

# Estabilidad de un péndulo con forzamiento periódico arbitrario

P. Quintero-Cabra\* y J. Silva-Valencia\*\*

*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia,  
A.A. 5997, Bogotá, Colombia.*

H. Alejo-Martínez

*Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas,  
6165, Campinas 13083-970, SP, Brasil,  
e-mail: halejom@unal.edu.co*

Recibido el 5 de enero de 2009; aceptado el 30 de junio de 2009

La dinámica de un péndulo forzado a ángulos y forzamientos arbitrarios es estudiada usando el formalismo lagrangiano y el método del potencial efectivo. Nosotros realizamos una discusión general del problema y al final consideramos tres tipos particulares de forzamiento: sinusoidal, cuadrado y triangular. Se encontró que la frecuencia de corte que determina la frontera entre la región de estabilidad y de inestabilidad depende del tipo de forzamiento considerado. Para forzamientos tipo cuadrado, el límite inferior de la región de estabilidad es mínimo, mientras que para forzamiento tipo triangular es máximo; el caso tradicional del forzamiento tipo sinusoidal se encuentra entre los anteriores.

*Descriptores:* Péndulo forzado; forzamiento arbitrario; potencial efectivo.

The dynamics of a driven pendulum at arbitrary angles and signals is studied using the lagrangian formalism and the effective potential method. We make a general discussion of the problem and consider three particular driving signals: sinusoidal, square and triangular. Was found that the cut off frequency, which determines the transition between the stability and nonstability regions depends on the type of signal used. For square driving the lower bound is minimum, while for the triangular drive is a maximum, the usual case of sinusoidal driving was found between the previous ones.

*Keywords:* Driven pendulum; arbitrary signal; effective potential.

PACS: 45.20Jj; 45.20.dc; 45.40Cc

## 1. Introducción

El péndulo invertido es un sistema muy interesante, no sólo por su rica dinámica, sino también por ser uno de los sistemas caóticos más sencillos, teniendo una aplicación directa en la teoría del control [1,2].

Un péndulo físico en su posición vertical invertida se encuentra en un equilibrio inestable, sin embargo, estudios teóricos [3,4] y experimentales [5,6] muestran que es posible llevar el sistema a un estado de equilibrio estable mediante la aplicación de un forzamiento sinusoidal vertical de baja amplitud y alta frecuencia (comparada con la frecuencia natural de oscilación). Esta transición de equilibrio inestable a equilibrio estable se ha intentado explicar usando diversas herramientas, por ejemplo, Levi [7] prueba la estabilidad del péndulo invertido considerando exclusivamente la topología del sistema dinámico, sin embargo, en su desarrollo la necesidad de las altas frecuencias no aparece. Un estudio de la estabilidad a altas frecuencias fue realizado por Levi y Weckesser [8] usando los valores propios de la matriz de evolución del sistema, con métodos similares a los de la teoría de caos. Duchesne *et al.* [9] cambiaron el forzamiento sinusoidal por una serie de impulsos instantáneos, logrando explicar de manera intuitiva la región de estabilidad del péndulo invertido.

El movimiento del péndulo invertido para pequeñas oscilaciones del sistema, respecto a la posición de equilibrio,

es descrito por la ecuación de Mathieu's, la cual aparece en múltiples escenarios de la física clásica y moderna. Las soluciones analíticas y posibles aplicaciones de la ecuación de Mathieu's han sido ampliamente estudiadas [3,10]. El comportamiento estable del péndulo invertido corresponde a las soluciones reales y periódicas de la ecuación de Mathieu's, las cuales se dan bajo ciertas condiciones en los parámetros físicos del sistema, tales como la longitud del péndulo, la amplitud y la frecuencia del forzamiento.

Para un péndulo forzado a ángulos arbitrarios de forzamiento no se tiene una solución analítica, sin embargo, Van-Dalen [11] presenta algunas soluciones numéricas, las cuales son comparadas con soluciones analíticas para ciertos casos particulares, encontrando para el forzamiento sinusoidal la región de estabilidad conocida.

Generalmente el estudio de péndulos forzados se restringe a forzamientos de tipo sinusoidal y sus consecuencias, pero poco se estudian otros tipos de forzamientos periódicos, por ejemplo, forzamientos tipo onda triangular o cuadrada. Estos tipos de forzamiento pueden alterar la región de estabilidad de un péndulo invertido forzado. En este artículo estudiamos un péndulo sujeto a un forzamiento periódico general y determinamos los cambios en la región de estabilidad de un péndulo invertido cuando la señal de forzamiento es: sinusoidal, cuadrada y triangular. Aquí utilizamos el formalismo lagrangiano para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema y, para encontrar las condiciones de estabilidad,

usamos el método del potencial efectivo introducido por Landau [12]. En este método, un campo escalar es separado en dos partes, un campo escalar independiente del tiempo y un campo escalar que oscila rápidamente en el tiempo.

Este procedimiento para estudiar el péndulo forzado puede ser utilizado en los cursos básicos de mecánica clásica, donde se introduce el formalismo lagrangiano, con el fin de que el estudiante conozca el tipo de aproximaciones que se pueden realizar dentro de este marco y su rango de validez.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sec. 2 se estudia un péndulo forzado con un ángulo arbitrario de forzamiento y para un forzamiento periódico arbitrario, en la Sec. 3 se presentan los resultados encontrados al considerar tres casos particulares de forzamiento: sinusoidal, cuadrado, y triangular. Finalmente, las conclusiones son consignadas en la Sec. 4.

## 2. Teoría: péndulo forzado

Nosotros estamos interesados en la dinámica de un péndulo físico de masa uniforme  $M$  y longitud  $L$ , sujeto a un forzamiento periódico  $A(t) = A(t; \omega, A_0)$  en el pivote, de frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $A_0$ . Aquí  $\omega$  es mayor que la frecuencia natural del péndulo. El forzamiento se aplica para un ángulo arbitrario  $\theta_d$  con la vertical, como se muestra en la Fig. 1. El péndulo considerado es una varilla rígida de momento de inercia  $I_{c.m.} = Mk^2$  respecto al centro de masa, donde  $k$  es el radio de giro y, en este caso particular, se tiene  $k = L/\sqrt{12}$ . Para obtener la ecuación de movimiento del sistema usamos las coordenadas del centro de masa, las cuales vienen dadas por

$$x_{c.m.} = \frac{L}{2} \sin \theta + A(t) \sin \theta_d, \tag{1}$$

$$y_{c.m.} = -\frac{L}{2} \cos \theta - A(t) \cos \theta_d, \tag{2}$$

donde  $L/2$  es la distancia del pivote al centro de masa y  $\theta$  es la coordenada generalizada que describe la dinámica del péndulo.

Separando la dinámica del cuerpo rígido en un movimiento del centro de masa más la rotación respecto al centro de masa, las energías cinética y potencial vienen dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_{c.m.}^2 + \dot{y}_{c.m.}^2) + \frac{1}{2}I_{c.m.}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[M\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)\dot{\theta}^2 + M\dot{A}^2(t) \right. \\ &\quad \left. - ML\dot{\theta}\dot{A}(t)(\sin \theta \cos \theta_d - \cos \theta \sin \theta_d)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

y

$$V = Mgy_{c.m.} = -\frac{MgL}{2} \cos \theta - MgA(t) \cos \theta_d. \tag{4}$$

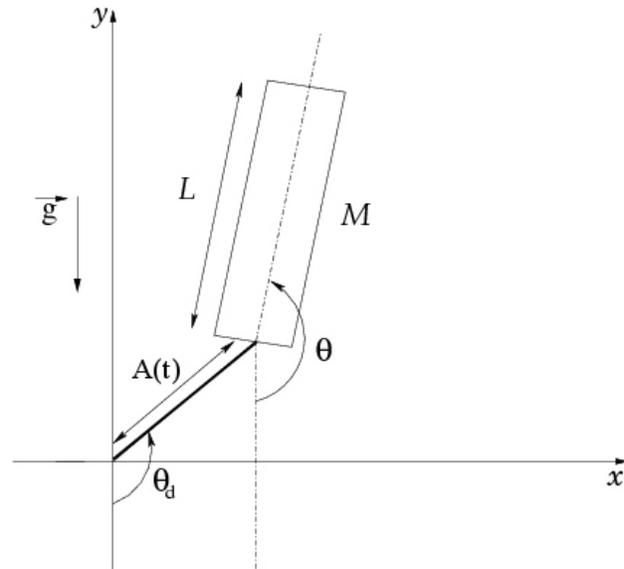


FIGURA 1. Péndulo forzado en un ángulo arbitrario  $\theta_d$  con la vertical. Aquí  $L$  y  $M$  son la longitud y masa del péndulo, respectivamente,  $A(t)$  es el forzamiento periódico arbitrario y  $\theta$  es la coordenada generalizada de movimiento.

El lagrangiano del sistema es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)\dot{\theta}^2 + \dot{A}^2(t) - L\dot{\theta}\dot{A}(t)\sin(\theta - \theta_d)\right] \\ &\quad + Mg\left(\frac{L}{2}\cos \theta + A(t)\cos \theta_d\right) \end{aligned} \tag{5}$$

y la ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{L\ddot{A}(t)}{2\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)}\sin(\theta - \theta_d) - \frac{gL}{2\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)}\sin \theta \\ &= f(\theta, t) + g(\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

De la anterior expresión es posible observar que el segundo término, a la derecha de la igualdad, es el término clásico del péndulo físico que conduce a la solución armónica simple para pequeños valores de  $\theta$ . El primer término a la derecha es debido al forzamiento, y depende únicamente de la segunda derivada de la función  $A(t)$  y de la diferencia entre el ángulo de oscilación y el ángulo de forzamiento. Es decir, la Ec. (6) consta de un término de forzamiento dependiente del tiempo  $f(\theta, t)$  y un término estacionario  $g(\theta)$ , correspondiente al efecto de la gravedad.

La aproximación de Landau y Lifshitz es para partículas sujetas a un potencial independiente del tiempo que causa un movimiento oscilante, y a un forzamiento adicional de muy alta frecuencia (comparado con la frecuencia natural con que oscila el sistema). Además se asume que la amplitud de la oscilación debida al forzamiento es pequeña en comparación con la amplitud de oscilación que tendrá si el forzamiento no estuviera presente [12].

Esta aproximación es de carácter mucho más general que el enunciado, y puede ser utilizada en situaciones aún más

complejas, por ejemplo, ciertos parámetros del sistema pueden depender de las coordenadas espaciales y además, se pueden tener varios forzamientos actuando simultáneamente y la aproximación sigue siendo válida. Este desarrollo es usualmente referido a Landau y Lifshitz [12], pero se sabe que un análisis anterior y equivalente fue hecho por Kapitza [13] en 1951. La idea de la aproximación es separar la dinámica natural del sistema y la dinámica producida por el forzamiento, de esta forma la amplitud total de movimiento se divide en dos amplitudes, una de ellas que varía lentamente en el tiempo y es debida a la oscilación natural del sistema y otra que varía rápidamente causada por el forzamiento externo, y con las aproximaciones mencionadas se generan ecuaciones de movimiento para cada una de estas amplitudes. Lo interesante en el caso del péndulo es que esta división del movimiento en su componente rápida y lenta es ideal para darnos información acerca de la región de estabilidad, ya que en dicha región la componente rápida domina la componente lenta y es realmente la causante de la estabilidad (por ejemplo el péndulo invertido sin forzamiento es altamente inestable, pero es estable al incluir el forzamiento). En la Sec. 3 evaluaremos la validez de la aproximación para el caso específico del péndulo invertido con forzamiento sinusoidal.

Precisando la aproximación al caso del péndulo, tenemos que bajo la suposición que la frecuencia  $\omega$  asociada al forzamiento periódico  $A(t)$  es mucho mayor que la frecuencia natural  $\omega_0$  de oscilación del péndulo en presencia solamente del campo gravitacional, separamos el movimiento del péndulo forzado en dos partes: una componente rápida y que suponemos de pequeña amplitud  $\xi(t)$ , y una componente lenta y de alta amplitud  $\phi(t)$ , de manera que

$$\theta(t) = \phi(t) + \xi(t). \quad (7)$$

Adicionalmente, es supuesto que el valor medio de la función  $\xi(t)$  sobre un período  $T = 2\pi/\omega$  es cero y que la función  $\phi(t)$  cambia muy ligeramente con el tiempo. Notemos que la componente rápida y pequeña  $\xi(t)$  viene como respuesta del péndulo a las oscilaciones del forzamiento de frecuencia angular  $\omega$ , sin embargo, esta consideración no implica que la magnitud de  $A(t)$  sea pequeña comparada con la fuerza de la gravedad. La segunda componente  $\phi(t)$ , que suponemos lenta y de gran magnitud, describe las oscilaciones del péndulo debida a la acción de la gravedad.

En la Ec. (6) podemos reescribir los términos  $g(\theta) = g(\xi + \phi)$  y  $f(\theta, t) = f(\xi + \phi, t)$ , haciendo una expansión a primer orden alrededor de  $\phi$ , para pequeños valores de  $\xi(t)$ , obteniendo de esta forma

$$\ddot{\theta} = \ddot{\xi} + \ddot{\phi} \approx g(\phi) + \xi \left. \frac{dg}{d\theta} \right|_{\theta=\phi} + f(\phi, t) + \xi \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\phi, t}, \quad (8)$$

igualamos a cada lado de la Ec. (8) los términos de mayor magnitud y que varían más rápidamente,

$$\ddot{\xi} \approx f(\phi, t) = \frac{L\ddot{A}(t)}{2\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)} \sin(\phi - \theta_d), \quad (9)$$

e integrando dos veces, encontramos que

$$\xi(t) \approx \frac{1}{2} \frac{LA(t)}{\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)} \sin(\phi - \theta_d), \quad (10)$$

donde suponemos que la componente lenta  $\phi$  es aproximadamente constante en un intervalo de tiempo  $2\pi/\omega$ . Promedian-do la Ec. (8) sobre la componente rápida del movimiento en la frecuencia angular, obtenemos la ecuación de movimiento para las oscilaciones lentas del péndulo:

$$\ddot{\phi} + \bar{\xi} \approx g(\phi) + \bar{\xi} \left. \frac{dg}{d\theta} \right|_{\theta=\phi} + \overline{f(\phi, t)} + \bar{\xi} \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\phi, t}. \quad (11)$$

Por hipótesis, el promedio de los términos rápidamente oscilantes  $\ddot{\xi}$ ,  $\xi$ , y  $f(\phi, t)$  son cero, y por tanto tenemos

$$\ddot{\phi} \approx g(\phi) + \bar{\xi} \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\phi, t}, \quad (12)$$

donde

$$g(\phi) = -\frac{gL}{2\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)} \sin \phi \quad (13)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\phi, t} &= \frac{1}{T} \int_0^T \xi \frac{df}{d\theta} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{L^2 \ddot{A}(t) A(t)}{4\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)^2} \cos(\phi - \theta_d) \sin(\phi - \theta_d) dt \\ &= \frac{L^2 \overline{\ddot{A}(t) A(t)}}{4\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)^2} \cos(\phi - \theta_d) \sin(\phi - \theta_d), \quad (14) \end{aligned}$$

en la expresión anterior nuevamente se ha considerado sólo los términos de frecuencia  $\omega$  para el promedio, debido a su rápida variación comparados con los demás. El término  $\overline{\ddot{A}(t) A(t)}$  es por definición:

$$\overline{\ddot{A}(t) A(t)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \ddot{A}(t) A(t) dt. \quad (15)$$

Entonces la ecuación de movimiento lenta del sistema, dada por (12) es

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \cong & -\frac{L}{2\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)} \\ & \times \left[ g \sin \phi - \frac{L \overline{\ddot{A}(t) A(t)}}{4\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)} \sin[2(\phi - \theta_d)] \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Aquí podemos ver la presencia del torque debido a la gravedad en el primer término del lado derecho, y en esta aproximación, el torque de forzamiento depende ahora únicamente

de un número, el promedio temporal del producto del forzamiento con su segunda derivada.

Podemos ahora construir un torque efectivo como el producto de la aceleración  $\ddot{\phi}$  respecto al extremo pivotado de la varilla, multiplicado por el momento de inercia respecto al mismo punto:

$$\tau_{eff}(\phi) = \left[ I_{c.m.} + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \ddot{\phi} = -\frac{ML}{2} \times \left[ g \sin \phi - \frac{L \overline{\ddot{A}(t)A(t)}}{4 \left( \frac{L^2}{4} + k^2 \right)} \sin[2(\phi - \theta_d)] \right], \quad (17)$$

este torque puede ser derivado de una energía potencial efectiva,  $V_{eff}$ , con

$$\tau_{eff}(\phi) = -\frac{dV_{eff}}{d\phi}, \quad (18)$$

donde

$$V_{eff}(\phi) = -\frac{MgL}{2} \left( \cos \phi + \frac{R}{4} \cos[2(\phi - \theta_d)] \right), \quad (19)$$

aquí introducimos dos nuevos parámetros,  $R$  y la frecuencia angular crítica  $\omega_c$ , dados por

$$R = -\frac{L \overline{\ddot{A}(t)A(t)}}{2g \left( \frac{L^2}{4} + k^2 \right)} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}. \quad (20)$$

Aquí  $R$  es el parámetro crítico del sistema, ya que, como veremos mas adelante, el comportamiento caótico se da cuando  $R < 1$ , es decir, cuando la frecuencia de forzamiento  $\omega$  es menor que la frecuencia crítica  $\omega_c$ , o de manera equivalente, el comportamiento estable del sistema se obtendrá cuando la frecuencia de forzamiento sea mayor que la frecuencia crítica  $\omega > \omega_c$ .

El método de potencial efectivo consiste en construir una función escalar que describe el movimiento lento del péndulo promediado sobre las oscilaciones rápidas, y a partir de esta función quedarán determinadas las condiciones de equilibrio estable para el péndulo forzado. En el caso de que exista un ángulo de estabilidad para el péndulo debe aparecer un mínimo en el potencial efectivo, o equivalentemente, el torque debe ser nulo,  $\tau_{eff}(\phi) = 0$ , en dicho ángulo. De este modo,

$$-\frac{MgL}{2} \left[ \sin \phi + \frac{R}{2} \sin[2(\phi - \theta_d)] \right] = 0. \quad (21)$$

Por tanto, el equilibrio ocurre en  $\phi_0$  bajo la condición

$$\sin \phi_0 + \frac{R}{2} \sin[2(\phi_0 - \theta_d)] = 0. \quad (22)$$

Además si queremos que el equilibrio sea estable, la segunda derivada tiene que ser positiva:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \sin \phi + \frac{R}{2} \sin[2(\phi - \theta_d)] \right)_{\phi=\phi_0} > 0; \quad (23)$$

esta ultima condición se va a traducir en condiciones sobre los parámetros del sistema

$$\cos \phi_0 + R \cos[2(\phi_0 - \theta_d)] > 0. \quad (24)$$

Una vez conocido el ángulo de estabilidad  $\phi_0$ , se puede hallar directamente la frecuencia de oscilación para ángulos pequeños, ya que al hacer una expansión de Taylor de la ecuación dinámica de  $\phi$  alrededor de  $\phi_0$  (ver 16), los dos primeros términos representan el comportamiento armónico del sistema. De la raíz cuadrada del segundo término se extrae la frecuencia de oscilación, como se hace usualmente en las aproximaciones de potencial armónico. De esta forma la frecuencia angular para pequeñas oscilaciones viene dada por

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\cos \phi_0 + R \cos[2(\phi_0 - \theta_d)]}, \quad (25)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{3g/2L}$ .

Para hallar los ángulos de equilibrio para un forzamiento arbitrario alrededor de un ángulo  $\theta_d$  dado, tenemos que resolver la ecuación trascendente (22) y para saber si es estable verifica que (23) se cumpla. Obteniendo soluciones numéricas para hallar el ángulo de equilibrio en función de  $\theta_d$ , se puede ver que para  $R \geq 2$  existe un ángulo estable  $\phi_0$  para todo  $\theta_d$ , y para  $R < 1$  sólo existen ángulos de estabilidad para  $\theta_d$  entre  $-90^\circ$  y  $90^\circ$ , es decir, cuando el péndulo esta orientado hacia abajo. Los valores intermedios de  $R$  presentan discontinuidades en los ángulos donde se puede hallar equilibrio. En general la existencia de ángulos de equilibrio y su estabilidad van a depender de manera crítica con  $R$  [11].

### 3. Resultados y análisis

A continuación examinaremos el caso particular del péndulo invertido, para el cual  $\theta_d = 180^\circ$ , para tres tipos de forzamiento periódicos: sinusoidal, cuadrada y triangular. Para el péndulo invertido se obtiene un sólo ángulo de equilibrio estable de  $\phi_0 = 180^\circ$  y la condición de estabilidad es  $R > 1$ , es decir, la frecuencia de forzamiento mayor que la frecuencia de corte. Este resultado, como veremos, corresponde al segundo orden de la solución analítica [3]. El caso de forzamiento sinusoidal nos dará el rango de validez de la aproximación, ya que para este caso se conoce la solución analítica. En lo subsiguiente consideramos un péndulo de longitud de 0.25 m como en el montaje experimental de [11].

#### 3.1. Forzamiento sinusoidal

Primero consideraremos un forzamiento sinusoidal de la forma  $A_S(t) = A_0 \cos \omega t$ . Aplicando la relación (15) obtenemos

$$\overline{\ddot{A}_S(t)A_S(t)} = -\omega^2 A_0^2 \overline{\cos^2 \omega t}, \quad (26)$$

donde  $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ , por tanto,

$$R_s = \frac{LA_0^2\omega^2}{4g\left(\frac{L^2}{4} + k^2\right)}, \quad (27)$$

$$\omega_{c,s} = \frac{2}{A} \sqrt{gL\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{L^2}\right)}. \quad (28)$$

El péndulo simple sinusoidal tiene solución analítica [5], en ésta, exigiendo que las soluciones sean periódicas y reales, se determina la región de estabilidad en el espacio de parámetros  $A_0$  (amplitud) y  $\omega$  (frecuencia de forzamiento). Para nuestro caso,  $L = 0.25\text{m}$ , la región queda determinada por las dos curvas continuas de la Fig. 2.

En esta misma gráficas con una curva punteada, esta la condición  $R > 1$  correspondiente a la hipérbola (28) reproducida por nuestro modelo de movimientos rápidos y lentos (original de Landau). Se puede ver que coincide muy bien con la cota inferior de estabilidad; sin embargo, es claro que por la naturaleza del método (oscilaciones rápidas y de baja amplitud) solamente es capaz de reproducir la primera transición del sistema.

Más exactamente, la solución analítica de Phelps [3] acota los parámetros del sistema por dos series en  $\omega/\omega_0$  y el método aquí presentado corresponde al orden 2 de la serie que acota inferiormente.

### 3.2. Forzamiento señal cuadrada

Ahora consideremos el caso de un forzamiento tipo onda cuadrada cuya forma funcional viene dada por

$$A_C(t) = \begin{cases} A_0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -A_0, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (29)$$

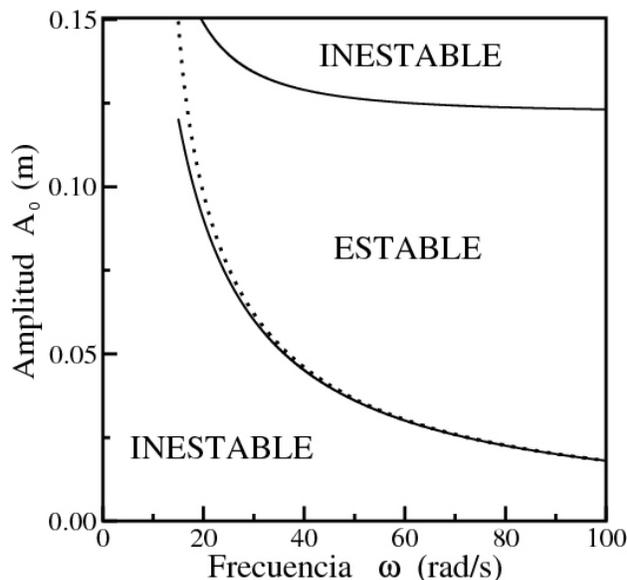


FIGURA 2.  $L = 0.25\text{m}$ . La región entre las líneas continuas son los valores de  $A_0$  y  $\omega$  para los cuales la solución analítica del péndulo da funciones reales y periódicas (región de estabilidad).

con  $A_C(t + T) = A_C(t)$ , siendo  $A_0$  la amplitud de forzamiento y  $T$  el período,  $T = 2\pi/\omega$ , con  $\omega$  la frecuencia angular del forzamiento.

En la Ec. (6) aparece la segunda derivada de la función de forzamiento, donde hemos supuesto que el término de forzamiento es dos veces diferenciables, lo que no sucede en la forma funcional supuesta. Por lo tanto, consideramos entonces la aproximación de la función a los primeros términos de las serie de Fourier.

$$A_C(t) = \frac{4A_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\omega t, \quad (30)$$

por tanto, reemplazando en la Ec. (15) se encuentra que

$$\overline{\ddot{A}_C(t)A_C(t)} = -\frac{24}{\pi^2} A_0^2 \omega^2. \quad (31)$$

El parámetro crítico de la onda cuadrada en función del de la onda sinusoidal es

$$R_t = \frac{96}{\pi^2} R_s, \quad (32)$$

y la correspondiente frecuencia de corte

$$\omega_{c,c} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \omega_{c,s}. \quad (33)$$

Observamos cómo la frecuencia de corte para el forzamiento cuadrado es menor que en el caso sinusoidal, lo cual conlleva a que la región de estabilidad es alterada como se muestra en la gráficas de la amplitud en función de la frecuencia (Fig. 3). Adicionalmente, vemos cómo la amplitud disminuye con la frecuencia, determinando el límite inferior de la región de estabilidad para el péndulo invertido. El forzar con una señal cuadrada hace más estable al péndulo, en promedio, para una misma amplitud de forzamiento el borde de estabilidad para la cuadrada es 50 rad/seg menor que el sinusoidal.

### 3.3. Forzamiento señal triangular

Finalmente consideremos un forzamiento tipo onda triangular cuya forma funcional es

$$A_T(t) = \begin{cases} A_0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right), & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ A_0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right), & 0 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (34)$$

con  $A_T(t + T) = A_T(t)$ ,  $A_0$  la amplitud de forzamiento y  $T$  el período,  $T = 2\pi/\omega$ , con  $\omega$  la frecuencia angular del forzamiento. Por analogía al caso anterior, consideramos la aproximación de la función a los primeros términos de las serie de Fourier:

$$A_T(t) = \frac{8A_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\omega t, \quad (35)$$

y reemplazando en la Ec. (15) se encuentra que

$$\overline{\ddot{A}_T(t)A_T(t)} = -\frac{8288}{225} \frac{A_0^2 \omega^4}{\pi^4}. \quad (36)$$

Así, el parámetro crítico y la frecuencia crítica vienen dados por

$$R_t = \frac{16576}{225\pi^4} R_s, \tag{37}$$

$$\omega_{c,t} = \frac{15\pi^2}{4\sqrt{1036}} \omega_{c,s}. \tag{38}$$

Vemos cómo la frecuencia de corte para el forzamiento triangular es mayor que en el caso sinusoidal, lo cual conlleva a que la región de estabilidad sea alterada como se muestra en la gráfica de la amplitud en función de la frecuencia (Fig. 3). En ésta observamos, cómo el tamaño de la región de

estabilidad es reducida en comparación con la sinusoidal. También es posible ver que para frecuencias pequeñas se pueden alcanzar amplitudes mayores que para el forzamiento tipo sinusoidal y cuadrado. Una gráfica de frecuencia de forzamiento vs. longitud del péndulo se muestra en la Fig. 4, donde mostramos nuevamente la cercanía entre las curvas sinusoidal y triangular. En este caso, a medida que se aumenta la longitud del péndulo, la distancia entre las curvas se asentúa, por ejemplo para un valor de 40 cm de longitud la diferencia entre la cuadrada y sinusoidal es alrededor de 120 rad/s, mientras las curvas sinusoidal y triangular siguen juntas. Si regresamos al origen de esta discrepancia, vemos que el parámetro crítico de la señal cuadrada  $R_c$  es un orden mayor que el de la señal sinusoidal  $R_s$  (32), mientras  $R_t \approx 0.8 R_s$  (37) valores provenientes de la correlación de la señal con su segunda derivada (20).

Nosotros creemos que los resultados presentados en este trabajo pueden ser verificados usando un vibrador mecánico tipo PASCO, muy común en laboratorios de mecánica newtoniana. Este vibrador oscila siguiendo la salida de un generador de onda, y se le puede adaptar una pequeña barra o un tornillo. Inicialmente se puede considerar una frecuencia grande del generador con la cual el péndulo se mantenga en su posición invertida (estable) y después se disminuye lentamente hasta obtener la frecuencia para la cual el péndulo se cae (inestable). Al hacer esto para diferentes amplitudes de forzamiento, se pueden obtener curvas experimentales que corroboren los resultados aquí presentados en la Fig. 3 para la región de estabilidad del péndulo invertido. Un generador como el PASCO permite trabajar las tres formas de onda aquí consideradas, con un montaje como este reproduciría la zona de bajas frecuencias (entre 20-80 rad/s) y amplitudes medias (2-7 mm) donde el modelo teórico indica que se encontrarían diferencias significativas. El variar la longitud del péndulo en el experimento, mostraría de una manera más contundente la marcada estabilidad de la señal cuadrada como lo indica la Fig. 4.

### 4. Conclusiones

Usando el formalismo lagrangiano nosotros obtuvimos la ecuación de movimiento para un péndulo forzado a ángulos y forzamientos arbitrarios. Adicionalmente, utilizando la aproximación de potencial efectivo encontramos el límite inferior de la región de estabilidad para un péndulo invertido sometido a forzamientos tipo sinusoidal, cuadrado y triangular. Encontramos que la condición para que se obtengan oscilaciones estables, para cualquier tipo de forzamiento, es que la frecuencia de forzamiento sea mayor que la frecuencia de corte, la cual depende únicamente de la correlación de la función forzamiento con su segunda derivada. Esto hace que una señal cuadrada haga mucho más estable el péndulo que las señales sinusoidales y triangulares. La frecuencia de corte para la señal cuadrada es menor que para una sinusoidal y esta, a su vez, es menor que la frecuencia de corte de la señal triangular.

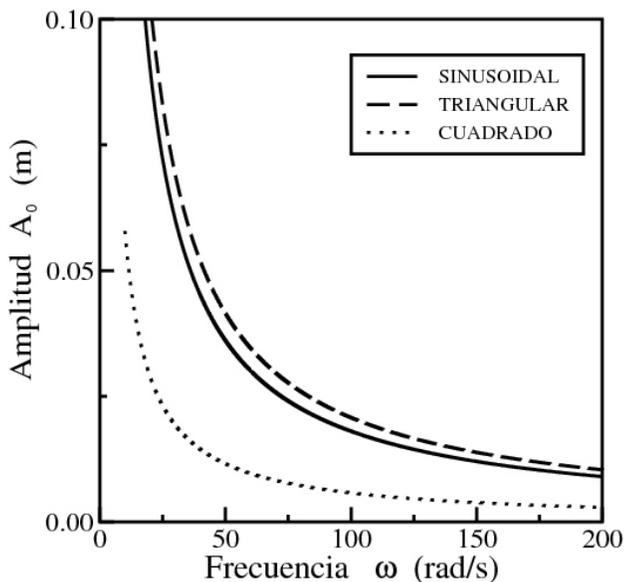


FIGURA 3. Curvas de estabilidad en el plano  $A_0$  vs  $\omega$  para diferentes tipos de forzamiento.

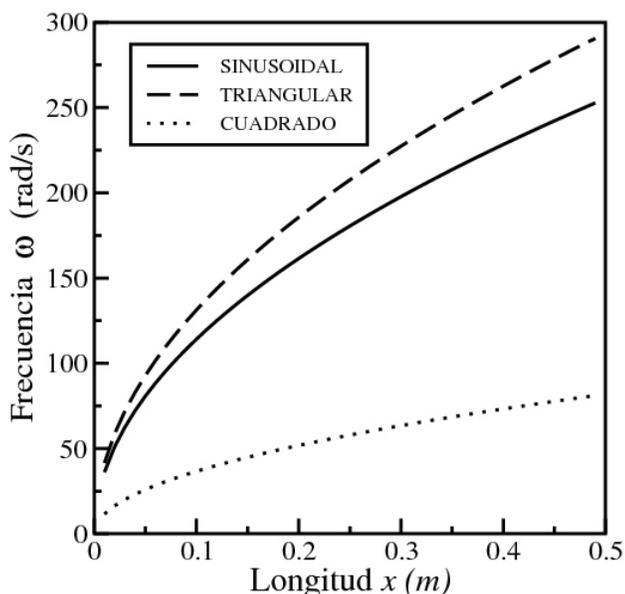


FIGURA 4. Curvas de estabilidad en el plano  $\omega$  vs  $L$  para diferentes tipos de forzamiento.

Para el caso de la señal sinusoidal pudimos establecer el valor de la aproximación usada, en ese caso logramos reproducir la solución analítica reportada por Phelps [3] a segundo orden.

Para los tipos de forzamientos considerados en este trabajo, podemos concluir que la región de estabilidad para un péndulo invertido cambia significativamente al variar la señal, siendo aún más sensible a cambios en la longitud del péndulo. Estos resultados pueden ser observados en laboratorios de mecánica clásica, enriqueciendo así la discusión sobre oscilaciones en cursos de física básica.

## Agradecimientos

Los autores agradecen los valiosos comentarios del Profesor Fabio Fajardo y las discusiones con Inti Sodemann y Mauricio Mariño. Silva-Valencia agradece el soporte financiero de la División de Investigación Bogotá (DIB) de la Universidad Nacional de Colombia.

- 
- \* e-mail: paquinteroc@unal.edu.co  
 \*\* e-mail: jsilvav@unal.edu.co
1. A.L. Hof, M.G.J. Gazendam y W.E. Sinke, *J. of Biomechanics*. **38** (2001) 1.
  2. D. Angeli, *Automatica* **37** (2005) 1103.
  3. F.M. Phelps y J.H. Hunter, Jr., *Am. J. Phys.* **33** (1965) 285.
  4. H.P. Kalmus, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 874.
  5. J.G. Fenn, D.A. Bayne y B.D. Sinclair, *Am. J. Phys.* **66** (1998) 981.
  6. M.M. Michaelis, *Am. J. Phys.* **53** (1985) 1079.
  7. M. Levi, *SIAM Rev.* **30** (1908) 639.
  8. M. Levi y W. Weckesser, *SIAM Rev.* **37** (1995) 219.
  9. B. Duchesne, C.W. Fischer, C.G. Gray y K.R. Jeffrey, *Am. J. Phys.* **59** (1991) 987.
  10. Lawrence Ruby, *Am. J. Phys.* **64** (1996) 39.
  11. G.J. VanDalen, *Am. J. Phys.* **72** (2004) 484.
  12. L.M. Landau y E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon, New York, 1960), pp 93.
  13. P.L. Kapitza, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **21** (1951) 588.