

# Concentrador parabólico compuesto: una descripción opto-geométrica

S. Tapia S. y J.A. del Río P.

*Centro de Investigación en Energía, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Privada Xochicalco s/n Colonia Centro, Temixco, 62580 Morelos, México,  
e-mail: sts@cie.unam.mx, antonio@servidor.unam.mx*

Recibido el 15 de octubre de 2008; aceptado el 13 de mayo de 2009

Dentro del ámbito de las tecnologías de concentración solar, el concentrador parabólico compuesto (CPC) es uno de los dispositivos más usados, sobre todo por su gran capacidad en concentración de energía. Los principios físicos de funcionamiento del CPC permiten una discusión ilustrativa del comportamiento óptico y geométrico; sin embargo, la demostración de sus propiedades no se ha expuesto detalladamente en la literatura. En este trabajo presentamos esta demostración con una perspectiva didáctica para cursos de óptica y geometría analítica en los programas de nivel licenciatura de física e ingeniería.

*Descriptor:* Concentrador parabólico compuesto; CPC; coordenadas cartesianas; coordenadas polares.

In solar energy technologies the compound parabolic concentrator (CPC) is one of the most used devices due to its high concentration. Although this device can be used to illustrate optical and geometrical principles, a detailed demonstration of its properties has not been presented in the open literature. In this paper, we present a geometrical and optical demonstration of its properties. Besides, this work can be used as an example in the optics and analytical geometry courses.

*Keywords:* Parabolic concentrator; CPC; cartesian coordinates; polar coordinates.

PACS: 42.15.-i; 42.15.Eu; 89.30.Cc

## 1. Introducción

El Sol radía una gran cantidad de energía que ha hecho posible la vida en nuestro planeta y a través del tiempo, con transformaciones biológicas y químicas es como esta energía se ha almacenado en el petróleo. Este último combustible ha permitido el actual desarrollo de la humanidad. Por otro lado, el agotamiento de los hidrocarburos es un hecho al que muy pronto tendremos que enfrentarnos. El uso directo de la energía solar es una de las posibilidades para que el Sol continúe siendo proveedor de energía en el actual desarrollo tecnológico. La utilización de la energía solar a través de la concentración es una alternativa promisoría. Dentro de los usos de la energía solar los sistemas de concentración son una de las tecnologías más usadas y el concentrador parabólico compuesto (CPC) es una posibilidad muy prometedora. Por esta razón, el entendimiento de los principios ópticos y geométricos detrás del CPC es importante para los físicos e ingenieros; además de ser un ejemplo ilustrativo para materias del ciclo básico en las carreras de física e ingeniería.

Aunque la energía proporcionada por el Sol es abundante en cuanto a espacio irradiado, en muchas zonas de nuestro planeta, sin embargo, nos llega al nivel de la tierra en muy baja densidad (en México la irradiancia solar promedio es del orden de  $\bar{E}_s \cong 850 \text{ W/m}^2$ ); debido a esto las aplicaciones de la energía solar que se pueden lograr sin concentrar la irradiancia solar son muy pocas. El uso de concentradores solares nos brinda la oportunidad de aplicar la energía solar en diversas tecnologías, y como ejemplos se tienen: la cocción de alimentos, el calentamiento de agua para uso en el hogar, la generación de vapor que luego será usado en generación de energía eléctrica, entre otras. Los sistemas de concentración se pueden clasificar en tres grandes grupos:

1. Los de imagen, que enfocan directamente al Sol durante toda la trayectoria diaria. Por lo tanto, en la mayoría de las aplicaciones usan un sistema de seguimiento del disco solar, y se obtienen altas concentraciones de energía solar ( $20 < C \approx 14\,500$ ).
2. Los concentradores de no imagen (entre los que se encuentra el CPC), con la gran virtud de lograr la concentración de energía solar sin el uso de un sistema de seguimiento, disminuyendo el costo del sistema de concentración de energía solar, lo cual hace muy atractivos a estos equipos en diversas aplicaciones solares. En el caso de los concentradores tipo CPC, se pueden lograr concentraciones entre  $1.1 \leq C \leq 45\,300$ , al ajustar en el diseño el ángulo de apertura.
3. Los híbridos enfoque-no imagen, con los que se puede obtener concentraciones hasta del orden de  $C \approx 45\,300$ , aprovechando las bondades de los dos primeros sistemas de concentración. Estos concentradores se integran por una etapa o dos etapas de concentración solar de imagen, seguida de una concentración final de no imagen (el CPC ha sido propuesto por diferentes investigadores como etapa final de concentración).

La idea del CPC tiene un poco más de 40 años, fue concebido simultáneamente en 1966 en Estados Unidos de Norteamérica por Hinterberger y Winston [1, 2], en Alemania en 1966 por Ploke [3], y en la URSS por Baranov y Melnikov [4]. En 1974 Winston [5] describió el CPC en 2D, mostrando las ventajas de este tipo de concentrador, como un concentrador de no imagen, para ser usado en dispositivos

solares, y también mostró que el CPC tiene la máxima concentración posible. En 1976 Rabl [6] analizó las propiedades ópticas y térmicas del CPC. En ese trabajo Rabl presentó también el desempeño de un CPC en 2D truncado, y en el mismo trabajo desarrolló una descripción paramétrica del CPC en 2D en coordenadas cartesianas. En 1981 Rapp [7] desarrolló el CPC utilizando una descripción matemática basada en geometría analítica y, a través de ésta, obtuvo los parámetros geométricos importantes para diseño del CPC. En ese trabajo se muestran las relaciones de transformación entre coordenadas polares y cartesianas, sin embargo, no realizó la etapa de encontrar la descripción analítica del CPC en coordenadas cartesianas, sino que obtuvo los parámetros del CPC, para luego usarlos en el diseño. En 1989 Welford y Winston [8] mostraron las ecuaciones paramétricas del CPC en 2D y 3D, y una relación implícita que representa el CPC en 3D. También en 1989 Miñano [9] analizó el CPC usando coordenadas cartesianas en 2D y 3D y obtuvo expresiones implícitas. En 1990 Suresh *et al.* [10] realizaron una evaluación del desempeño térmico y óptico del CPC. En el 2005 Winston y colaboradores [11] hicieron una revisión de los trabajos sobre los concentradores de no imagen para los CPC en 2D y 3D donde nuevamente se enfatizan los resultados en coordenadas polares.

Dado que en este trabajo describiremos el concentrador parabólico compuesto, consideramos adecuado definir la concentración solar. Siguiendo a Ari Rabl [12], la concentración geométrica de un sistema de concentración es

$$C_{geom} = \frac{A}{A'}, \tag{1}$$

donde  $A$  es el área de apertura del concentrador,  $A'$  es el área de salida del concentrador, la representación geométrica se puede ver en la Fig. 1. Aunque la concentración  $C_{geom}$  no mide la respuesta óptica de un sistema de concentración, es muy apropiada en sistemas de concentración, debido a la comparación de esta relación con la concentración del límite termodinámico. Cabe mencionar que en el caso del CPC, la concentración geométrica, coincide con el límite termodinámico [11, 12]. Por lo tanto, consideramos apropiado usar  $C_{geom}$  en nuestro desarrollo. Existen otras relaciones para evaluar la concentración entre ellas: la concentración óptica de rayos o la concentración de densidad del flujo de energía, pero debido al enfoque de nuestro desarrollo ninguna de esas relaciones serán utilizadas en nuestro trabajo.

El aspecto físico del CPC se muestra en la Fig. 1 donde: en el inciso a), se presenta al CPC en 2D, y se puede ver que está formado por un perfil extruido, el perfil se integra por dos segmentos de parábola, los cuales son espejo uno del otro, y se ubican de forma simétrica con respecto a un eje vertical en el centro de ambos; en la misma figura en el inciso b), se puede observar el CPC en 3D, este dispositivo es una superficie formada por la rotación del perfil del CPC en 2D con respecto su eje vertical central. Los parámetros geométricos de ambos CPC's, se pueden ver en la Fig. 1: longitud de apertura de entrada  $a$ , longitud de apertura de salida  $a'$ , longitud de la altura

del CPC que denotamos por  $L$ , y en el caso del CPC en 2D la longitud del ancho del dispositivo le llamamos  $l$ , las áreas son indicadas por  $A$  en el caso del área de incidencia de rayos o superior, y el área de salida de los rayos por  $A'$ .

En la Fig. 2 en el inciso a), se muestra como “caja negra” al CPC en 2D, y las propiedades ópticas del concentrador que se pueden inferir de la figura, son:

- Que todo rayo que incida entre  $PP' = 2a$ , con un ángulo entre  $\pm\theta_{max}$  será concentrado en el área de salida  $\overline{SS'} = 2a'$ , con un ángulo de salida entre  $\pm\theta_{sal}$ .

En la misma figura en el inciso b), presentamos la gráfica de concentración “ideal” del flujo de energía del CPC en 2D con respecto al ángulo de incidencia de los rayos  $\theta_{in}$ , y podemos inferir de la gráfica que:

- Si el flujo de rayos incide en el área superior  $A$  con un ángulo  $\theta_{in}$  entre  $\pm\theta_{max}$ , la concentración del flujo de energía del CPC será igual a la unidad.

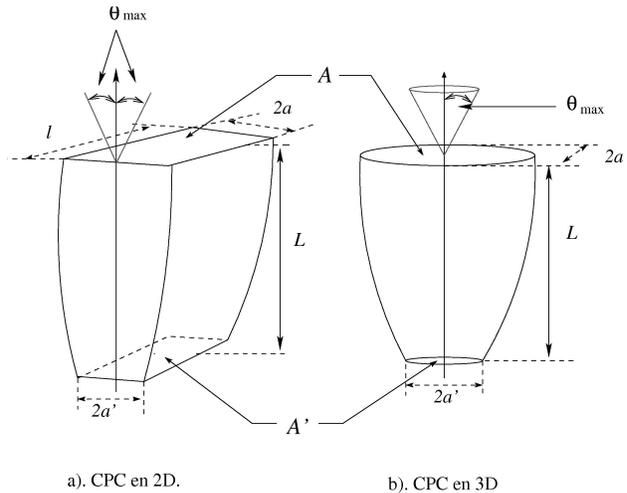


FIGURA 1. Aspecto físico del CPC y sus parámetros geométricos: a) el concentrador CPC en 2D; b) el concentrador CPC en 3D.

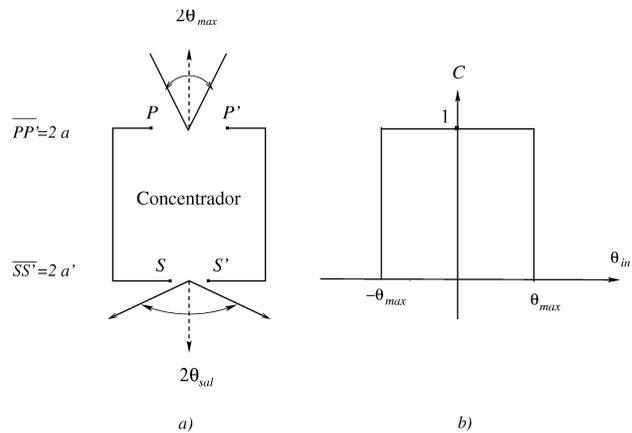


FIGURA 2. Esquema de las bondades del CPC en 2D: a) el concentrador CPC visto como caja negra; b) la concentración del flujo de energía con respecto al ángulo de los rayos incidentes  $\theta_{in}$ .



la recta normal  $N$ , luego generamos una recta paralela a la normal  $N$ ; a esta recta paralela le llamamos  $x_{CPC}$ , que tiene la propiedad de pasar por el foco  $F$  y de interceptar el punto  $Q$  de la parábola. Es conveniente aclarar que el punto  $Q$  se debe encontrar entre el vértice y el lado recto de la parábola, en el primer cuadrante en la Fig. 4. De toda la curva de la parábola sólo el segmento  $PQ$  se utiliza para formar el CPC.

Presentaremos la ley de reflexión de rayos, con el fin de analizar el comportamiento de los rayos que inciden y se reflejan en el segmento  $PQ$ . Esta ley se puede aplicar a nuestro sistema de concentración, debido a que el análisis de reflexión de rayos luminosos sobre las superficies especulares se describe adecuadamente mediante la óptica geométrica. La ley de reflexión de rayos dice que [13]:

“En un mismo medio, si un rayo de luz incide sobre una superficie plana reflectora especular, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, ambos ángulos medidos con respecto a la normal a la superficie y, donde además, los rayos y la normal deberán estar en el mismo plano.”

En nuestro análisis aplicaremos la ley de la reflexión, pero en lugar de incidir el rayo en un plano, supondremos que incide en el plano tangente, del CPC en 2D de la figura 1, que equivale a pensar que los rayos incidan sobre la tangente  $T$  en la Fig. 4.

Entonces, si en la Fig. 4 consideramos un rayo luminoso que sigue la trayectoria sobre la recta  $V$ , e interseca con el punto  $P$ , el rayo reflejado deberá (de acuerdo con la ley de reflexión) seguir la trayectoria de la recta  $R$ , que tiene la propiedad de intersectar a la parábola en el punto  $P$  y al foco  $F$ . También en la Fig. 4 se puede ver que la recta  $R$  y la recta  $N$  forman un ángulo  $\alpha$ ; la recta  $V$  con la recta  $N$  forman un ángulo  $\beta$ . Al usar estas consideraciones geométricas, además que la reflectividad de la superficie que representa el perfil de la tangente  $T$  es igual a la unidad y, si utilizamos la ley de reflexión aplicada a los rayos incidentes que intersectan a la parábola en el segmento  $PQ$ , podemos afirmar que:

- Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales [14], como se ilustra en el inciso a) de la Fig. 4.
- Dado que la curva  $PQ$  es parte de una parábola y que  $F$  es su foco, todos los rayos verticales paralelos a la recta  $V$ , que incidan en algún punto del segmento  $PQ$  de la parábola, son reflejados con direcciones de rectas que pasan por el foco  $F$  y el punto de incidencia [14], como se puede ver en el inciso b) de la Fig. 4.
- Cualquier rayo que siga una trayectoria entre las rectas  $V$  y  $T$ , con un ángulo  $\delta$ , menor a la inclinación de la tangente  $T$  y que incida en cualquier punto del segmento  $PQ$ , será reflejado en una trayectoria que intersecte al segmento  $FQ$ , con una o más reflexiones, como se muestra con los rayos que siguen las trayectorias de las rectas  $D$  y  $E$  en el inciso a) de la Fig. 4, o las rectas inclinadas del inciso c) de la misma figura.

Como vemos la idea física de la reflexión de rayos en el segmento de parábola es muy sencilla. En la Fig. 4 se puede ver que el dispositivo reflector es diseñado para concentrar todos los rayos que entran en el segmento  $HP$  sobre el segmento  $FQ$ , siempre y cuando, los rayos luminosos que inciden en el segmento  $PQ$ , tengan un ángulo  $\delta$  mayor que cero y menor al ángulo que tiene la tangente  $T$ , ambos ángulos con respecto a la vertical  $V$ .

Un aspecto importante es que dado que el número de reflexiones es diferente en cada caso, y que no preserva el ordenamiento espacial, el concentrador no preserva la imagen de los rayos concentrados con respecto a los rayos incidentes. Al utilizar estas características ópticas del segmento  $PQ$  de la parábola podemos desarrollar el CPC, tanto en 2D, como en 3D.

Una vez que ya hemos visto la intensionalidad del CPC a continuación presentamos la descripción geométrica del CPC.

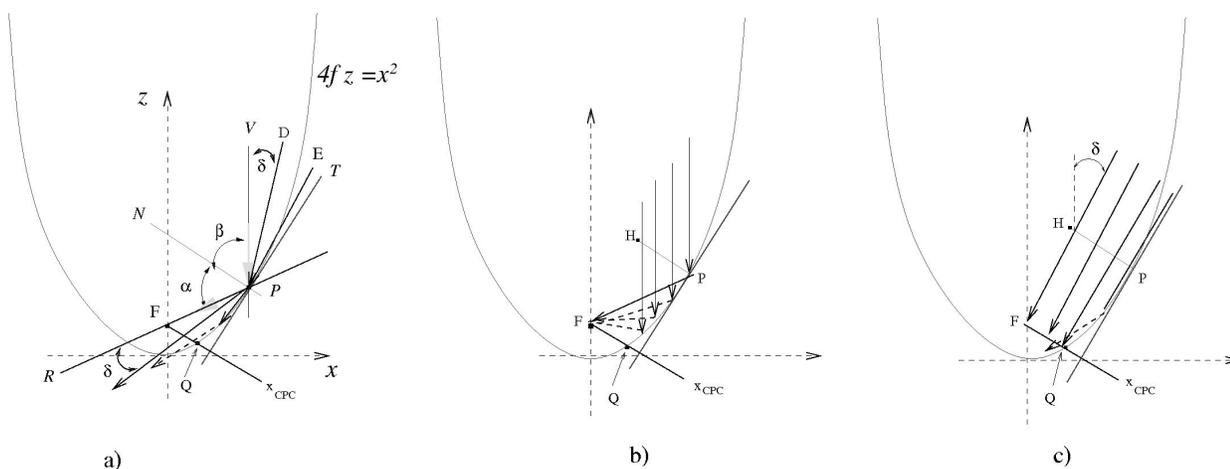


FIGURA 4. Esquema de la reflexión de rayos luminosos sobre la superficie interna de una parábola.

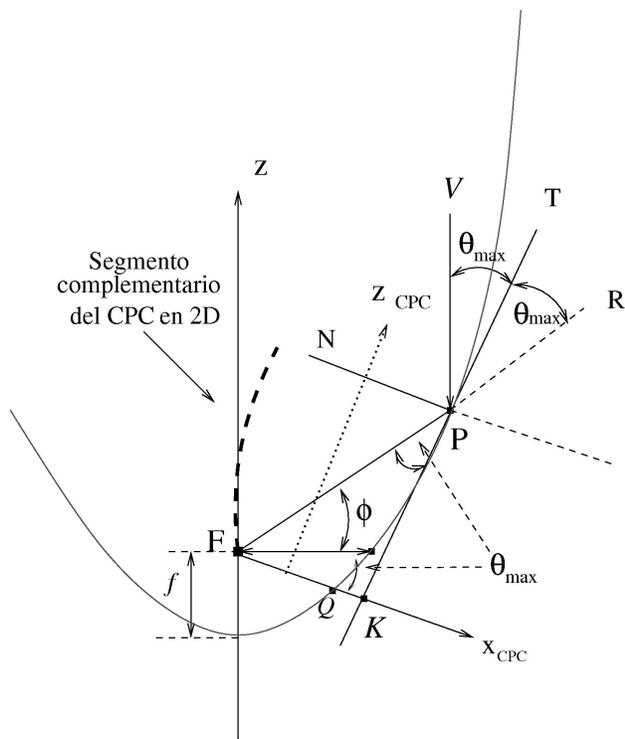


FIGURA 5. Esquema para definir geoméricamente el CPC.

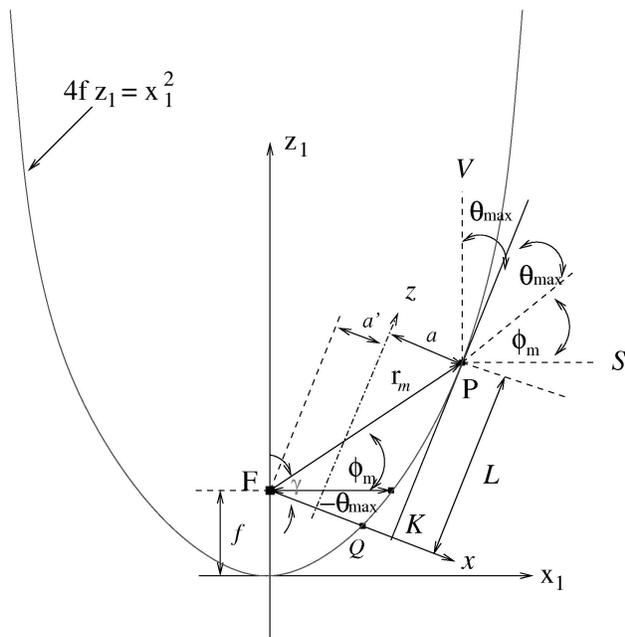


FIGURA 6. Esquema para evaluación de los parámetros del CPC en coordenadas polares.

**2.2. Descripción geométrica del CPC**

Como ya vimos en la subsección anterior, el segmento de parábola  $PQ$  puede ser usado como concentrador de flujo luminoso, con un intervalo en el ángulo  $\theta_{in}$  de  $0 \leq \theta_{in} \leq \theta_{max}$ , siempre que busquemos que los rayos entren en un segmento sobre la recta normal  $N$  a la izquierda del punto  $P$ , y que

el segmento tenga una longitud igual a  $|FP| \cos(\alpha)$ . Claramente necesitamos otra rama reflectora del lado izquierdo para construir un dispositivo que sea útil en las aplicaciones de concentración solar, y al dispositivo que se compone de los dos segmentos simétricos de parábola que puede observarse en la Fig. 5, se le ha llamado concentrador parabólico compuesto o de forma abreviada CPC.

Para desarrollar el CPC, desde el punto de vista geométrico se requiere:

- Generar un eje  $z_{CPC}$  perpendicular a  $x_{CPC}$ , que tenga el origen  $(0, 0)$ , en el punto medio del segmento  $FQ$ .
- Realizar una curva simétrica del segmento de parábola  $PQ$ , con respecto al eje  $z_{CPC}$ , que generará el CPC, como se muestra en las Figs. 3 y 5.
- En la Fig. 5 se puede observar que la tangente  $T$  es paralela al eje  $z_{CPC}$ , y la recta normal  $N$  es paralela al eje  $x_{CPC}$ , con lo cual  $\theta_{max}$  es el mismo entre:
  1. El eje  $x_{CPC}$  con respecto al lado recto de la parábola.
  2. La recta vertical  $V$  con respecto a la recta tangente  $T$ .
  3. La recta tangente  $T$  con respecto a la recta  $R$ .
- Los parámetros geométricos del CPC que se pueden observar en la Fig. 3 son:
  1. Longitud de apertura de salida del flujo luminoso  $a'$ , que corresponde a la mitad de la longitud del segmento  $FQ$  sobre el eje  $x_{CPC}$ .
  2. Longitud de apertura de entrada del flujo luminoso  $a$ , que corresponde a la longitud entre el origen de los ejes del CPC y la proyección del punto  $P$  sobre el eje  $x_{CPC}$ , punto que se indica como  $K$  en la Fig. 3.
  3. Longitud de la altura  $L$  del CPC que corresponde a la distancia entre el origen de los ejes de CPC hasta la proyección del punto  $P$  sobre el eje  $z_{CPC}$ .

Una vez que hemos conceptualizado el CPC a partir de una parábola, se puede encontrar la descripción geométrica del dispositivo CPC.

**2.3. Descripción de la parábola en coordenadas polares**

Para describir la parábola en coordenadas polares  $(r, \phi)$ , es común hacerlo desde el foco  $F$  como origen, además utilizar la convención para el ángulo  $\phi$ , de tener el valor  $\phi = 0^\circ$  en el lado recto de la parábola, y considerar valores positivos en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Si consideramos una parábola que abre hacia las  $z'$ s positivas, y si

llamamos  $f$  a la distancia focal, entonces la parábola en coordenadas polares se puede describir por medio de la relación

$$r = \frac{2f}{1 - \sin(\phi)}. \quad (4)$$

Con la Ec. (4) podemos encontrar los valores de los parámetros geométricos del CPC.

#### 2.4. Parámetros geométricos del CPC

Iniciaremos con la evaluación del valor de  $a'$ , al observar en la Fig. 6 que  $r = 2a'$  se alcanza cuando  $\phi = -\theta_{max}$ , y si consideramos esto en la Ec. (4) obtenemos

$$2a' = \frac{2f}{1 - \sin(-\theta_{max})} = \frac{2f}{1 + \sin(\theta_{max})}, \quad (5)$$

de aquí se infiere que dado  $a'$  y  $\theta_{max}$ , la distancia focal puede expresarse por

$$f = a'(1 + \sin(\theta_{max})). \quad (6)$$

Ahora evaluaremos el valor máximo de  $r$  en el CPC, el cual denominamos  $r_m$ , éste se obtiene al evaluar la Ec. (4) para el ángulo  $\phi_m$ , en la Fig. 6 podemos observar entre las rectas  $V$  y  $S$  que  $\phi_m = (\pi/2) - 2\theta_{max}$ , por tanto,  $r_m$  se encuentra como

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{2f}{1 - \sin(\phi_m)} = \frac{2f}{1 - \sin((\frac{\pi}{2}) - 2\theta_{max})} \\ &= \frac{a'(1 + \sin(\theta_{max}))}{\sin^2(\theta_{max})}. \end{aligned} \quad (7)$$

La concentración del CPC en 2D, se encuentra al evaluar  $a + a'$ , como

$$a + a' = r_m \sin(\theta_{max}) = a' \left( \frac{1 + \sin(\theta_{max})}{\sin(\theta_{max})} \right) \quad (8)$$

y al simplificar llegamos a

$$\frac{a}{a'} = \frac{1}{\sin(\theta_{max})} = C_{2D}, \quad (9)$$

que es la relación para la concentración en del CPC en 2D obtenida por Winston [5]. Sólo nos resta encontrar la relación para evaluar la longitud  $L$  del CPC, lo cual haremos al observar el triángulo  $PFK$  en la Fig. 6, donde vemos que se cumple la relación

$$\tan(\gamma) = \frac{L}{a + a'} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{max}\right) = \frac{1}{\tan(\theta_{max})}, \quad (10)$$

donde  $L$  es la altura del CPC. Al usar la relación (10), podemos escribir la relación para  $L$  como:

$$L = (a + a') \cot(\theta_{max}). \quad (11)$$

Con la relación (11) para  $L$  y las relaciones (6) y (9), se han completado las relaciones para evaluar los parámetros

geométricos del CPC. Cabe mencionar que, si se toma al conjunto de parámetros geométricos  $PG = \{f, \theta, a, a', L\}$  y se elige dos parámetros de los cinco, los tres restantes se encuentran como función de los parámetros seleccionados. Sin embargo, se pueden obtener de forma más simple si seleccionamos los pares de parámetros independientes  $(f, \theta)$ ,  $(a, \theta)$  y  $(a', \theta)$ , y obtener los parámetros restantes a través de las relaciones (6), (9) y (11).

Continuaremos con la determinación de las ecuaciones paramétricas del CPC en 2D en coordenadas polares.

#### 2.5. Ecuaciones paramétricas del CPC en coordenadas polares

Podemos observar en la Fig. 7 los ejes del CPC,  $x$  y  $z$ , con la aclaración de que  $x = x_{CPC}$  y  $z = z_{CPC}$ , y el origen de este sistema de coordenadas está en el punto medio del segmento  $FQ$ , además, también consideraremos que  $\theta_{max} = \theta$ , lo cual simplificará la expresión de las ecuaciones. En coordenadas polares la descripción que se obtiene para  $x$  y  $z$  es en forma paramétrica. Para obtener la relación correspondiente a cada variable utilizaremos la ecuación de la parábola en coordenadas polares y alguna relación trigonométrica.

En la Fig. 7 podemos observar en el triángulo  $FWP_0$ , que el valor de  $z$ , se puede obtener como

$$z = r \sin(\phi + \theta) = \left( \frac{2a'(1 + \sin(\theta))}{1 - \sin(\phi)} \right) \sin(\phi + \theta), \quad (12)$$

donde hemos utilizado las relaciones (4) y (6) para considerar  $r$ .

Utilizando el mismo triángulo  $FWP_0$  en la Fig. 7, para  $x$  se tiene

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi + \theta) - a' \\ &= \left( \frac{2a'(1 + \sin(\theta))}{1 - \sin(\phi)} \right) \cos(\phi + \theta) - a', \end{aligned} \quad (13)$$

Las ecuaciones paramétricas (12) y (13) tienen un intervalo de aplicación para  $\phi$  en  $(-\theta, (\pi/2 - 2\theta))$ . El ángulo de aceptación del CPC es  $\pm\theta$ . se puede observar en  $x = x(\phi, \theta, a')$  y  $z = z(\phi, \theta, a')$ , que tanto  $\theta$  como  $a'$  son parámetros que determinan el CPC específico, y que  $\phi$  es una variable para construir la curva geométrica del segmento de parábola que genera el CPC. Éstas son las ecuaciones paramétricas del CPC en 2D, y con esto terminamos nuestro desarrollo en coordenadas polares.

Aunque las expresiones de las ecuaciones paramétricas del CPC en 2D en coordenadas polares se obtienen de forma simple, las coordenadas cartesianas son más usadas en la descripción geométrica y analítica de las curvas; motivados por todo esto, a continuación presentaremos el desarrollo del CPC en coordenadas cartesianas.

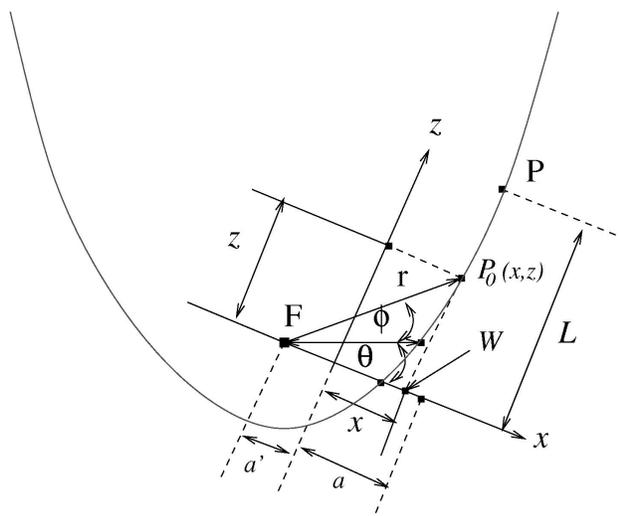


FIGURA 7. Parametrización del CPC en coordenadas polares.

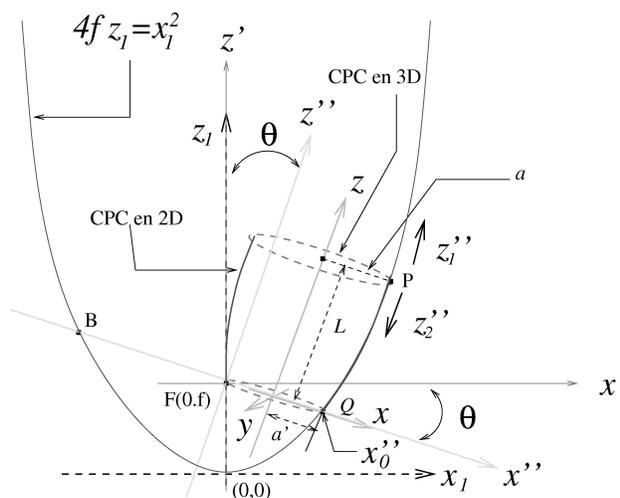


FIGURA 8. Ejes de referencia de la parábola en las transformaciones de coordenadas y generación del CPC en 2D y superficie en 3D.

### 3. Descripción del CPC en cartesianas

El análisis en coordenadas polares del comportamiento del flujo luminoso que llega al CPC, y la forma en que este flujo es concentrado por el CPC, nos permitió conocer las propiedades y características importantes del dispositivo. Sin embargo, las relaciones (12) y (13) sólo describen geoméricamente el segmento de parábola  $PQ$  de la Fig. 5, y no el complemento del CPC en 2D, marcado con línea punteada en la misma figura. Lo deseable para hacer el diseño de un dispositivo CPC, es saber la descripción analítica de la curva completa, lo cual, sí es posible en coordenadas cartesianas. A continuación desarrollaremos las expresiones analíticas del CPC en coordenadas cartesianas tanto en 2D como en 3D, y obtendremos los parámetros geométricos en este sistema coordinado por completéz.

### 3.1. Relaciones que describen el CPC en 2D y en 3D

Para desarrollar el CPC iniciaremos tomando una parábola vertical con origen ubicado en su vértice, sobre los ejes  $x_1$  y  $z_1$  (en líneas a trazos), como se muestra en la Fig. 8. Luego por medio de tres transformaciones de coordenadas obtendremos una expresión de la parábola en los ejes finales  $x$  y  $z$  (ejes en color verde), después haremos dos aplicaciones de la función composición para obtener el CPC en 2D y el CPC en 3D.

Las etapas específicas de nuestro desarrollo hasta obtener las expresiones analíticas del CPC en 2D y 3D son:

1. Consideraremos una parábola vertical en 2D, como se muestra en el inciso a) de la Fig. 9.
2. Describiremos la parábola desde los ejes  $x'$  y  $z'$  que tienen origen en el foco de la parábola; para hacer esto, usaremos las relaciones de transformación de los ejes  $x'$  y  $z'$  con respecto a los ejes  $x_1$  y  $z_1$ , y sustituiremos los valores  $x_1$  y  $z_1$  para encontrar la expresión analítica de la parábola en los ejes primados ( $x', z'$ ), lo cual se puede ver el inciso a) de la Fig. 9.
3. Después en el sistema coordinado con ejes  $x''$  y  $z''$  describiremos la parábola, para ello, utilizaremos las relaciones de transformación de los ejes  $x'$  y  $z'$  con respecto a los ejes  $x''$  y  $z''$  que tienen una rotación de un ángulo  $\theta$ , posteriormente sustituiremos los valores de  $x'$  y  $z'$  en la ecuación analítica de la parábola expresada en los ejes ( $x', z'$ ), para obtener así la expresión de la parábola expresada en las coordenadas  $x''$  y  $z''$ . En el inciso b) de la Fig. 9 se puede observar la transformación.
4. Luego, encontraremos el valor del punto que llamaremos  $x_0''$ , de cruce por cero de la ecuación de la parábola en los ejes  $x''$  y  $z''$ , indicado en el inciso c) de la Fig. 9, y una vez obtenido el valor de  $x_0''$  fijaremos el origen de los ejes  $x$  y  $z$  en el punto  $(x_0''/2, 0)$  de los ejes biprimados.
5. A continuación obtendremos la descripción de la parábola dentro del sistema de coordenadas  $x$  y  $z$ , usando para esto, las relaciones de transformación de la traslación de los ejes biprimados  $x$  y  $z$  con respecto a  $x''$  y  $z''$ . Luego sustituiremos los valores de  $x''$  y  $z''$  en la relación de la parábola, para obtener finalmente la expresión de la parábola en el sistema de coordenadas de los ejes  $x$  y  $z$ , esto se puede observar en el inciso c) de la Fig. 9.
6. Encontraremos en los ejes  $x$  y  $z$ , la función que describe el CPC en 2D, como se muestra en el inciso d) y e) de la Fig. 9.
7. Y finalmente encontraremos la función que describe el CPC en 3D al realizar una rotación del CPC de 2D alrededor del eje  $z$ , lo que puede verse en el inciso f) de la Fig. 9.

Con respecto al ángulo de rotación  $\theta$ , debemos recordar que  $|\theta| = \theta_{max}$ , ya que  $\theta$  toma valores negativos, en el sistema de referencia que estamos utilizando.

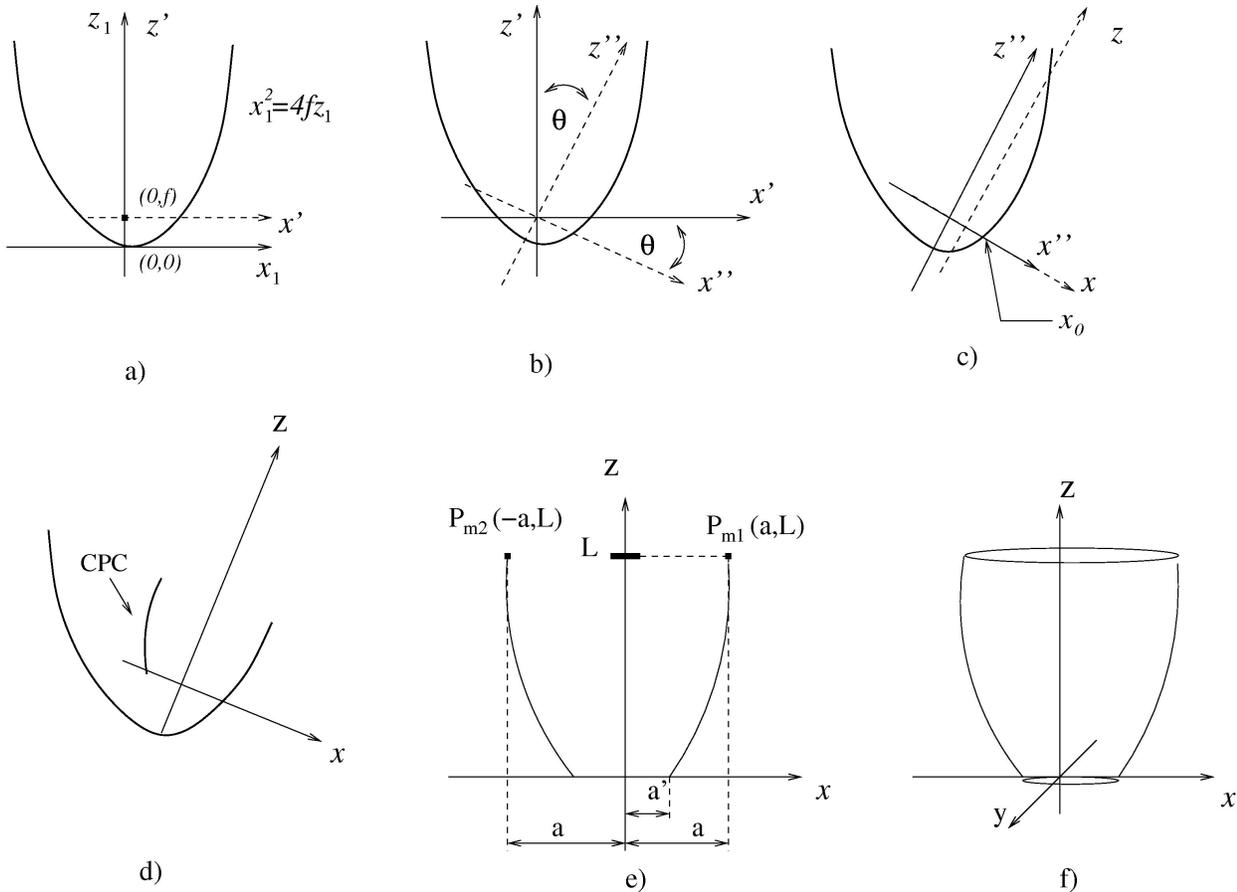


FIGURA 9. a) Traslación al foco  $F$ , b) Rotación de los ejes primados un ángulo  $\theta$ , c) Traslación de los ejes biprimados al punto  $x_0/2$ , d) Desarrollo del CPC en los ejes finales, e) Representación geométrica del CPC en 2D, f) Representación geométrica del CPC en 3D.

Como se muestra en la Fig. 9, los ejes cartesianos  $x_1$  y  $z_1$  se ubican en el vértice de la parábola, y como la parábola abre hacia el lado positivo del eje  $z_1$ , puede ser descrita por la expresión [14, 15]:

$$4fz_1 = x_1^2, \tag{14}$$

donde  $f$  es la distancia focal de la parábola.

Ahora al seguir con el paso dos, describimos la parábola desde los ejes  $x'$  y  $z'$ , con el origen en el punto  $(0, f)$ . Por tanto lo que haremos es una traslación de los ejes  $x_1$  y  $z_1$  hasta el nuevo origen  $(0, f)$ , esto se puede ver en el inciso a) de la Fig. 9.

Al ser una traslación de coordenadas, las relaciones de transformación entre  $x'$  y  $z'$  con los ejes  $x_1$  y  $z_1$  son las relaciones [14, 15]

$$x_1 = x', \quad z_1 = z' + f. \tag{15}$$

Para obtener la relación que describe la parábola en sistema cartesiano primado, sustituiremos las relaciones de transformación (15) en la relación (14), y al hacer esto obtenemos

$$4fz' = (x')^2 - 4f^2. \tag{16}$$

De acuerdo al paso tres tenemos que describir el CPC desde los ejes de referencia que tiene un ángulo  $-\theta$ , rotaremos

un ángulo  $\theta$  a los ejes cartesianos  $x'$  y  $z'$ , hasta obtener los nuevos ejes coordenados que les llamaremos  $x''$  y  $z''$ , ambos sistemas cartesianos se pueden ver en el inciso c) de la Fig. 9 y, la rotación es descrita por las relaciones [14, 15]:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos(\theta) - z'' \sin(\theta), \\ z' &= x'' \sin(\theta) + z'' \cos(\theta), \end{aligned} \tag{17}$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los ejes coordenados primados con respecto a los ejes cartesianos biprimados. Para obtener la representación analítica de la parábola en el sistema cartesiano formado por los ejes  $x''$  y  $z''$ , debemos sustituir la relación (17) en la relación (16), y al hacer esto obtenemos

$$\begin{aligned} 4f(x'' \sin(\theta) + z'' \cos(\theta)) \\ = (x'' \cos(\theta) - z'' \sin(\theta))^2 - 4f^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Si desarrollamos y simplificamos la relación (18) encontraremos que la representación analítica de la parábola es

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta)(z'')^2 - [\sin(2\theta)x'' + 4f \cos(\theta)] z'' \\ + [\cos^2(\theta)(x'')^2 - 4f \sin(\theta)x'' - 4f^2] = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

La relación (19) es una expresión analítica implícita cuadrática con un término lineal con coeficiente distinto de cero, lo cual implica que en el sistema cartesiano formado por los ejes biprimados, la parábola está inclinada.

Pero las funciones en el plano sólo se pueden representar como una función de uno a uno, es decir,  $f : R \rightarrow R$ , entonces el lugar geométrico de la parábola, en el sistema de ejes coordenados biprimados deberá expresarse por dos funciones  $z_1''(x)$  y  $z_2''(x)$ , para lo cual debemos resolver la relación (19) y obtener las dos relaciones para representar la parábola. Al resolver la ecuación (19) se encuentra que [16]:

$$z_1''(x'') = \frac{(\text{sen } 2\theta)(x'') + 4f \cos(\theta) + 4f \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta)x''}{f} + 1}}{2 \text{sen}^2 \theta}, \quad (20)$$

$$z_2''(x'') = \frac{(\text{sen } 2\theta)(x'') + 4f \cos(\theta) - 4f \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta)x''}{f} + 1}}{2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (21)$$

Las Ecs. (20) y (21) describen el lugar geométrico de una parábola inclinada, en los ejes  $x''$  y  $z''$ , como mostramos en la Fig. 8.

La relación (20) describe la parte superior de la parábola que no intercepta el eje  $x''$ , y en la Fig. 9 mostramos el lugar geométrico del segmento de parábola arriba del punto  $P$ , y que crece con valores de  $z''$  y decrece con valores de  $x''$ . La relación (21) es la expresión analítica de la parábola que cruza el eje  $x''$  en los puntos  $B$  y  $Q$ ; el lugar geométrico de esta relación lo mostramos en la Fig. 8 por debajo del punto  $P$ . Para nuestro trabajo la relación (21) es la usaremos para la descripción geométrica del CPC, por tanto, ésta será considerada la solución  $z'' = z''(x'')$ .

Una vez que contamos con la ecuación de la parábola expresada en los ejes biprimados, debemos realizar una traslación sobre el eje  $x''$ , hasta el punto medio entre el origen biprimado y el punto  $x_0''$ , como lo indica el paso cuatro.

Como se puede ver en la Fig. 8, el eje  $z$  del CPC intercepta el punto medio entre el origen y el punto  $x_0''$  del eje  $x''$ , en el sistema de coordenadas biprimadas, entonces, para localizar el origen del sistema de coordenadas  $x$  y  $z$ , debemos saber explícitamente cual es la expresión de  $x_0''$ . En la Fig. 8 podemos observar que el punto  $x_0''$  tiene las coordenadas  $(x_0'', z'' = 0)$  en el sistema biprimado, por tanto, para obtener el valor de  $x_0''$  en este sistema, consideraremos  $z'' = 0$  en la relación (19), y al hacer esto obtenemos

$$\cos^2(\theta)(x'')^2 - 4f \text{sen}(\theta)x'' - 4f^2 = 0. \quad (22)$$

Podemos observar que la relación (22) es cuadrática, entonces, al resolver ésta se obtienen dos valores que pertenecen a la curva de la parábola y que cruzan el eje  $x''$ , estos puntos los hemos llamado  $B$  y  $Q$  en la Fig. 8. Al resolver la relación (22) obtenemos [16]

$$x_0'' = \frac{2f(\text{sen } \theta + 1)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2f(1 + \text{sen } \theta)}{(1 - \text{sen } \theta)(1 + \text{sen } \theta)} = \frac{2f}{1 - \text{sen } \theta}, \quad (23)$$

$$x_1'' = \frac{2f(\text{sen } \theta - 1)}{\cos^2(\theta)} = \frac{-2f(1 - \text{sen } \theta)}{(1 - \text{sen } \theta)(1 + \text{sen } \theta)} = \frac{-2f}{1 + \text{sen } \theta}, \quad (24)$$

la relación (23) corresponde a  $x_0''$ , también ha sido llamado  $Q$ , y éste tiene un valor positivo, el otro punto  $x_1''$  corresponde al punto  $B$  de la Fig. 8, y este punto no es de utilidad en nuestro caso. Puede observarse en la Fig. 8, que el sistema de coordenadas formado por los ejes  $x$  y  $z$ , es una traslación de este sistema, sobre el eje  $x''$  del sistema de coordenadas biprimados por una distancia  $a'$ , por tanto, debemos saber el valor de  $a'$ , el cual se puede conocer, si observamos en la Fig. 8 que  $2a' = x_0''$ , de lo cual inferimos que

$$a' = \frac{x_0''}{2} = \frac{f}{1 - \text{sen}(\theta)}. \quad (25)$$

Si asignamos el valor negativo de  $\theta$  en la relación (25), como corresponde a la rotación del sistema de referencia  $(x', y')$ , por lo tanto,  $\theta = -\theta_{max}$ , con lo cual la relación (25) es la misma, al reacomodar términos, a la relación (6) que obtuvimos en coordenadas polares y, por lo tanto, también es igual a la relación obtenida por Winston [5] para este parámetro.

Una vez que determinamos el valor de  $a'$ , continuaremos con el paso cinco al hacer la traslación de los ejes cartesianos biprimados hasta el sistema de coordenadas final con ejes  $x$  y  $z$ , y como entre los dos sistemas de coordenadas se tiene una traslación sobre el eje  $x''$ , entonces las relaciones de transformación de coordenadas son

$$x'' = x + a', \quad z'' = z, \quad (26)$$

y si hacemos uso de las relaciones de transformación (26), sustituyendo éstas en la relación (21) obtenemos:

$$z(x) = \frac{(\text{sen } 2\theta)(x + a') + 4f \cos(\theta) - 4f \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta)(x+a')}{f} + 1}}{2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (27)$$

La relación (27) nos describe la parábola en los ejes  $x$  y  $z$ , esta relación nos será útil para desarrollar el CPC en 2D y también el CPC en 3D.

3.1.1. Expresión analítica para un CPC en 2D

Se puede observar en las Figs. 9 y en el inciso d) de la Fig. 9, que en el CPC en 2D, el segmento  $PQ$  de la parábola tiene una curva simétrica con respecto al eje del CPC, y el eje del CPC está sobre el eje  $z$ , también se puede observar en las mismas figuras que el intervalo del lugar geométrico es

$$\begin{aligned}
 -x_{max} = -a \leq x \leq -a', \quad a' \leq x \leq x_{max} = a, \\
 0 \leq z \leq z_{max} = L,
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

y si observamos en el inciso d) de la Fig. 9 sólo el lugar geométrico del primer cuadrante de la parábola, es aprovechado en la generación del CPC, por tanto, a la relación (27) le asignaremos sólo el intervalo de las relaciones (28). Para completar la curva del CPC del segundo cuadrante mostrada en la Fig. 8 y en el inciso d) de la Fig. 9, formaremos una *función compuesta* [17–19] de la relación (27) con la función valor absoluto  $|x|$ . A continuación desarrollaremos el paso seis al hacer la sustitución de  $|x|$  en lugar de  $x$  en la relación (27) para obtener así la relación del CPC en 2D como

$$z(x) = \frac{(\text{sen } 2\theta)(|x| + a') + 4f \cos(\theta) - 4f \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta)(|x| + a')}{f} + 1}}{2 \text{sen}^2 \theta},
 \tag{29}$$

donde  $x$  es la variable independiente,  $\theta$  y  $f$  son parámetros geométricos que determinan un CPC particular. El lugar geométrico del CPC en 2D se muestra en el inciso e) de la Fig. 9.

Una vez que se conoce una función  $z = z(x, \theta, f)$  para representar al CPC en 2D, consideramos conveniente expresar la relación (29) como función de los parámetros geométricos del CPC, para esto, debemos conocer las relaciones para evaluar  $L$ ,  $a$  y  $a'$ , que ya han sido desarrollados en coordenadas polares, pero por completez, también se obtendrán en coordenadas cartesianas.

Para obtener los valores de los parámetros geométricos  $L$  y  $a$ , observaremos los dos puntos máximos,  $P = P_{m1}(a, z_{max} = L)$  y  $P_{m2}(-a, z_{max} = L)$  que se muestran en el inciso e) de la Fig. 9, con la aclaración que el punto  $P_{m1}$  es el mismo punto  $P$  de la Fig. 8. De la cons-

trucción del CPC sabemos que en los puntos  $P_{m1}$  y  $P_{m2}$  la tangente es paralela al eje  $z$  del CPC, por tanto, en estos dos puntos se tiene la condición

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=\pm a} = \infty,
 \tag{30}$$

o de manera equivalente podemos decir que

$$\frac{1}{\frac{dz}{dx} \Big|_{x=\pm a}} = 0.
 \tag{31}$$

La relación (31) es válida sólo en los puntos  $P_{m1}$  y  $P_{m2}$ , por tanto, si encontramos  $1/(dz/dx) = 0$ , localizaremos los valores de  $|x_{max}| = \pm a$ . De la relación (29) evaluamos  $dz/dx$ , luego, encontramos el recíproco de la derivada evaluada y se iguala a cero, lo que analíticamente expresamos como

$$\frac{1}{\frac{dz}{dx}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f}(|x| + a') + 1}}{\text{sgn}(x) \left[ \cot(\theta) \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f}(|x| + a') + 1} - \csc(\theta) \right]} = 0,
 \tag{32}$$

donde  $\text{sgn}(x)$  es la función signo la cual no está definida en  $x = 0$ , pero este punto no está incluido en el dominio del CPC. Si desarrollamos la relación (32) podemos llegar a

$$\sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f}(|x| + a') + 1} = 0,
 \tag{33}$$

como los valores de  $x$  que se obtendrán de la relación (33), son los valores extremos, podemos considerar que  $|x| = |x_{max}|$ , por tanto, al desarrollar la relación (33) encontramos que

$$\begin{aligned}
 |x_{max}| &= -a' - \frac{f}{\text{sen}(\theta)} \\
 &= -\frac{f}{(1 - \text{sen}(\theta))} - \frac{f}{\text{sen}(\theta)} = \frac{-a'}{\text{sen}(\theta)},
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

con lo cual, los valores extremos en el eje  $x$ , corresponden a

$$x_{1,max} = a = -\frac{a'}{\text{sen}(\theta)},
 \tag{35}$$

$$x_{2,max} = -a = \frac{a'}{\text{sen}(\theta)}. \tag{36}$$

las relaciones (36) nos muestran los valores extremos positivo y negativo en la coordenada  $x$  del CPC en 2D, y debido a que en coordenadas polares el valor negativo no tiene sentido, sólo el valor positivo ha sido reportado [8, 11].

Si observamos en las relaciones (34) y (36) la expresión del parámetro  $a$ , y comparamos esta expresión con la definición de concentración del CPC en 2D, mostrada en la relación (2), se observa que es la misma, lo que muestra que también encontramos en coordenadas cartesianas la relación para evaluar la concentración máxima del CPC en 2D.

Para obtener el valor del parámetro  $L$ , debemos observar que en los dos puntos máximos  $P_{m1}$  y  $P_{m2}$ , como se puede observar en el álgebra de la relación (34), se cumple la igualdad

$$|x_{max}| + a' = \frac{-f}{\text{sen}(\theta)}. \tag{37}$$

por otro lado si simplificamos la relación (29) podemos obtener:

$$z(x) = \frac{\cos(\theta)(|x| + a')}{\text{sen}(\theta)} + \frac{2f \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} - \frac{2f}{\text{sen}^2(\theta)} \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f} (|x| + a') + 1}. \tag{38}$$

Para encontrar el valor que tiene  $z(x)$  en el punto  $x = x_{max}$ , en la relación (38) debemos sustituir el valor  $x = x_{max}$ , y al hacerlo se obtiene

$$z(x_{max}) = L = \frac{\cos(\theta)(|x_{max}| + a')}{\text{sen}(\theta)} + \frac{2f \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} - \frac{2f}{\text{sen}^2(\theta)} \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f} (|x_{max}| + a') + 1}, \tag{39}$$

con el fin de simplificar la relación (39), sabemos que en los extremos se cumple la relación (37), por tanto, al hacer uso de esta última dentro de la relación (37) obtenemos

$$\begin{aligned} z_{max} = L &= \frac{\cos(\theta)(\frac{-f}{\text{sen}(\theta)})}{\text{sen}(\theta)} + \frac{2f \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} \\ &- \frac{2f}{\text{sen}^2(\theta)} \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{f} (\frac{-f}{\text{sen}(\theta)}) + 1} \\ &= \frac{f \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} = \frac{a'(1 - \text{sen}(\theta)) \cot(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \\ &= (a + a') \cot(\theta_{max}). \end{aligned} \tag{40}$$

Una vez más el valor de  $L$  que se ha obtenido, es el valor ya reportado en la literatura [7, 8, 11], el cual también fue obtenido en nuestro desarrollo de coordenadas polares, como podemos observar en la relación (11).

CPC en 2D

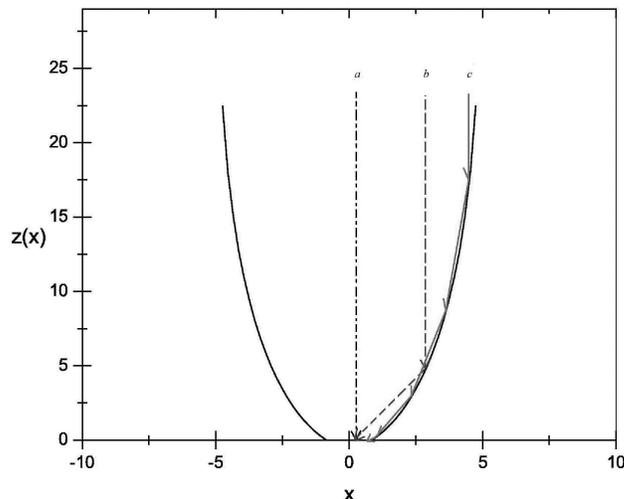


FIGURA 10. Gráfica del CPC en 2D con los parámetros  $\theta = -10^\circ$  y  $f = 1$ . Se muestran tres formas que los rayos del Sol inciden en el área de concentración, a) directos, b) con una reflexión y c) con múltiples reflexiones.

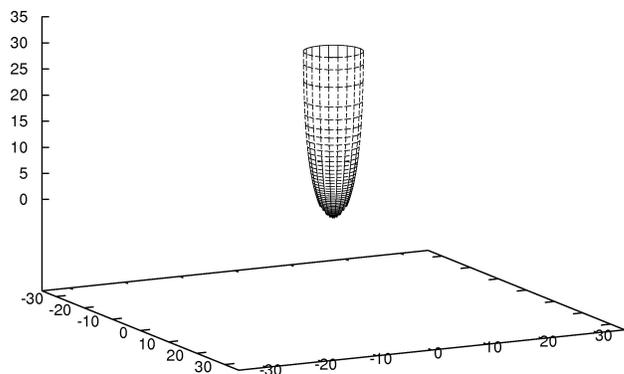


FIGURA 11. Gráfica del CPC en 3D con los parámetros  $\theta = -10^\circ$  y  $f = 1$ .

En coordenadas cartesianas ya obtuvimos una expresión analítica para describir el CPC en 2D, ésta se expresa como  $z = z(x, f, \theta)$ , donde los parámetros  $f$  y  $\theta$  determinan el dispositivo en particular, pero en aplicaciones solares no es común utilizar  $f$  como parámetro de diseño, en la determinación del CPC, y con mayor frecuencia se consideran primero los parámetros  $a$ ,  $a'$  y  $L$ , y después se realiza el diseño del CPC en particular. Por lo tanto, una expresión del CPC donde estos últimos parámetros estén involucrados facilitará la aplicación en el diseño de cualquier dispositivo CPC.

A continuación presentamos la expresión del CPC utilizando los parámetros geométricos.

### 3.1.2. Relación del CPC en 2D considerando los parámetros geométricos

Para encontrar una relación del CPC en coordenadas cartesianas que involucren a los parámetros  $a$ ,  $a'$  y  $L$ , debemos primero observar que dentro del desarrollo de las relaciones (34)

y (40) se encuentran las igualdades siguientes:

$$\frac{-1}{\text{sen}(\theta)} = \frac{a}{a'}, \tag{41}$$

$$\frac{-f}{\text{sen}(\theta)} = (a + a'), \tag{42}$$

$$\frac{f \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} = L, \tag{43}$$

$$\cot(\theta) = \frac{-L}{a + a'}, \tag{44}$$

y si sustituimos las relaciones (41), (42), (43) y (44) en la relación (38) obtenemos

$$z = 2L - \left[ \left( \frac{L}{a + a'} \right) (|x| + a') \right] - 2 \frac{a(a + a')}{a'} \sqrt{1 - \left[ \frac{|x| + a'}{a + a'} \right]}. \tag{45}$$

Podemos observar que la relación (45) también es una expresión que describe el CPC en 2D en coordenadas cartesianas, y ésta sólo contiene la variable independiente  $x$  y los parámetros geométricos del CPC  $a$ ,  $a'$  y  $L$ . Aunque es conveniente aclarar que de los parámetros geométricos  $a$ ,  $a'$  y  $L$ , más  $\theta$  y  $f$ , sólo dos son independientes y cualquiera de los tres restantes se obtienen por medio de las relaciones (25), (41), (42), (43) y (44), o al resolver estas ecuaciones en forma simultánea.

El desarrollo del CPC en 2D se ha completado y a continuación presentaremos la expresión del CPC en 3D en coordenadas cartesianas.

### 3.1.3. Generación de la función que describe la superficie del CPC en 3D

Finalmente desarrollaremos el paso siete al encontrar la relación de la superficie de un CPC en 3D en coordenadas cartesianas, para esto, giraremos hipotéticamente la curva del CPC en 2D alrededor del eje  $z$ . Para obtener la expresión algebraica de la superficie en 3D del CPC, usaremos una *función compuesta* [17–19] de la función  $z(x)$  del CPC en 2D con la función  $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . De forma específica lo que haremos será, sustituir en la relación (45) la expresión  $\sqrt{x^2 + y^2}$  en el lugar de  $|x|$ , lo cual es equivalente a realizar una rotación alrededor del eje  $z$ , y al hacer esto obtenemos

$$z = 2L - \left[ \left( \frac{L}{a + a'} \right) (\sqrt{x^2 + y^2} + a') \right] - 2 \frac{a(a + a')}{a'} \sqrt{1 - \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + a'}{a + a'} \right]}. \tag{46}$$

La relación (46) es la correspondiente a la superficie del CPC en 3D, y el dominio de esta relación es

$$0 \leq z \leq L, \quad a' \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a. \tag{47}$$

También podemos sustituir en la relación (29) la expresión  $\sqrt{x^2 + y^2}$  en el lugar de  $|x|$  y obtenemos

$$z(x) = \frac{(\text{sen } 2\theta)(\sqrt{x^2 + y^2} + a') + 4f \cos(\theta) - 4f \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta)(\sqrt{x^2 + y^2} + a')}{f} + 1}}{2 \text{sen}^2 \theta}, \tag{48}$$

con el mismo dominio de la relación 46. Una vez que se han deducido las relaciones para describir la curva del CPC en 2D, y la superficie del CPC en 3D, mostraremos dos aplicaciones.

## 4. Ejemplos

Nuestra primer aplicación será para un CPC en 2D, utilizando los parámetros  $\theta = -10^\circ$  y  $f = 1$ . La expresión analítica del CPC la obtendremos por medio de la relación (45), y al sustituir los valores de los parámetros en ésta obtenemos

$$z = 65.31 - [5.672(|x| + 0.852)] - 66.31 \sqrt{1 - 0.1736(|x| + 0.852)}; \tag{49}$$

la gráfica de la relación (49) se muestra en la Fig. 10. En este caso los parámetros geométricos del CPC son

En la Fig. 10 se muestran tres formas de incidencia de los rayos del Sol en el lugar de la concentración. Los rayos del

tipo a) entran directamente, los de tipo b) entran con una reflexión y los del tipo c) que inciden cerca del borde del CPC, con un ángulo similar al eje de la parábola, pueden tener más de dos reflexiones antes de llegar al área de captación.

En el CPC en 3D, usamos los parámetros  $\theta = -10^\circ$  y  $f = 1$ , y al sustituir estos parámetros en la relación (46), obtenemos

$$z = 65.31 - [5.672(\sqrt{x^2 + y^2} + 0.852)] - 66.31 \sqrt{1 - 0.1736(\sqrt{x^2 + y^2} + 0.852)}, \tag{50}$$

y la gráfica de la función del CPC en 3D se muestra en la Fig. 11.

Debemos hacer notar que la aplicación del CPC en quipos solares, tiene que considerar instalar un elemento secundario en el área de apertura de salida, el cual puede ser una superficie plana, pintada de color negro para que absorba la ener-

TABLA I.

Parámetro	Valor
$\theta$	$-10^\circ$
$a$	4.906
$a'$	0.852
$L$	32.66
$f$	1
$C_{2D,max}$	5.7588
$C_{3D,max}$	33.1634

gía concentrada, y después ésta se transmite hasta un proceso útil, que puede ser de calentamiento, u otro, como cocción de alimentos en hornos solares diseñados para este fin. También existen aplicaciones donde en el área de apertura de salida del CPC, se instalan celdas fotovoltaicas y éstas generan energía eléctrica.

## 5. Conclusiones

En este trabajo realizamos un análisis del comportamiento de la incidencia y reflexión de rayos luminosos en la superficie interna de una parábola extruida, y producto de este análisis, obtuvimos las características del concentrador formado por un segmento de parábola.

Con el análisis de reflexión sobre una parábola extruida, desarrollamos las ecuaciones cartesianas del dispositivo denominado concentrador parabólico compuesto o CPC.

En coordenadas polares desarrollamos las expresiones paramétricas que describen el CPC, considerando un sistema

de coordenadas convencional, y en el mismo sistema de coordenadas encontramos las relaciones para evaluar los parámetros geométricos del CPC en 2D:  $a$ ,  $a'$  y  $L$ .

Desarrollamos las expresiones analíticas del CPC en 2D y 3D en coordenadas cartesianas, y por completez en el mismo sistema coordinado, obtuvimos los parámetros geométricos del CPC.

Describimos con mayor detalle las propiedades geométricas del CPC, y con esto, hicimos más sencillo el desarrollo del CPC, tanto en coordenadas polares, como en coordenadas cartesianas.

Presentamos aplicaciones de diseño de dos concentradores tipo CPC en 2D y 3D, utilizando las expresiones en coordenadas cartesianas, desarrolladas en el presente trabajo.

El desarrollo del CPC en coordenadas cartesianas, puede ser aprovechado para mostrar de manera didáctica cómo una curva (en nuestro caso una parábola) se puede visualizar desde sistemas de ejes cartesianos diferentes.

También utilizando el desarrollo del CPC en coordenadas cartesianas, desarrollamos un programa en JAVA, el cual puede ser usado para diseño de concentradores tipo CPC en 2D y 3D. El programa está disponible en la dirección: <http://www.cie.unam.mx/aqr/cpc/CPCAp1t.html>.

## Agradecimientos

Agradecemos los valiosos comentarios de los Drs. Sergio Cuevas García y Mariano López de Haro sobre el trabajo. Así también le agradecemos al Ing. Alfredo Quiroz Ruiz por su apoyo al realizar el programa para visualización y diseño de CPC's, usando las ecuaciones de coordenadas cartesianas desarrolladas en el presente trabajo.

- H. Hinterberger y R. Winston, *Rev. Sci. Instrum.* **37** (1966) 1094.
- H. Hinterberger y R. Winston, *Proc. int. Conf. Instrum. High Energy Phys.* (1966b) 205.
- M. Ploke, *Optik* **25** (1967) 31.
- V.K. Baranov y G.K. Melnikov, *Sov. J. Opt. Technol.* **33** (1966) 408.
- R. Winston, *Solar Energy* **16** (1974) 89.
- A. Rabl, *Solar Energy* **18** (1976) 497.
- D. Rapp, *Solar Energy* (Englewood Cliffs., New Jersey, USA., 1981) p. 331.
- W.T. Welford y R. Winston, *High Collection Nonimaging Optics* (Academic Press, Inc., USA., 1989).
- J.C. Miñano *Desing of three-dimensional Concentrators* en A. Luque "Solar Cells and Optics for Photovoltaic Concentration" (Adam Hilger, Bristol, 1989).
- D. Suresh, J. O'Gallagher y R. Winston, *Solar Energy* **44** (1990) 257.
- R. Winston, J.C. Miñano y P. Benítez, *Nonimaging Optics* (Elsevier Academic Press., USA., 2005).
- A. Rabl, *Active Solar Collectors and their Applications* (Oxford University Press, New York, USA. 1985) p. 125.
- E. Hecht, *Óptica* (Editorial ADDISON WESLEY IBEROAMERICANA S.A., Madrid, España, 2000) p. 99.
- C.H. Lehmann, *Geometría Analítica* (Editorial LIMUSA S. A. de C. V., México, D.F., 1986) p. 167.
- W. Wooton, E.F. Beckenbach y F.J. Fleming, *Geometría Analítica Moderna* (Publicaciones Cultural, S. A. de C. V., México, D.F., 1979) p. 206.
- H. Cárdenas, E. Lluís, F. Raggi y F. Tomás, *Álgebra Superior* (Editorial Trillas, S.A. de C.V., México, D.F., 1990) p. 288.
- O'Neill Barrett, *Elementos de Geometría Diferencial* (Editorial Limusa, S.A., México, D.F., 1982) p. 9.
- Ya. S. Bugrov y S.M. Nikolski, *Matemáticas Superiores* (Editorial Mir., Moscú, 1984) p. 61.
- R. Courant y F. John, *Introducción al Cálculo y Análisis Matemático* **Vol 1**. (Editorial Limusa, S. A., México, D.F., 1982) p. 76.