cual nos permite escribir

$$\vec{A} = \vec{B} - (\vec{B} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad (7)$$

donde el vector \vec{B} debe ser escogido de manera que la energía cinética se conserve en S [10]. Con las velocidades expresadas en (5) se determina la energía cinética después de la colisión, resultando

$$K' = \frac{1}{2} \mu [(\vec{A} - \vec{V})^2 + \frac{m_1}{m_2} \vec{V}^2]. \quad (8)$$

Sustituyendo (7) en la expresión (8), se obtiene

$$K' = K'_0 + \frac{1}{2} \mu \vec{A} \cdot (\vec{B} - 2\vec{V}),$$

observándose que la energía cinética se conserva si el último término se anula. Esto se logra de tres maneras diferentes: (I) el vector de colisión se anula ($\vec{A} = \vec{0}$), (II) eligiendo $\vec{B} = 2\vec{V}$ o (III) el vector de colisión es perpendicular al vector $\vec{B} - 2\vec{V}$. De la Ec. (3), en una dimensión, se tiene la restricción (I), coincidiendo con el resultado presentado por Millet [12]. En dos dimensiones, según (3), $\vec{B} - 2\vec{V}$ es proporcional a \hat{n} , por lo que la restricción (III) es equivalente a (II). Por consiguiente, al sustituir la condición (II) en (7) resulta

$$\vec{A} = \vec{V} - V \hat{n}_\psi, \quad (9)$$

donde se ha definido el *versor de incidencia* como

$$\hat{n}_\psi \stackrel{def}{=} (2\hat{V} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \hat{V} = 2 \cos \theta'_2 \hat{n} - \hat{V}. \quad (10)$$

El vector de colisión (9) puede interpretarse geoméricamente formando un círculo de radio $|\vec{V}|$ tal como se muestra en la Fig. 3. El ángulo del versor \hat{n}_ψ respecto a la dirección de incidencia es denotado por ψ , encontrándose en el semiplano inferior (superior) si $b < 0$ ($b > 0$) y sobre la dirección de incidencia cuando $b = 0$. El ángulo que forma el vector de colisión respecto a la dirección de incidencia es representado por θ_A . El objetivo es determinar las direcciones de los vectores \hat{n}_ψ y \vec{A} respecto de la dirección de incidencia.

Tomando los ángulos internos del triángulo isósceles circunscrito en el círculo de la Fig. 3 izquierda (derecha), se tiene que

$$|\psi| = 2|\theta_A| - \pi \quad (\psi = \pi - 2\theta_A), \quad (11)$$

y de acuerdo a la regla de colisión de Newton (3), el vector de colisión \vec{A} es perpendicular a \hat{n} , resultando que

$$2|\theta_A| = 2|\theta'_2| + \pi \quad (2\theta_A = \pi - 2\theta'_2). \quad (12)$$

Al sustituir (12) en (11), queda

$$\psi = 2\theta'_2. \quad (13)$$

Este resultado puede obtenerse analíticamente, eligiendo una base ortonormal derecha $\{\hat{V}, \hat{V}_\perp\}$ de manera que al sustituir $\hat{n} = \cos \theta'_2 \hat{V} + \sin \theta'_2 \hat{V}_\perp$ en (10), se obtenga

$$\begin{aligned} \hat{n}_\psi &= (2 \cos^2 \theta'_2 - 1) \hat{V} + 2 \sin \theta'_2 \cos \theta'_2 \hat{V}_\perp, \\ &= \cos 2\theta'_2 \hat{V} + 2 \sin 2\theta'_2 \hat{V}_\perp, \\ &= \cos \psi \hat{V} + \sin \psi \hat{V}_\perp, \end{aligned}$$

donde hemos tomado a ψ como $2\theta'_2$, observándose que el versor de incidencia queda representado gráficamente en el semiplano inferior (superior) del círculo mostrado en la Fig. 3 cuando $b < 0$ ($b > 0$).

5. Discusión

La técnica presentada aquí no requiere el uso de coordenadas para la obtención de las velocidades después de la colisión. Observándose que para colisiones unidimensionales ($b = 0$) el vector de colisión es nulo $\vec{A} = \vec{0}$; situación que se presenta en algunos textos [2, 6] cuando resuelven la conservación de la energía. En dichos textos, no se enfatiza que tal situación se satisface solamente en problemas unidimensionales, dando la ilusión de que la técnica empleada es de validez general. Para colisiones oblicuas ($b \neq 0$) la estrategia de enseñanza utilizada en diversos textos [1, 3] hace uso de la descomposición cartesianas de la conservación de la cantidad de movimiento, lo cual puede evitarse usando los resultados (6) y (9). La Ec. (6) pone de manifiesto el proceso de interacción en el

instante de la colisión. La Ec. (6) coincide con los resultados presentados en la Ref. 8, con la salvedad de que en ésta no se da, a diferencia del presente trabajo, una forma explícita del versor de incidencia \hat{n}_ψ . El proceso de linealización del

sistema de Ecs. (2) conduce naturalmente a la definición del vector de colisión \vec{A} , el cual resulta ser un invariante galileano y estar directamente conectado con la regla de colisión de Newton.

-
1. D. Holliday y R. Resnick, *Física, Primera parte* (Compañía Editorial Continental S.A., Mexico, 1984).
 2. I.V. Savéliev, *Curso de Física General, Tomo I* (Editorial MIR, Moscú, 1989).
 3. R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería, Volumen I* (International Thomson, México, 2005).
 4. M. Alonso y E.J. Finn, *Física, Volumen I* (Fondo Educativo Interamericano S.A., Caracas, 1976).
 5. K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley Publishing C.O., 1960).
 6. J. Norwood Jr, *Mecánica Clásica a Nivel Intermedio* (Editorial Prince-Hall International, Bogotá, 1981).
 7. R. Spiegel Murray, *Mecánica Teórica* (Mc Graw Hill, Caracas, 1989).
 8. L. Landau y E. Lifshitz, *Curso Abreviado de Física Teórica, Libro I* (Editorial MIR, Moscú, 1987).
 9. L. Tai Chow, *Classical Mechanics* (Editorial Jhon Wiley & Sons, New York, 1987).
 10. T. Jordan, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 676.
 11. F. Crawford, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 121.
 12. L. Edward Millet, *Phys. Teach.* **36** (1998) 186.