

## Revisión del efecto Kerr magneto óptico

A.J. Smith, D.E. Jaramillo y J. Osorio  
*Instituto de Física, Universidad de Antioquia,*  
*A.A. 12 26, Medellín, Colombia.*

Recibido el 23 de junio de 2008; aceptado el 1 de diciembre de 2008

En este trabajo hacemos una revisión didáctica de la deducción de los coeficientes de Fresnel para la reflexión de un rayo de luz polarizada en un medio magnetizado. Obtenemos las expresiones para la tangente del ángulo de Kerr en cada uno de los casos, polar y ecuatorial. Se muestra que el efecto magneto-óptico en el caso ecuatorial es dos órdenes de magnitud inferior al mismo efecto en el caso polar. Todo este tratamiento tiene validez para campos magnéticos aplicados inferiores a 10 T.

*Descriptores:* Efecto Kerr; efecto magneto-óptico; coeficientes de Fresnell.

In this work we review the deduction of Fresnell coefficient for the reflexion of polarized light over a magnetized medium. We obtained the expressions for the Kerr angle in both polar and equatorial case. It is shown that the effect polar magneto-optic effect is two order stronger than the equatorial. This treatment is only valid for magnetic field weaker than 10 T.

*Keywords:* Kerr effect; magneto-optic effect; Fresnell coefficients.

PACS: 42.25.Gy; 42.25.Lc

### 1. Introducción

Cuando un rayo de luz polarizada se refleja en la superficie de un material magnetizado, el plano de polarización puede rotar ligeramente. Este efecto es conocido como efecto Kerr magneto-óptico o MOKE, (*Magneto Optic Kerr Effect*); después que Kerr lo descubrió en el siglo XIX. Actualmente el efecto MOKE es ampliamente utilizado en la caracterización de películas delgadas de materiales ferromagnéticos.

Estudios recientes, usando esta técnica para analizar la magnetización estática en películas delgadas de hierro sobre arsenuro de indio, permiten calcular la anisotropía de la muestra haciendo una integral sobre la mitad del ciclo de histéresis medido. Comparando estos resultados con los obtenidos por otras técnicas como magnetometría de SQUID (*Superconducting Quantum Interference Device*) se encuentra un muy buen acuerdo [1].

Zivotsky *et al.*, encontraron fuertes diferencias en los resultados obtenidos por magnetometría de muestra vibrante para cintas de FeNbB de los obtenidos por MOKE. Estas medidas les permitieron detectar las contribuciones de las fases cristalina y amorfa en la superficies de las cintas. Estos resultados se verificaron con técnicas adicionales como rayos X (XRD, *X Ray Diffraction*) y espectroscopia Mossbauer de electrones de conversión (CEMS, *Conversion Electron Mossbauer Spectroscopy*) [2].

Estudios de magnetización en muestras con patrones a escala nanométrica se pueden llevar a cabo gracias a la técnica del MOKE, como lo muestran los trabajos de Moutis [3] y Vavassori [4]; donde se pueden apreciar claramente los efectos de los patrones realizados sobre la película delgada en la magnetización de la muestra.

También es muy útil el MOKE para estudios con pulsos ultrarrápidos (100 pseg) como en el caso de Yu [5], donde estudian la modulación inducida ópticamente en la interacción

preferencial de bicapas ferromagnética/antiferromagnética (FM/AF) en su interfase, (*exchange bias*).

El montaje experimental para detectar el efecto MOKE es sencillo y se puede realizar en casi todos los laboratorios. Un diseño se puede ver en el trabajo de J. Lopez *et al.* [6]

Todo este conjunto de recientes aplicaciones del MOKE hacen de este fenómeno una herramienta muy útil para el estudio de casi toda la clase de materiales magnéticos en forma de películas delgadas y, por ende, es importante desarrollar todo el formalismo matemático involucrado. Revisando la literatura en busca de la deducción teórica del efecto MOKE, encontramos que la mayoría de los textos clásicos usados en los pregrados de física no tratan este fenómeno; sólo algunos textos más recientes comienzan a presentarlo a partir de todos los resultados obtenidos en muchos artículos de revistas internacionales [7, 8]. Finalmente, hemos sido remitidos a un par de artículos de finales del siglo XIX [9], donde en un lenguaje antiguo y oscuro se lleva a cabo la demostración de este importante fenómeno a partir de las ecuaciones de Maxwell. Por esta razón hemos rehecho los desarrollos dentro de lo posible de forma sencilla y con un lenguaje entendible para que sirva de referencia a aquellos interesados en la parte teórica del fenómeno MOKE.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2 se estudia detalladamente el comportamiento de la luz en un medio magnetizado, a partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm, encontrando matemáticamente las expresiones de las componentes de los campos eléctrico y magnético de la onda en el medio. En la Sec. 3 se halla la ley de Snell para los rayos que inciden desde el aire a los medios con magnetización, y se determinan las componentes de los campos electromagnéticos refractados en cada uno de los casos, polar y ecuatorial (o longitudinal). En la tercera parte se utilizan las condiciones de frontera para hallar los coeficientes de Fresnell de cada polarización asociados a las ondas

reflejadas en cada uno de los casos, polar y ecuatorial, para cuando la magnetización se halla en el plano de incidencia.

## 2. Campos E.M. en medios magnéticos

Para estudiar el efecto Kerr magneto-óptico, primero debemos saber cómo se comportan los campos eléctrico y magnético de una onda cuando ésta viaja a través de un medio que posee propiedades magnéticas. Para esto encontraremos las componentes de los campos eléctrico y magnético, a partir de las componentes de la corriente eléctrica, utilizando las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm.

Las ecuaciones de Maxwell en medios lineales homogéneos e isotropos se pueden escribir como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}_L + \mu \left( \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (4)$$

donde el subíndice  $L$  está para las densidades de carga y corriente libres,  $\epsilon$  y  $\mu$  son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente. El término  $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$  que acompaña a la corriente libre es llamada corriente de desplazamiento. Definiendo una corriente total como la suma de estas corrientes,

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5)$$

la Ec. (4) toma la forma simple de

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}. \quad (6)$$

De esa expresión se observa de forma directa que  $\vec{J}$  es de divergencia nula,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (7)$$

lo cual es otra forma de la ecuación de continuidad.

La conexión entre el campo eléctrico y la densidad de corriente  $\vec{J}$  está dada por la ley de Ohm:

$$\vec{J}_L = \sigma \vec{E}, \quad (8)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad del medio. En el caso en que el campo eléctrico del medio es debido a una onda electromagnética monocromática de frecuencia  $\omega$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , la corriente de desplazamiento es  $-i\epsilon\omega \vec{E}$  y la ley de Ohm para la corriente total se escribe

$$\vec{J} = \sigma' \vec{E}, \quad (9)$$

donde  $\sigma' = \sigma - i\epsilon\omega$  es la conductividad efectiva asociada a corrientes libres y de desplazamiento. En general, en la

expresión de Ohm (8) hay que incluir la fuerza por unidad de carga debida al campo magnético. En particular el campo magnético de la onda produce una fuerza sobre las cargas libres del orden  $v/c$  con respecto a la fuerza eléctrica. Debido a que las velocidades de arrastre  $v$  son muy pequeñas comparadas con  $c$ , este término se desprecia, pero cuando el medio está magnetizado la fuerza magnética será la responsable del efecto magneto-óptico. En medios fuertemente magnetizados la ley de Ohm se reescribe como

$$\vec{J}_L = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{\rho} \vec{J}_L \times \vec{M} \right), \quad (10)$$

donde  $\vec{M}$  es el campo magnético debido a la magnetización del medio y  $\rho$  es la densidad de carga asociada a las corrientes libres. En función de la densidad de corriente total, la Eq.(10) se puede escribir como

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma'} - \frac{1}{\rho'} (\vec{J} \times \vec{M}), \quad (11)$$

donde  $\rho' = \rho\sigma'/\sigma$  es la densidad de carga efectiva asociada a las corrientes libre y de desplazamiento.

La Ec. (11) junto con las Ecs. (2), (6) y (7) son suficientes para dar una descripción matemática satisfactoria del comportamiento de la luz en un medio magnético. De acuerdo a ellas en la aproximación de variaciones temporales pequeñas de la magnetización ( $|\partial \vec{M} / \partial t| \ll \omega |\vec{M}|$ ) las dependencias temporales de los campos  $\vec{J}$  y  $\vec{B}$  son de la misma forma que la del campo eléctrico, esto es,  $\vec{J}$ , y  $\vec{B} \sim e^{-i\omega t}$ .

Introduciendo el valor del campo eléctrico dado en (11) en la Ec. (2) se obtiene

$$\frac{1}{\sigma'} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \frac{1}{\rho'} (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{J} = i\omega \vec{B}. \quad (12)$$

Tomando el rotacional a esta expresión y teniendo en cuenta (6) y (7) obtenemos

$$-\frac{1}{\sigma'} \nabla^2 \vec{J} - \frac{1}{\rho'} (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \times \vec{J} = i\omega \mu \vec{J}. \quad (13)$$

Ésta es la ecuación diferencial que en última instancia debemos resolver. Una vez hallado  $\vec{J}$ , los campos eléctrico y magnético se obtienen a través de las Ecs. (11) y (12).

En el caso en que la magnetización del medio sea nula,  $\vec{M} = 0$ , la Ec. (13) toma la forma

$$-\nabla^2 \vec{J} = i\omega \mu \sigma' \vec{J}, \quad (14)$$

que tiene soluciones de onda plana  $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$  con  $\vec{J}_0$  arbitrario y  $k_0^2 = i\mu\omega\sigma + \omega^2\mu\epsilon$ . Esta última es la expresión usual para el número de onda en conductores. Suponiendo ondas planas para la corriente en presencia de magnetización, la Ec. (13) toma la forma

$$-k^2 \left( \frac{\sigma}{\rho} \vec{M} \cdot \hat{k} \right) \hat{k} \times \vec{J}_0 = (k^2 - k_0^2) \vec{J}_0. \quad (15)$$

Se ve ahora que los valores que puede tomar  $k$  no son independientes de la dirección de  $\vec{J}_0$ . Matemáticamente lo que se tiene es una ecuación de autovalores para el operador

$$\hat{k} \times = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Para hallar los autovalores y autovectores se puede proceder de la forma estándar, aquí lo haremos por simple inspección. En primera instancia  $\vec{k}$  es un autovector con autovalor nulo, pero éste no corresponde a una solución para la densidad de corriente puesto que por (7)  $\vec{J}_0$  es transverso,  $\vec{k} \cdot \vec{J}_0 = 0$ . Por tanto,  $\vec{J}_0$  debe ser una combinación de dos vectores ortonormales  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  perpendiculares a  $\vec{k}$ . Es fácil ver que las combinaciones  $\hat{e}_\pm = (\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)/\sqrt{2}$  son autovectores de  $\hat{k} \times$  con autovalores  $\mp i$ :

$$\hat{k} \times \hat{e}_\pm = \mp i \hat{e}_\pm, \quad (17)$$

donde  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}\}$  forman un conjunto dextrógiro de vectores ortonormales. Los vectores  $\hat{e}_\pm$  determinan dos modos de polarización circulares para la densidad de corriente. De esta forma, la ecuación para los posibles valores de  $k$  en cada uno de los modos de polarización de la onda provienen haciendo  $\vec{J}_0 = J_\pm \hat{e}_\pm$  en la Ec. (15) dando

$$k_\pm^2 = \frac{k_0^2}{1 \mp i\sigma/\rho \vec{M} \cdot \hat{k}}. \quad (18)$$

Las primas han desaparecido en (18) debido a que  $\sigma'/\rho' = \sigma/\rho$ . Usando (12) para cada uno de estos valores de la corriente  $\vec{J}$  obtenemos el valor del campo magnético de la onda:

$$\vec{B}_0 = \mp i \frac{J_\pm k_0}{\sigma' \omega} \sqrt{1 \mp i\sigma/\rho \vec{M} \cdot \hat{k}} \hat{e}_\pm. \quad (19)$$

Observamos que al igual que la corriente el campo magnético es transverso. De (11) se obtiene que el campo eléctrico, además de las componentes transversales, adquiere una pequeña componente longitudinal,

$$\vec{E}_0 = \frac{J_\pm}{\sigma'} \left\{ \left( 1 \mp i \frac{\sigma}{\rho} \vec{M} \cdot \hat{k} \right) \hat{e}_\pm \pm i \frac{\sigma}{\rho} (\hat{e}_\pm \cdot \vec{M}) \hat{k} \right\}. \quad (20)$$

De estas expresiones vemos que la contribución del campo magnético del medio  $\vec{M}$  viene pesada por el factor  $\sigma/\rho$ . Para los metales la conductividad es  $\sigma \sim 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ , mientras que la densidad de carga de sus portadores es aproximadamente  $\rho \sim 10^{10} \text{ C/m}^3$ , por tanto  $\sigma/\rho \sim 10^{-3} \text{ T}^{-1}$ . Los campos magnéticos más intensos producidos en el laboratorio no superan pocas decenas de Teslas, por lo tanto

$$\beta \equiv \frac{\sigma}{2\rho} M \ll 1, \quad (21)$$

entonces sólo las contribuciones a primer orden de la cantidad adimensional  $\beta$  serán apreciables. Así, por ejemplo, de (18)

los índices de refracción del medio para la ondas polarizadas a derecha e izquierda se pueden escribir como

$$n_\pm(\phi) = \frac{ck_\pm}{\omega} = n_0(1 \mp i\beta \cos \phi), \quad (22)$$

donde  $n_0 = ck_0/\omega$  es el índice de refracción en ausencia de magnetización.

Para dar una representación en coordenadas de las amplitudes  $\vec{J}_0$ ,  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$ , orientamos los ejes cartesianos de manera adecuada, colocando el eje  $z$  en la dirección  $\vec{M}$ , el vector  $\vec{k}$  en el plano  $(x, z)$  formando un ángulo  $\phi$  con  $-\hat{z}$  y  $\hat{e}_1$  en el plano  $(x, z)$ , de tal forma que  $\hat{e}_2$  esté en la dirección  $-\hat{y}$ , como se ve en la Fig. 1. En este sistema la magnetización, la dirección de propagación de la onda y los vectores de polarización se escriben

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \mp i \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Las amplitudes de los campos asociados a estas polarizaciones en este orden de aproximación se escriben

$$\vec{J}_0 = \frac{J_\pm}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \mp i \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_0 = \frac{J_\pm}{\sigma\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi \pm 2\beta i \\ \mp i + 2\beta \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}_0 = \mp i \frac{n_0}{c} \frac{J_\pm}{\sigma\sqrt{2}} (1 \pm \beta i \cos \phi) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \mp i \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Las expresiones anteriores junto con la fase  $\exp(i\vec{k}_\pm \cdot \vec{r} - \omega t)$ , dan una descripción matemática completa de la propagación de las ondas con polarización circular dentro de un medio que posee propiedades magnéticas. Las ondas polarizadas a izquierda y derecha se comportan de forma distinta en un medio con magnetización, esto se conoce como "birrefringencia circular" y fue primeramente propuesto por Maxwell para dar una explicación macroscópica del efecto magneto-óptico de Faraday.

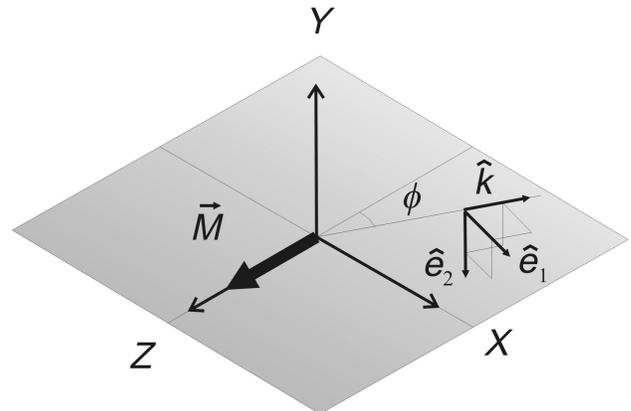


FIGURA 1. Sistema de referencia.

### 3. Ley de Snell para un medio magnético

Los rayos de una onda electromagnética plana que pasa de un medio a otro se refractan de acuerdo a la ley de Snell:

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2,$$

donde los  $n_i$  son los índices de refracción de cada medio y los  $\phi_i$  los ángulos respectivos que forman los rayos con la normal al plano de interfase. Para un medio magnetizado existirán, en general, dos índices de refracción  $n_+$  y  $n_-$ , uno para cada polarización circular, los cuales determinan 2 ángulos de refracción  $\phi_+$  y  $\phi_-$ :

$$n_1 \sin \phi_1 = n_{\pm}(\phi_{\pm}) \sin \phi_{\pm}. \quad (25)$$

La dependencia del índice de refracción con el ángulo está determinada por (22).

Si la magnetización es normal al plano de incidencia  $\cos \phi = 0$  y  $n$  es independiente del ángulo de incidencia,  $n_{\pm} = n_0$ , por lo tanto el medio no distingue la polarización. En medios lineales, homogéneos e isotrópicos la componente de la magnetización normal al plano de incidencia no contribuye a la birrefringencia. En otro tipo de medios esto puede ocurrir, dando lugar al llamado efecto MOKE transverso. Para la reflexión de ondas electromagnéticas en la superficie de medios lineales magnetizados se distinguen dos casos principales.

1. El caso polar, cuando la magnetización está sobre el plano de incidencia y es perpendicular al plano de interfase,
2. El caso ecuatorial o longitudinal, cuando la magnetización está sobre el plano de incidencia y es paralela al plano de interfase.

#### 3.1. Caso polar

En este caso la normal a la interfase se halla en la dirección  $+z$  (ver Fig. 2), por tanto, haciendo  $\phi = \phi_{\pm}$  en (22) y poniendo  $n_1 = 1$ , la Ec. (25) se escribe

$$\sin \phi_1 = n_0(1 \mp i\beta \cos \phi_{\pm}) \sin \phi_{\pm}.$$

Invirtiendo la expresión y considerando sólo correcciones a primer orden en  $\beta$  se tiene para el seno del ángulo refractado

$$\sin \phi_{\pm} = \sin \phi_0 \pm i\beta \sin \phi_0 \cos \phi_0, \quad (26)$$

y para el coseno

$$\cos \phi_{\pm} = \cos \phi_0 \mp i\beta \sin^2 \phi_0, \quad (27)$$

donde  $\phi_0 = \sin^{-1}(\sin \phi_1/n_0)$  es el valor del ángulo de refracción a orden cero.

#### Amplitudes de campo

Los campos originados en el medio 2 provienen de la refracción, por tanto dependen directamente de la polarización y del ángulo de refracción. Haciendo  $J_{\pm}/\sigma' = E_{\pm}$  en (24) con  $\phi = \phi_{\pm}$ , los campos eléctrico y magnético dentro del medio para cada polarización se escriben

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi_{\pm} \pm 2i\beta \\ \mp i + 2\beta \cos \phi_{\pm} \\ \sin \phi_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\vec{B}_{\pm} = \mp i \frac{n_0}{c} (1 \pm i\beta \cos \phi_{\pm}) \frac{E_{\pm}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi_{\pm} \\ \mp i \\ \sin \phi_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

El campo eléctrico total es  $\vec{E}_+ + \vec{E}_-$ , el cual teniendo en cuenta (26) y (27) a primer orden en  $\beta$  se escribe

$$\vec{E} = E_1 \begin{pmatrix} \cos \phi_0 \\ 2\beta \cos \phi_0 \\ \sin \phi_0 \end{pmatrix} + E_2 \begin{pmatrix} \beta(1 + \cos^2 \phi_0) \\ -1 \\ \beta \sin \phi_0 \cos \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

donde  $E_{\pm} = (E_1 \mp iE_2)/\sqrt{2}$ . Vemos que en el caso de no magnetización  $\beta = 0$ , los vectores que acompañan a las componentes  $E_i$  serían exactamente los vectores de polarización lineal  $\hat{e}_i$  dados en (23). Haciendo lo mismo para el campo magnético se halla

$$\vec{B} = \frac{n_0}{c} E_1 \begin{pmatrix} \beta \cos 2\phi_0 \\ -1 \\ \beta \sin 2\phi_0 \end{pmatrix} - \frac{n_0}{c} E_2 \begin{pmatrix} \cos \phi_0 \\ \beta \cos \phi_0 \\ \sin \phi_0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

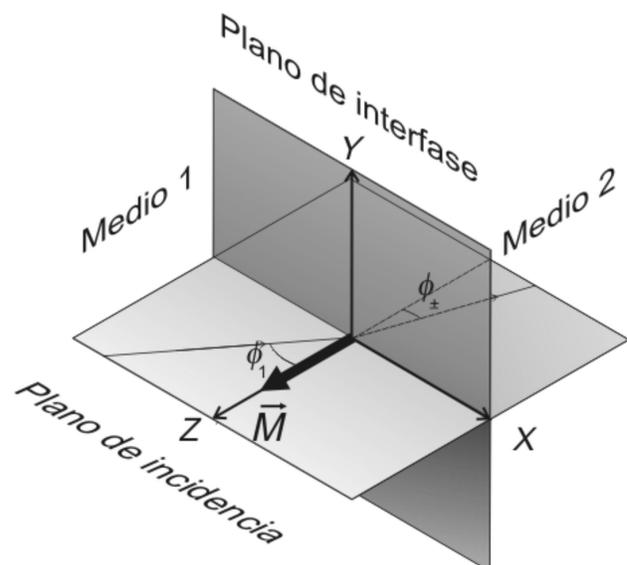


FIGURA 2. Sistema de referencia polar.

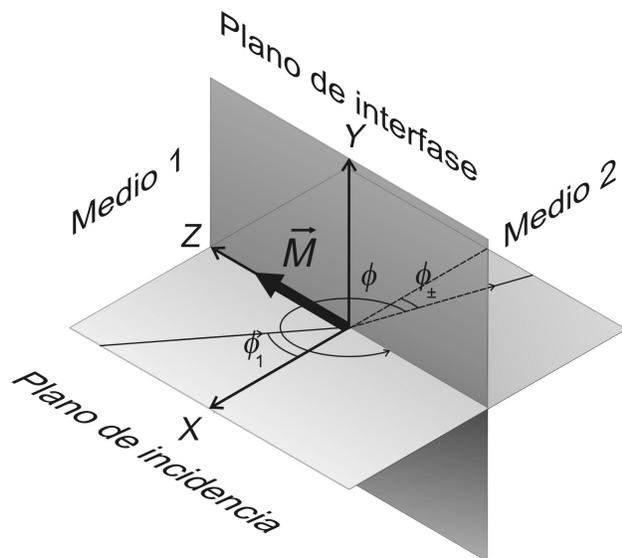


FIGURA 3. Sistema de referencia ecuatorial.

### 3.2. Caso ecuatorial

En este caso la normal a la interfase va en la dirección  $\hat{x}$  y el eje  $z$  se encuentra en la intersección de la interfase con el plano de incidencia (ver Fig. 3), por tanto el índice de refracción se halla haciendo  $\phi = \phi_{\pm} + 3\pi/2$ , y reemplazando en (22). De esta forma la ley de Snell (25) se escribe

$$\sin \phi_1 = n_0(1 \mp i\beta \sin \phi_{\pm}) \sin \phi_{\pm}.$$

Invirtiéndola se obtiene lo siguiente para el seno y el coseno del ángulo refractado:

$$\sin \phi_{\pm} = \sin \phi_0 \pm i\beta \sin^2 \phi_0, \quad (32)$$

$$\cos \phi_{\pm} = \cos \phi_0 \mp i\beta \frac{\sin^3 \phi_0}{\cos \phi_0}, \quad (33)$$

#### Amplitudes de campo

Haciendo  $\phi = \phi_{\pm} + 3\pi/2$  en (24) se determinan en este caso los campos eléctrico y magnético:

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \phi_{\pm} \pm 2i\beta \\ \mp i + 2\beta \sin \phi_{\pm} \\ -\cos \phi_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\vec{B}_{\pm} = \mp i \frac{n_0}{c} (1 \pm i\beta \sin \phi_{\pm}) \frac{E_{\pm}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \phi_{\pm} \\ \mp i \\ \cos \phi_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Los campos totales a primer orden en  $\beta$  se hallan sumando sobre las polarizaciones, considerando (32) y (33) se tiene

$$\vec{E} = E_1 \begin{pmatrix} \sin \phi_0 \\ 2\beta \sin \phi_0 \\ -\cos \phi_0 \end{pmatrix} + E_2 \begin{pmatrix} \beta(2 + \sin^2 \phi_0) \\ -1 \\ \beta \sin^2 \phi_0 \tan \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$\vec{B} = \frac{n_0}{c} E_1 \begin{pmatrix} \beta \sin^2 \phi_0 \\ -1 \\ -\beta \sin 2\phi_0 \tan \phi_0 \end{pmatrix} + \frac{n_0}{c} E_2 \begin{pmatrix} -\sin \phi_0 \\ -\beta \sin \phi_0 \\ \cos \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

## 4. Efecto Kerr magneto-óptico

En esta sección determinaremos los coeficientes de Fresnel para la reflexión de la luz en la superficie de un medio magnetizado en cada uno de los casos, polar y ecuatorial, y para cada una de las polarizaciones incidentes, perpendicular al plano de incidencia (en la dirección  $e_1$ ) y paralela al plano de incidencia (en la dirección  $e_2$ ). Mostraremos cómo aparece para cada polarización incidente una pequeña componente en la polarización ortogonal en el rayo reflejado, lo cual constituye la esencia del efecto MOKE. La mayoría de los experimentos para medir el efecto se desarrollan en el aire, prácticamente en el vacío, por tanto, en nuestro desarrollo supondremos que el primer medio es el vacío. Los campos electromagnéticos reflejado y transmitido se relacionan con los campos incidentes a través de las condiciones de frontera, las cuales provienen de las mismas ecuaciones de Maxwell. En nuestro caso esas condiciones son la continuidad de la componente normal al plano de interfase de la corriente, la continuidad de las componentes paralelas del campo eléctrico y la continuidad del campo magnético en la interfase. En forma simbólica estas condiciones se escriben como

$$(\vec{J}_{\perp})_1 = (\vec{J}_{\perp})_2, \quad (38)$$

$$(\vec{E}_{\parallel})_1 = (\vec{E}_{\parallel})_2, \quad (39)$$

$$(\vec{B}_{\parallel})_1 = (\vec{B}_{\parallel})_2, \quad (40)$$

$$(\vec{B}_{\perp})_1 = (\vec{B}_{\perp})_2. \quad (41)$$

Las componentes de los campos magnético y de corriente se pueden escribir en función de las componentes del campo eléctrico, como el campo incidente es conocido las únicas incógnitas son las dos componentes del campo eléctrico reflejado y las dos del campo eléctrico transmitido, en total 4. Por tanto, si el sistema de ecuaciones anterior es consistente y suficiente para determinar el problema, sólo deben existir cuatro ecuaciones independientes. Se puede demostrar que

las tres ecuaciones de continuidad del campo magnético son independientes y la otra ecuación independiente es la de la componente paralela del campo eléctrico a los planos de incidencia y de interfase. Como las expresiones de los campos difieren para cada caso miraremos cada uno de ellos por separado.

#### 4.1. Efecto MOKE polar

Las amplitudes de los campos transmitidos se leen directamente de (30) y (31). Las expresiones para las componentes de los rayos incidente y reflejado, pueden ser escritas a partir de esas mismas expresiones haciendo  $\beta = 0$  con el reemplazo  $\phi_0 \rightarrow \phi_1$  para los campos incidentes y  $\phi_0 \rightarrow \pi - \phi_1$  para los

reflejados. De acuerdo a eso tenemos las siguientes expresiones para las amplitudes del campo eléctrico de las ondas incidente, reflejada y transmitida en el caso polar:

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_1 \cos \phi_1 \\ -E_2 \\ E_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_r = \begin{pmatrix} -E'_1 \cos \phi_1 \\ -E'_2 \\ E'_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E''_1 \cos \phi_0 + E''_2 \beta (1 + \cos^2 \phi_0) \\ 2E''_1 \beta \cos \phi_0 - E''_2 \\ E''_1 \sin \phi_0 + E''_2 \beta \sin \phi_0 \cos \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

En tanto que para el campo magnético se tiene

$$\vec{B}_i = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_2 \cos \phi_1 \\ -E_1 \\ -E_2 \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_r = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} E'_2 \cos \phi_1 \\ -E'_1 \\ -E'_2 \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_t = \frac{n_0}{c} \begin{pmatrix} E''_1 \beta \cos 2\phi_0 - E''_2 \cos \phi_0 \\ -E_1 - E''_2 \beta \cos \phi_0 \\ E''_1 \beta \sin 2\phi_0 - E''_2 \sin \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las condiciones de continuidad para las componentes en  $x$  del campo eléctrico y en  $y$  del campo magnético obtenemos en forma matricial la ecuación

$$\begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\cos \phi_1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & \beta(1 + \cos^2 \phi_0) \\ -n_0 & -\beta n_0 \cos \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E''_1 \\ E''_2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Haciendo lo mismo con las componentes en  $x$  y en  $z$  del campo magnético obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\cos \phi_1 & +\cos \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & -\sin \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} = n_0 \begin{pmatrix} \beta \cos 2\phi_0 & -\cos \phi_0 \\ \beta \sin 2\phi_0 & -\sin \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E''_1 \\ E''_2 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Invirtiendo las matrices de la derecha para pasarlas a la izquierda y despejar  $E''_1$  y  $E''_2$  en cada ecuación, e igualando estas dos expresiones para eliminar estas incógnitas, nos queda la siguiente relación entre las amplitudes de los campos incidente y reflejado:

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha_{-1} & -\sin \alpha_1 \\ -\beta \sin \alpha_{-2} & -\beta \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\sin \phi_0 - \cos \phi_0 \sin \alpha_{-1} \cos \alpha_1) & \beta(\sin \phi_0 + \cos \phi_0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_{-1}) \\ \sin \alpha_{-1} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

donde  $\alpha_k \equiv \phi_1 + k\phi_0$ , con  $k = \pm 1, \pm 2$ .

En general, la onda incidente puede poseer cualquier polarización, los casos sobresalientes son los de polarización lineal cuando la polarización es paralela al plano de incidencia, esto es en la dirección  $\hat{e}_1$  y cuando es en dirección  $\hat{e}_2$  o sea perpendicular a dicho plano.

##### 4.1.1. Polarización incidente paralela

Esta polarización se consigue haciendo  $E_2=0$ . De la Ec. (46) se ve que para  $\beta=0$  la componente  $E'_2$  se anula, por lo tanto,

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{\sin \alpha_{-1} \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_{-1}} = \frac{n_0^2 \cos \phi_1 - A}{n_0^2 \cos \phi_1 + A}, \quad (47)$$

esta componente sólo tendrá contribuciones a partir del primer orden en  $\beta$ . Considerando los términos de más bajo orden se obtiene las siguientes relaciones para las polarizaciones de la onda reflejada:

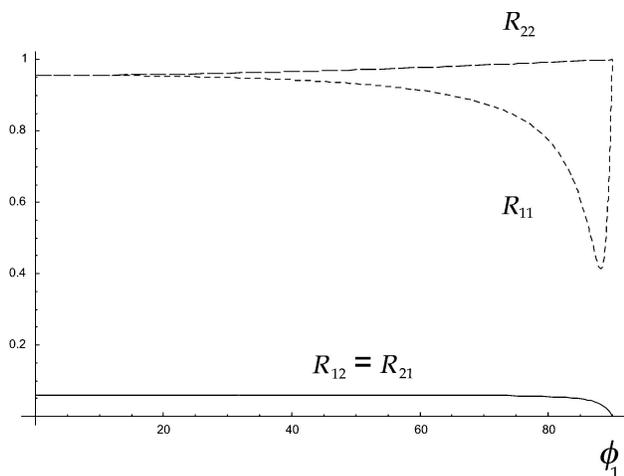


FIGURA 4. Coeficientes de reflexión, en función del ángulo de incidencia, caso polar ( $n_0^2 = 10^3 i$ ).

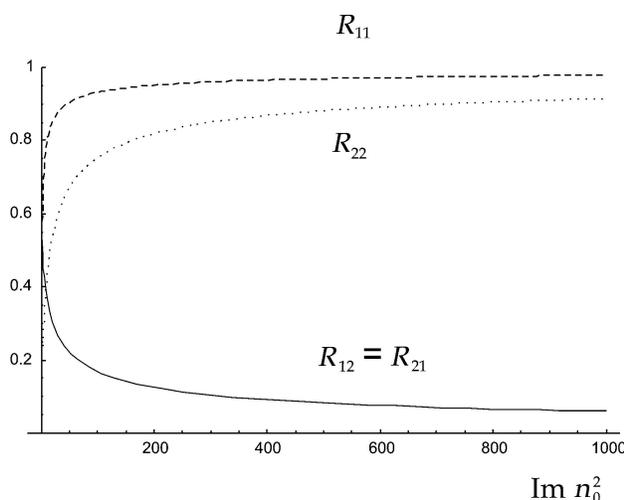


FIGURA 5. Coeficientes de reflexión, en función del índice de refracción, caso polar ( $\phi_1 = 60^\circ$ ).

$$\begin{aligned} \frac{E'_2}{E_1} &= -\beta \frac{\text{sen } 2\phi_1 \text{ sen } \phi_0}{\text{sen}^2 \alpha_1 \cos \alpha_{-1}} \\ &= \frac{2\beta n_0^2 \cos \phi_1}{(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)}, \end{aligned} \quad (48)$$

donde se utilizaron las identidades

$$\text{sen } \alpha_{\pm 1} = \frac{\text{sen } \phi_1}{n_0} (A \pm \cos \phi_1), \quad (49)$$

$$\text{sen } \alpha_{\pm 1} \cos \alpha_{\mp 1} = \frac{\text{sen } \phi_1}{n_0^2} (n_0^2 \cos \phi_1 \pm A), \quad (50)$$

con  $A \equiv \sqrt{n_0^2 - \text{sen}^2 \phi_1}$ .

El módulo de la relación entre las dos polarizaciones del rayo reflejado es la tangente del ángulo que ha rotado el plano de polarización:

$$\tan \theta_{K\parallel} = \left| \frac{E'_2}{E'_1} \right| = \left| \frac{2\beta \cos \phi_1 n_0^2}{(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 - A)} \right|, \quad (51)$$

$\theta_K$  es conocido como el ángulo de Kerr. El símbolo  $\parallel$  hace alusión a que en este caso la polarización incidente es paralela al plano de incidencia.

#### 4.1.2. Polarización incidente perpendicular

Para un rayo incidente polarizado en la dirección perpendicular al rayo de incidencia se tiene que  $E_1 = 0$ . Procediendo de forma análoga a la polarización anterior se obtiene

$$\frac{E'_2}{E_2} = -\frac{\text{sen } \alpha_{-1}}{\text{sen } \alpha_1} = -\frac{A - \cos \phi_1}{A + \cos \phi_1}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{E'_1}{E_2} &= -\beta \frac{\text{sen } 2\phi_1 \text{ sen } \phi_0}{\text{sen}^2 \alpha_1 \cos \alpha_{-1}} \\ &= \frac{-2\beta n_0^2 \cos \phi_1}{(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Para esta polarización la tangente del ángulo de Kerr es

$$\tan \theta_{K\perp} = \left| \frac{E'_1}{E'_2} \right| = \left| \frac{2\beta \cos \phi_1 n_0^2}{(A - \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)} \right|. \quad (54)$$

En la Fig. 4 se presentan los coeficientes de reflexión  $R_{ij} = |E'_i/E_j|$ , versus el ángulo de incidencia  $\phi_1$ , con  $n_0^2 = 10^3 i$  y  $\beta = 1$ . Los coeficientes  $R_{11}$  y  $R_{22}$  corresponden a los coeficientes usuales sin magnetización. Mientras el coeficiente de polarización  $R_{22}$  crece monótonamente con el ángulo de incidencia  $R_{11}$  tiene un mínimo relativo para  $\cos \phi_1 \sim \text{Re}(1/n_0)$ . Los coeficientes cruzados  $R_{12}$  y  $R_{21}$  son iguales y aparecen debido a la magnetización del material. Vemos que para ángulos menores de  $60^\circ$  los coeficientes cruzados  $R_{12}$  son prácticamente constantes decreciendo monótonamente para ángulos mayores hasta anularse en  $\phi_1 = 90^\circ$ .

En la Fig. 5 se grafica la dependencia de los coeficientes de reflexión con la parte imaginaria del  $n_0^2$ , que es proporcional a la conductividad del material, con  $\phi_1 = 60^\circ$ ,  $\text{Re } n_0^2 = 1$  y  $\beta = 1$ . Encontramos que en tanto los coeficientes  $R_{11}$  y  $R_{22}$  decrecen con la resistividad del material los coeficientes cruzados crecen. Así que para materiales magnéticos de baja conductividad el ángulo de Kerr debe ser mayor que para los buenos conductores.

## 4.2. Efecto MOKE ecuatorial

En este caso las amplitudes de los campos transmitidos se leen directamente de (36) y (37). Las expresiones para las componentes de los rayos incidente y reflejado pueden ser escritas a partir de esas mismas expresiones haciendo  $\beta = 0$ , con el reemplazo  $\phi_0 \rightarrow \phi_1$  para los campos incidentes y  $\phi_0 \rightarrow \pi - \phi_1$  para los reflejados. De acuerdo a eso, tenemos las siguientes expresiones para las amplitudes del campo eléctrico de las ondas, incidente, reflejada y transmitida:

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_1 \text{ sen } \phi_1 \\ -E_2 \\ -E_1 \text{ cos } \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_r = \begin{pmatrix} E'_1 \text{ sen } \phi_1 \\ -E'_2 \\ E'_1 \text{ cos } \phi_1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E_1'' \sin \phi_0 + E_2'' \beta (2 + \sin^2 \phi_0) \\ 2E_1'' \beta \sin \phi_0 - E_2'' \\ -E_1'' \cos \phi_0 + E_2'' \beta \sin^2 \phi_0 \tan \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Procediendo de igual manera para los campos magnéticos:

$$\vec{B}_i = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_2 \sin \phi_1 \\ -E_1 \\ E_2 \cos \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_r = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_2' \sin \phi_1 \\ -E_1' \\ -E_2' \cos \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_t = \frac{n_0}{c} \begin{pmatrix} 2E_1'' \beta \sin^2 \phi_0 - E_2'' \sin \phi_0 \\ -E_1'' - E_2'' \beta \sin \phi_0 \\ -E_1'' \beta \sin 2\phi_0 \tan \phi_0 + E_2'' \cos \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las condiciones de continuidad para las componentes en  $z$  del campo eléctrico y en  $y$  del campo magnético obtenemos la ecuación en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -\cos \phi_1 & \cos \phi_1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \phi_0 & \beta \sin^2 \phi_0 \tan \phi_0 \\ -n_0 & -\beta n_0 \sin \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2'' \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Haciendo lo mismo con las componentes en  $x$  y en  $z$  del campo magnético obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\sin \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \cos \phi_1 & -\cos \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_2' \end{pmatrix} = n_0 \begin{pmatrix} 2\beta \sin^2 \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ -\beta \sin 2\phi_0 \tan \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2'' \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Invirtiendo las matrices de la derecha para pasarlas a la izquierda y despejar  $E_1''$  y  $E_2''$  en cada ecuación, igualando estas dos expresiones para eliminar estas incógnitas nos queda la siguiente relación entre las amplitudes de los campos incidente y reflejado:

$$\begin{pmatrix} \beta(\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_0 \tan^2 \phi_0) & \beta(-\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_0 \tan^2 \phi_0) \\ \sin \alpha_{-1} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \csc \phi_0 \sin \alpha_{-1} & -2 \csc \phi_0 \sin \alpha_1 \\ -\beta \tan \phi_0 \sin \alpha_{-2} & -\beta \tan \phi_0 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_2' \end{pmatrix}. \quad (58)$$

#### 4.2.1. Polarización incidente paralela

De manera análoga al caso polar, esta polarización se consigue haciendo  $E_2 = 0$  en (58). Como es de esperarse, la componente  $E_2'$  sólo tendrá contribuciones a partir del primer orden en  $\beta$ . Considerando los términos de más bajo orden se tiene para la polarización paralela al plano de incidencia de la onda reflejada

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\sin \alpha_{-1} \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_{-1}} = \frac{n_0^2 \cos \phi_1 - A}{n_0^2 \cos \phi_1 + A}. \quad (59)$$

El campo reflejado en la polarización paralela es

$$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{\beta \sin 2\phi_1 n_0^2}{A(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)}. \quad (60)$$

La tangente del ángulo de Kerr (polarización paralela) es

$$\tan \theta_{K\parallel} = \left| \frac{E_2'}{E_1'} \right| = \left| \frac{\beta n_0^2 \sin 2\phi_1}{A(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 - A)} \right|. \quad (61)$$

#### 4.2.2. Polarización incidente perpendicular

Haciendo  $E_1 = 0$  en (58) se obtiene

$$\frac{E_2'}{E_2} = -\frac{\sin \alpha_{-1}}{\sin \alpha_1} = -\frac{A - \cos \phi_1}{A + \cos \phi_1}. \quad (62)$$

El campo reflejado en la polarización perpendicular es

$$\frac{E_1'}{E_2} = \frac{-\beta \sin 2\phi_1 n_0^2}{A(A + \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)}. \quad (63)$$

La tangente del ángulo de Kerr (polarización perpendicular) es

$$\tan \theta_{K\perp} = \left| \frac{E_1'}{E_2'} \right| = \left| \frac{\beta n_0^2 \sin 2\phi_1}{A(A - \cos \phi_1)(n_0^2 \cos \phi_1 + A)} \right|. \quad (64)$$

Como era de esperarse, los coeficientes de reflexión  $R_{11}$  y  $R_{22}$  para el caso ecuatorial, son iguales a los del caso polar por ser independientes de la magnetización. Al igual que el polar en el caso ecuatorial los coeficientes  $R_{12}$  y  $R_{21}$  son iguales, pero vienen pesados por un factor  $\sin \phi_1/|A|$  con respecto al polar.

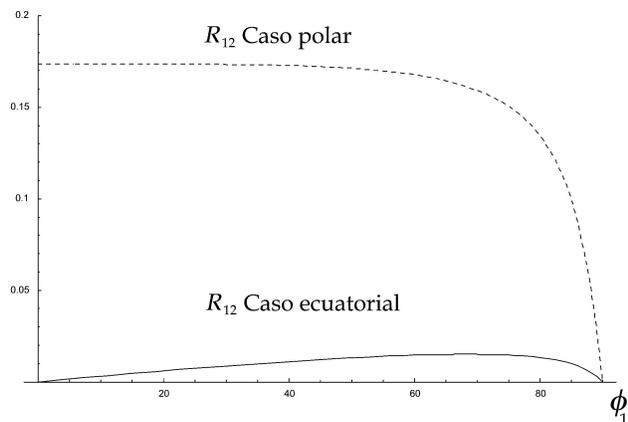


FIGURA 6. Coeficientes de reflexión cruzados, en función del índice de refracción, casos polar y ecuatorial ( $n_0 = 10e^{i\pi/4}$ ).

En la Fig. 6 se grafican los valores de  $R_{12}$  en función del ángulo de incidencia para  $n_0 = 10e^{i\pi/4}$  y  $\beta = 1$ . Se observa que para el caso polar el valor máximo es para ángulos pequeños, en tanto que para el caso ecuatorial el coeficiente de reflexión tiene un máximo relativo en  $\cos \phi_1 \sim [\text{Re}(1/n_0)]^{1/3}$

La conductividad en los metales es del orden de  $\sigma \sim 10^7(\Omega\text{m})^{-1}$ , para frecuencias en el visible,  $\nu \sim 10^{14}\text{Hz}$ , vemos que la relación  $\sigma/(\epsilon\omega)$  es mucho mayor que la unidad, por tanto, el índice de refracción de los metales en el visible es aproximadamente  $n_0 \sim \sqrt{\sigma/(\epsilon\omega)}e^{i\pi/4} \sim 10^2e^{i\pi/4}$ . Lo anterior implica que el efecto MOKE ecuatorial en este tipo de medios, el cual está pesado por un factor de  $1/|A| \sim 1/|n_0|$  con respecto al polar, tenga una intensidad uno o dos ordenes de magnitud menor que éste. Sin embargo,

para películas delgadas el efecto MOKE polar es desfavorecido por la geometría, lo cual hace un poco más conveniente el montaje longitudinal o ecuatorial.

## 5. Conclusiones

Hemos calculado, partiendo de las ecuaciones de Maxwell y suponiendo una densidad de corriente efectiva, los campos electromagnéticos asociados a una onda que se desplaza en el interior de un medio con magnetización. Encontramos las expresiones en primera aproximación para los ángulos de refracción en dichos medios. Utilizando las ecuaciones de frontera para los campos determinamos los coeficientes de reflexión y hallamos las expresiones correctas para el ángulo de Kerr en cada uno de los cuatro casos principales.

El tratamiento presentado es general para medios lineales, cualquier otro caso de polarización o de dirección de la magnetización en este tipo de medios se obtiene a partir de los cuatro casos presentados utilizando el principio de superposición.

El efecto MOKE polar es de mayor magnitud que el respectivo ecuatorial, sin embargo este último para películas delgadas (materiales anisótropos) se ve favorecido por la geometría haciéndolo preferencial en estos casos.

En el análisis presentado se desprecian los órdenes superiores de la cantidad adimensional  $\beta \equiv M\sigma/(2\rho)$ . Para los conductores la relación entre la densidad de los portadores de carga y la conductividad,  $\rho/\sigma$ , es del orden de  $\sim 10^3$  T. Para campos magnéticos del orden de Teslas  $\beta \sim 10^{-3}$ , en este caso el tratamiento anterior es válido con una precisión superior al uno en mil.

1. D. Spoddig *et al.*, *Superlattices and Microstructures* **43** (2008) 180.
2. O. Zivotsky *et al.*, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **320** (2008) 1535.
3. N. Moutis, D. Suarez-Sandoval y D. Niarchos, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **320** (2008) 1050.
4. P. Vavassori *et al.*, *Physical Review B* **69** (2004) 214404.
5. Ganping Yu *et al.* *Physical Review Letters* **82** (1999) 3705.
6. J. Lopez *et al.*, *Revista Colombiana de Física* **37** (2005) 384.
7. S. Blundell, *Magnetism in Condensed Matter* (Oxford University Press, New York, 2001) p. 182.
8. R.C. O'Handley, *Modern Magnetic Materials, Principles and Application* (John Wiley & Sons, Inc 2000) p. 642.
9. C.H. Wind, On The Theory of Magneto-optic phenomena I, *Archives Neerlandaises* (2) I, (1897).