Entendiendo la relatividad especial usando la frecuencia como concepto esencial

H.O. Di Rocco
*Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional del Centro, Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina,
y CONICET, Argentina.*

Recibido el 29 de agosto de 2008; aceptado el 27 de enero de 2009

Las consecuencias principales de la teoría de la relatividad especial (TRE) se pueden deducir considerando la frecuencia medida por distintos observadores así como los postulados de la TRE, sin necesidad previa de las ecuaciones de transformación de Lorentz ni de los diagramas espacio-temporales. Si una fuente ubicada en un sistema *S'*, que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme respecto de otro *S*, emite pulsos con frecuencia ν_0 en su propio sistema de referencia (SR), la comparación entre las frecuencias medidas por sendos observadores, *O*' (en *S*') y *O* (en *S*) permite encontrar, mediante un único razonamiento, no solamente las frecuencias medidas por *O* cuando la fuente se acerca o se aleja relativamente de él, sino también los efectos conocidos como *dilatación del tiempo* y *contracción de las longitudes*. Estos dos resultados permiten encontrar, posteriormente, las ecuaciones de transformación (de Lorentz) mediante un sencillo procedimiento algebraico.

Descriptores: Relatividad Especial; frecuencia; efecto Doppler; dilatación del tiempo; contracción de las longitudes.

The principal consequences of the Special Relativity Theory (SRT) can be deduced considering the frequency measured by different observers (Doppler effect) as well as the postulates of the SRT, with no previous necessity of the Lorentz transformation equations nor the space-time diagrams. If a source located in a system *S*', that is moving with uniform linear motion with respect to the other system *S*', emits pulses with frequency ν_0 in its proper Reference System (RS), the comparison between the frequencies measured by each observer *O*' (in *S*') and *O* (in *S*) permits to find the effects known as *time dilatation* and *length contraction*. Then, by means of a simple algebraic procedure, the Lorentz transformation equations are found.

Keywords: Special relativity; frequency; Doppler effect; time dilation; length contraction.

PACS: 03.30+p.

1. Introducción

La teoría de la relatividad especial (TRE) sigue sorprendiendo tanto a los legos como a los alumnos de los primeros años del ciclo universitario. A lo largo del tiempo, centenares de artículos, capítulos en libros denominados genéricamente "*Fundamentos de Física"* (o *"Física Moderna"* y similares), así como libros de divulgación, se han publicado buscando paliar este inconveniente. En el presente trabajo usaremos como principal referencia comparativa el libro de R. Resnick [1], ya que, de por sí, contiene una buena cantidad de otras referencias adicionales. Mencionar una bibliografía más abundante es ilusorio, puesto que rápidamente puede quedar obsoleta. Buscando maneras de presentar la TRE sin hacer uso de las transformaciones de Lorentz ni de los diagramas de espacio-tiempo, he considerado que un concepto esencial de partida (tal vez tan esencial como los de tiempo y espacio) es el de *frecuencia*. Después de todo, los patrones de medición de tiempo se basan en fenómenos periódicos, desde la rotación de la Tierra a los modernos relojes atómicos.

En este trabajo presentamos una deducción alternativa de dos de los resultados más llamativos (o "paradójicos") de la TRE, la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes, relacionando las frecuencias emitidas por una fuente F' solidaria al sistema *S'* (que, arbitrariamente, llamaremos el sistema en movimiento) con las recibidas por un observador en el sistema *S* (que, convencionalmente, llamaremos en reposo o de laboratorio). En suma, la deducción permite obtener también los resultados para el efecto Doppler, cuando la fuente y el observador se mueven relativamente entre sí.

Dado que, para no repetir material que puede encontrarse en otras partes, este artículo está escrito en forma algo tersa, sin demasiados detalles previos, es útil tener en cuenta que usaremos los siguientes conceptos que deberán, tal vez, ser expuestos más detalladamente por los docentes:

a) la *simultaneidad* es un concepto relativo, y

b) en un sistema dado, los relojes necesitan estar debidamente *sincronizados* entre sí.

Además, en un momento u otro de nuestra deducción usaremos los dos postulados de la relatividad especial:

i) las leyes de la física son las mismas para todos los sistemas de referencia inercial (SRI), y

ii) la velocidad de la luz es la misma en todos los SRI [1].

Una manera sencilla de ejemplificar i) es que lo que importa es el movimiento *relativo* entre la fuente y el observador; cualquiera de éstos puede considerarse arbitrariamente fijo para un problema en particular. Es importante recalcar que esto último no es válido para las ondas de sonido, ya que éstas necesitan de un medio material para propagarse [2].

También puede ser interesante destacar a los alumnos que se acostumbra llamar *tiempo propio* al que se mide con un solo reloj, mientras que el *tiempo impropio* es el que necesita dos relojes debidamente *sincronizados* entre sí. Otro concepto que puede ser útil es que la medición de la longitud de una varilla en movimiento necesita, imperiosamente, ser medida en el mismo instante por dos observadores con dos relojes sincronizados. La diferencia entre los conceptos anteriores con la observación de una longitud y la de un intervalo por un *único observador* debe ser claramente establecida; referencias adecuadas son las de Weinstein [3] y Crowell [4], respectivamente.

En el último parágrafo de este trabajo se invierte la presentación normal de la TRE: se usan los resultados deducidos en la primera parte para encontrar las ecuaciones de transformación de Lorentz.

Considero que este material puede presentarse a alumnos de primer año de la licenciatura en física o alumnos motivados del último año del ciclo medio. Solamente es necesario conocer los conceptos elementales de cinemática, así como unos pocos relacionados con el movimiento ondulatorio: frecuencia, longitud de onda, etc. Considero adecuado que los alumnos que reciben por primera vez estos conceptos sutiles, lo hagan en forma más *"física"* que *"formal"*.

En el curso de la redacción de este trabajo, en el proceso de recopilación de material, me he encontrado con un artículo similar en espíritu, debido a M. Moriconi [5], de la Universidade Federal Fluminense (Niterói, Brasil). A los efectos de enfatizar algunas similitudes, he empleado la misma notación para ciertas expresiones, aunque éstas no son iguales en ambos trabajos. Para aclarar las similitudes y diferencias, hago notar que:

i) se menciona explícitamente la diferencia entre lo que significa "ver" longitudes e intervalos temporales (lo que implica un único obsevador) con la noción usual de medición con relojes sincronizados;

ii) aquí se deduce explícitamente la relación entre las frecuencias ν y ν_0 (ver nuestra Sec. 2) sin hacer mención "a nociones elementales del análisis dimensional";

iii) nuestra expresión para $f(\beta)$ es, a despecho de la misma notación, la inversa de la que escribe Moriconi;

iv) lo mismo sucede para el cociente $f(\beta)/f(-\beta)$;

v) hago una deducción, a mi entender más sencilla y original (al menos claramente distinta) de la contracción de longitudes y de un cierto número $\nu_p L_0/c$, que es nuestra Ec. (18) y aparece como nota al pie en la página 1412 de la Ref. 5;

vi) la presente inferencia de las ecuaciones de transformación de Lorentz es totalmente diferente, ya que se hace mediante un sencillo procedimiento algebraico.

El trabajo de Moriconi es más general que éste, y más apto para alumnos más avanzados; el presente es pensado para aquellos estudiantes que se encuentran por primera vez con la TRE. De cualquier manera recomiendo especialmente, si cabe, la lectura de la Ref. 5, luego de la del presente trabajo.

Nota: en las fórmulas de este trabajo usaremos dos conocidas abreviaturas: i) $\beta = v/c$ y ii) $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

2. La frecuencia medida por distintos observadores que se mueven relativamente entre sí; efecto Doppler

2.1. La fuente y el observador se alejan relativamente entre sí

Consideremos dos sistemas inerciales *S* y *S'*, donde *S'* se aleja de *S* con velocidad *v* (por ejemplo hacia la derecha); luego veremos qué sucede cuando *S'* se acerca a *S*. Sean los eventos *A* y *B* la emisión de dos pulsos p_1 y p_2 emitidos desde una fuente F' ubicada en el origen *O'* de *S': x'=0*^{i}. En S'**,** el lapso entre dos pulsos (o entre dos crestas de ondas) p_1 y p_2 es $\Delta t' \equiv \tau_0$ (que es un tiempo propio [1]); por lo tanto, desde *S'* se observa que en su sistema la distancia entre dos pulsos sucesivos (o longitud de onda) es

$$\Delta x'(p_1, p_2) = c\tau_0. \tag{1}$$

Ahora debemos relacionar qué *ve* un solo observador *O* ubicado en el origen del sistema *S* con las mediciones hechas por dos observadores fijos en *S* con sus relojes sincronizados. En *S*, los eventos *A* y *B* ocurren en x_A y x_B, y los tiempos medidos por tales relojes, ubicados en dichas posiciones, son t_A y t_B; por lo tanto, el intervalo temporal es $\Delta t \equiv \tau = t_B - t_A$. Sin embargo, como puede verse en la Ref. 4, el observador *O* ve un *tiempo aparente* T, dado que la luz tiene que viajar desde x_A y x_B hasta *O*; T está relacionado con τ y, para una fuente que se aleja, vale

$$T_{aleja} = \tau\left(1 + \frac{v}{c}\right), \tag{2}$$

como puede verse en la Ref. 4. Entonces, para un único observador *O*, la separación entre los pulsos (o sea, la longitud de onda determinada por *O*) viene dada por el producto cT_{aleja}, tal que

$$\Delta x_{aleja}(p_1, p_2) = (c+v)\tau. \tag{3}$$

Si ahora, en las Ecs. (1) y (3) introducimos las nociones de frecuencia y de longitud de onda, multiplicando sendas ecuaciones por ν_0 y por ν respectivamente, tendremos, usando el postulado de constancia de la velocidad de la luz

$$c\tau_0\nu_0 \equiv \lambda_0\nu_0 = c$$

y

$$(c+v)\tau\nu \equiv \lambda\nu = c.$$

Igualando los primeros miembros resulta que cuando la fuente y el observador se alejan relativamente entre ellos, la frecuencia medida en *S*, que podemos escribir usando β, es

$$\nu_{aleja} = \frac{\tau_0/\tau}{(1+v/c)}\nu_0 = \frac{\tau_0/\tau}{(1+\beta)}\nu_0. \tag{4}$$

2.2. La fuente y el observador se acercan relativamente entre sí

Si ahora *S'* se acerca a *S* (o, equivalentemente, *S* se acerca a S'), un razonamiento análogo [4] nos dice que, en lugar de la Ec. (3) tendremos

$$\Delta x_{acerca}\left(p_1,p_2\right)=\left(c-v\right)\tau, \tag{5}$$

siendo τ, como antes, el intervalo temporal en el sistema *S*. Análogamente, en lugar de la Ec. (4) obtenemos

$$\nu_{acerca}=\frac{\tau_0/\tau}{(1-\beta)}\nu_0; \tag{6}$$

el signo negativo delante de β es una simple manifestación de que ahora la fuente y el observador se acercan relativamente entre sí.

2.3. Otra manera de escribir las Ecs. (4) y (6)

En estos dos procesos de "conteo" pueden introducirse dos funciones que, en principio, podríamos denotar como $f(\tau_0,\tau,\beta){=}\left(\tau_0/\tau\right)/\left(1{+}\beta\right)$ y $f(\tau_0,\tau,-\beta){=}\left(\tau_0/\tau\right)/\left(1-\beta\right)$, para escribir de otra manera las Ecs. (4) y (6)**.** De cualquier manera, al llegar a la Ec. (13), hubiésemos reconocido que ambas dependen solamente de β, por lo que escribimos

$$f(\beta)=\frac{\tau_0/\tau}{(1+\beta)} \tag{7}$$

y

$$f(-\beta)=\frac{\tau_0/\tau}{(1-\beta)}, \tag{8}$$

tal que

$$\nu_{aleja}=f\left(\beta\right)\nu_0 \tag{9}$$

y

$$\nu_{acerca}=f\left(-\beta\right)\nu_0; \tag{10}$$

el cociente entre ambas funciones resulta

$$\frac{f\left(\beta\right)}{f\left(-\beta\right)}=\frac{1-\beta}{1+\beta}=\frac{c-v}{c+v}, \tag{11}$$

en el que desaparece, al menos para el cociente, cualquier posible dependencia con los tiempos propio e impropio.

2.4. Cómo encontrar $f\left(\beta\right)$

En las Ecs. (7) y (8) $f\left(\pm\beta\right)$ está escrita también en términos de τ_0 y τ; queremos ver la posibilidad de encontrar $f\left(\pm\beta\right)$ solamente en términos de β. Para ello pensamos el siguiente experimento: en el sistema *S'* (vagón) hay una fuente *F'* que emite pulsos con una frecuencia ν_0 y un observador *O'*; dado que *F'* y *O'* están en el mismo SRI, *O'* debe medir idénticamente ν_0. Ahora bien, en el sistema *S* hay un observador *O* ubicado entre *F'* y *O'* que recibe luz de *F'*; como *F'* se acerca a *O*, éste mide

$$\nu_1=f\left(-\beta\right)\nu_0.$$

Si *O* enviase a *O'* luz con la frecuencia anterior ν_1, *O'* (que se aleja respecto de *O*) recibiría una frecuencia

$$\nu_2=f\left(\beta\right)\nu_1=f\left(\beta\right)f\left(-\beta\right)\nu_0;$$

pero, como argumentamos anteriormente, *O'* recibe una frecuencia ν_0, con lo cual $\nu_0=f\left(\beta\right)f\left(-\beta\right)\nu_0$ y por lo tanto $f\left(\beta\right)f\left(-\beta\right)=1$, o sea

$$f\left(-\beta\right)=\frac{1}{f\left(\beta\right)}. \tag{12}$$

Reemplazando en (11)

$$\frac{f\left(\beta\right)}{1/f\left(\beta\right)}=f\left(\beta\right)^2=\frac{1-\beta}{1+\beta},$$

con lo cual

$$f\left(\beta\right)=\left(\frac{1{-}\beta}{1{+}\beta}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad f\left(-\beta\right)=\left(\frac{1{+}\beta}{1{-}\beta}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

que es lo que buscábamos.

2.5. Las frecuencias de acercamiento y de alejamiento relativos; el efecto Doppler

Usando las expresiones anteriores podemos obtener fácilmente

$$\nu_{acerca}{=}f\left(-\beta\right)\nu_0{=}\left(\frac{1{+}\beta}{1{-}\beta}\right)^{1/2}\nu_0{=}\left(\frac{c{+}v}{c{-}v}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{14}$$

y

$$\nu_{aleja}{=}f\left(\beta\right)\nu_0{=}\left(\frac{1{-}\beta}{1{+}\beta}\right)^{1/2}\nu_0{=}\left(\frac{c{-}v}{c{+}v}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{15}$$

que coinciden con las Ecs. (2-28) y (2-29) del libro de Resnick [1].

Este resultado se ha obtenido por simple conteo de pulsos, sin necesidad de calcular previamente la relación entre los tiempos propio e impropio, como se hace en todos los tratamientos de relatividad que conozco. La relación entre ambos tiempos es el objeto del siguiente apartado.

3. Consecuencias: dilatación del tiempo y contracción de las longitudes

3.1. La dilatación del tiempo

Para encontrar la relación entre τ y τ_0 volvemos a las Ecs. (7), (8) y (12); todo ello implica que se debe cumplir

$$\frac{\tau_0/\tau}{(1+\beta)}=\frac{(1-\beta)}{\tau_0/\tau},$$

por lo que resulta

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\equiv\gamma\tau_0. \tag{16}$$

que coincide con la Ec. (2-11) de la Ref. 1. Debe quedar en claro que τ es el tiempo medido por varios relojes fijos en S, sincronizados entre sí. Como hemos expresado en la Introducción, el concepto de sincronización de los relojes es uno de aquellos que debería ser claramente expuesto por los docentes antes de abordar un tratamiento más formal. Una buena exposición conceptual puede encontrarse en la Ref. 7. La relación (16) indica que desde *S* se ve que el reloj en movimiento se va retrasando; dado τ_0, *S* mide un intervalo más largo. Éste es el efecto conocido como *dilatación del tiempo*.

En muchos textos la Ec. (16) suele expresarse, correctamente, en la forma $\Delta t = \gamma \Delta t_p$, indicando con Δt_p el tiempo *propio*; otros, suelen escribir $\Delta t = \gamma \Delta t'$, porque se basan en ejemplos donde un reloj localizado en *una* posición está en el sistema S', considerado arbitrariamente "en movimiento". Sin embargo, hay reciprocidad entre los sistemas *S* y S', por lo cual es mejor proponer, como lo hace Kourganoff [6]:

$$\frac{\text{Duración “impropia” del proceso medido por dos relojes}}{\text{Duración “propia” del proceso (localizado en } un \text{ punto)}} = \gamma. \quad (17)$$

3.2. La contracción de las longitudes

Supongamos que una fuente F en el sistema *S* emite pulsos con una frecuencia propia ν_p durante un cierto tiempo Δt_F; el número total de pulsos emitidos es $N_F = \nu_p \Delta t_F$. Justo cuando Mariana (M, en el sistema S') pasa por el origen donde está Tomás (T, en el sistema S), ambos reciben el primer pulso. M encuentra el último pulso emitido por F cuando llega al punto x_0 (a una distancia L_0, medida en S); según M, ella ha recorrido una distancia L' y tarda un tiempo $\Delta t' = L'/v$, habiendo recibido un número de pulsos $N_M = \nu_M \Delta t'$:

$$N_M = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \nu_p \frac{L'}{v} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \nu_p \Delta t';$$

pero este número de pulsos cumple $N_M = N_F$.

A este $\Delta t'$ le corresponde un tiempo medido por T igual a

$$\Delta t_T = \frac{L_0}{v} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma \Delta t',$$

y en dicho lapso ha recibido un número de pulsos

$$N_T = \nu_p \frac{L_0}{v} = \nu_p \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \nu_p \gamma \Delta t',$$

evidentemente menor que N_M. Llamemos N al número de pulsos no recibidos por T; resulta $N{=}N_F{-}N_T{=}N_M{-}N_T$:

$$N = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \nu_p \Delta t' - \nu_p \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

que simplificamos a

$$N = \frac{\nu_p \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta = \nu_p \Delta t \frac{v}{c}$$

y, en definitiva

$$N = \frac{\nu_p L_0}{c}. \quad (18)$$

Luego, el número total de pulsos interceptados por Mariana ($= N_M$) es igual a los que le llegaron a T ($= N_T$) más el número que todavía no le llegó a este último:

$$\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \nu_p \frac{L'}{v} = \nu_p \frac{L_0}{v} + \frac{\nu_p L_0}{c} = \nu_p L_0 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right),$$

de donde se deduce, elevando ambos miembros al cuadrado y operando algebraicamente

$$L'^2 = L_0^2 \left(1-\beta^2\right),$$

por lo que, para una varilla que mide, "en reposo", L_0 en S

$$L' = L_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2} \equiv \frac{L_0}{\gamma}, \quad (19)$$

que es el resultado conocido como *contracción de longitudes:* la medición de la longitud de un cuerpo es mayor cuando éste está en reposo con respecto al sistema de referencia. Al comparar con la Ec. (2-10) del libro de Resnick, éste escribe $\Delta x = \Delta x' \left(1-\beta^2\right)^{1/2}$, porque la varilla está en reposo en S'; en el presente tratamiento L_0 está "en reposo" en S. Para que no haya confusiones entre los sistemas primados y no primados y evitar un uso irreflexivo de las ecuaciones, podemos escribir la Ec. (19) como lo hace Kourganoff [6]:

$$\frac{\text{Distancia en el sistema de simultaneidad}}{\text{Distancia en todo otro sistema inercial}} = \left(1-\beta^2\right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\gamma}. \quad (20)$$

4. Deducción de las ecuaciones de transformación de Lorentz a partir de la dilatación del tiempo y de la contracción de las longitudes

En este trabajo no se pretende un análisis de los libros de texto acerca del tratamiento de la TRE. De cualquier manera, podemos decir que, a grandes rasgos, hay dos tipos de presentaciones:

i) se parte de las ecuaciones de transformación de Lorentz y luego se presentan las consecuencias más notorias, contracción de longitudes, dilatación del tiempo, relación masa-energía, etc.; asimismo, suelen presentarse diversos tipos de diagramas espacio-tiempo, donde tales consecuencias se visualizan rápidamente;

ii) en otros, se presenta un enfoque más físico de las consecuencias cinemáticas y luego, por otra parte, se deducen las ETL y se vuelven a deducir dichas consecuencias, para mostrar la consistencia interna de la teoría.

Sin embargo, es posible usar directamente los resultados de la dilatación del tiempo y de la contracción de las longitudes para responder a la siguiente pregunta: ¿cuáles son las ecuaciones de transformación que deben reemplazar a las galileanas: $x' = x - vt$, $t' = t$?

Debido a la isotropía del espacio las ecuaciones que relacionan (x, x', t, t') deben tener las formas lineales siguientes:

$$x' = K(x - vt) \tag{21}$$

y

$$x = K(x' + vt'), \tag{22}$$

siendo K una constante adimensional; el hecho de que no puede haber otro tipo de dependencia que no sea la lineal puede leerse en las Refs. 1 y 8.

Si ahora consideramos una varilla de longitud propia L'_0 en el sistema S', con sus extremos en x'_1 y x'_2 (en S'), que se mueve con velocidad v respecto del sistema S, la aplicación de la Ec. (21) nos da

$$x'_1 = K(x_1 - vt_1), \qquad x'_2 = K(x_2 - vt_2),$$

tal que, restándolas adecuadamente,

$$x'_2 - x'_1 = K(x_2 - x_1) - Kv(t_2 - t_1). \tag{23}$$

Ahora bien, $x'_2 - x'_1 = L'_0$. Por otra parte, para medir la varilla desde S, las mediciones deben hacerse simultáneamente, por lo cual, llamando $L = x_2 - x_1$ y teniendo en cuenta $t_2 = t_1$, la Ec. (23) nos queda $L'_0 = KL$. Como, por la Ec. (17), $L = L'_0/\gamma$, resulta que $K = \gamma$, por lo cual

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{24}$$

y, recíprocamente,

$$x = \gamma(x' + vt'). \tag{25}$$

En esta última ecuación, $x' = (x - v\gamma t')/\gamma$, por lo que, igualando a la Ec. (24) y despejando t', resulta

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{26}$$

así como su recíproca

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right). \tag{27}$$

El conjunto de las cuatro Ecs. (24), (25), (26) y (27), constituyen las ecuaciones buscadas.

5. Conclusiones

En esta corta nota se utiliza el conteo de pulsos (o de crestas de ondas), hechas por un único observador, para deducir el efecto Doppler así como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes, sin usar las ecuaciones de Lorentz ni diagramas espacio-tiempo como información previa. Por el contrario, a partir de las mencionadas consecuencias cinemáticas, y dada la necesaria linealidad de las ecuaciones de transformación, éstas se deducen sencillamente en forma algebraica.

Agradecimientos

El apoyo de la Universidad Nacional del Centro y del CONICET, son agradecidos. Dedico el trabajo a mis hijos Tomás y Mariana, que me obligan a formas de presentación más simple del material científico. Asimismo, agradezco las recomendaciones hechas por el árbitro, que permitieron mejorar la presentación de este artículo.

i. Cualquier valor de x’ es válido, basta que sea siempre el mismo; lo consideramos en el origen, solamente por simplicidad en el razonamiento.

1. R. Resnick, *Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad* (Ed. Limusa, 1977) y referencias allí incluidas.
2. R. Resnick y D. Halliday, *Física* (Ed. CECSA, 1970) Cap. 20.
3. R. Weinstein, *Am. J. Phys.* **28** (1960) 607.
4. A. D. Crowell, *Am. J. Phys.* **29** (1961) 370.
5. M. Moriconi, *Eur. J. Phys.* **27** (2006) 1409.
6. V. Kourganoff, *Introducción a la Teoría de la Relatividad* (Ed. Labor, 1973).
7. D.E. Mook y T. Vargish, *La Relatividad; espacio, tiempo y movimiento* (Ed McGraw-Hill, 1993).
8. A. Einstein, *La Relatividad* (Ed. Grijalbo, México D.F., 1970).