

# Interacción de un láser con un ion atrapado incluyendo dependencia temporal

J.M. Vargas-Martínez and E.A. Martí-Panameño  
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físicas,  
 Mat., Apartado Postal 1152, Puebla, Pue. 72000, México.*

H. Moya-Cessa  
*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Coordinación de Óptica,  
 Apartado Postal 51 y 216, Puebla, Pue., 72000 México,  
 e-mail: hmmc@inaoep.mx*

Recibido el 19 de marzo de 2009; aceptado el 4 de agosto de 2009

En la actualidad es posible atrapar iones individuales en trampas de Paul o de Penning, las partículas cargadas son confinadas en el espacio mediante campos electromagnéticos. Un ion atrapado puede contener mucha energía vibracional, lo cual es indeseable en ciertas aplicaciones. En este artículo, partiendo del hamiltoniano de un ion atrapado en un potencial armónico, se demuestra que es posible encontrar transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings en el régimen de intensidad intermedia, es decir, ajustando la intensidad del láser que induce el acoplamiento entre los estados internos y vibracionales del ion proporcionalmente a la frecuencia de vibración del ion; estas transiciones son de utilidad porque hacen posible extraer dicha energía vibracional. En nuestro tratamiento consideramos que el ion y el láser están en resonancia, lo que elimina la necesidad de usar láseres sintonizables. También analizamos el problema de un ion atrapado en una trampa dependiente del tiempo interactuando con un haz láser. Mediante un conjunto de transformaciones unitarias con parámetros dependientes del tiempo mostramos que este sistema es equivalente a la interacción entre un haz cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo. El hamiltoniano es linealizado de tal forma que puede ser resuelto mediante métodos que se encuentran en la literatura y que involucran parámetros dependientes del tiempo. La linealización está libre de aproximaciones y de consideraciones sobre los parámetros del sistema, como son, por ejemplo, el parámetro de Lamb-Dicke, la dependencia temporal de la frecuencia de la trampa y la desintonía, con lo que se logra obtener la mejor solución para este tipo de sistemas. También mostramos un caso particular de dependencia temporal de la trampa.

*Descriptores:* Transformaciones unitarias dependientes del tiempo; trampas de iones; enfriamiento láser; estados comprimidos.

Nowadays it is possible to trap single ions in Paul or Penning traps, charged particles are confined in space via electromagnetic fields. A trapped ion can have a lot vibrational energy which is undesirable in some applications. In this paper, starting from the Hamiltonian of a trapped ion in a harmonic potential, we show that it is possible to get Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings-like transitions in the intermediate intensity regime, that is, adjusting the intensity of the laser that induce the coupling between the internal and vibrational states of the ion proportionally to the vibrational frequency of the ion; these transitions are useful because make it possible to extract the vibrational energy. In our treatment we consider that the ion and the laser are in resonance what eliminate the need of using tuned lasers. Also, the problem of a trapped ion in a trap with time-dependent parameters interacting with a laser field is analyzed. By using a set of time-dependent unitary transformations is shown that this system is equivalent to the interaction between a quantized field and a two level system with time dependent parameters. The Hamiltonian is linearized in such a way that can be solved with methods that are found in some papers and that involve time-dependent parameters. The linearization is free of approximations and assumptions on the parameters of the system as are, for instance, the Lamb-Dicke parameter, the time-dependency of the frequency trap and the detuning, with what we can obtain the best solution for this kind of system. Also, we show a particular case of time-dependency of the trap.

*Keywords:* Time-dependent unitary transformations; ion traps; laser cooling; squeezed states.

PACS: 37.10.Rs; 37.10.Ty; 03.65.Ge; 63.22.Kn

## 1. Introducción

Uno de los aspectos que es de interés en la física es el estudio de la estructura de la materia y de los procesos dinámicos que se llevan a cabo en ella. Pero para entender el comportamiento de los procesos naturales, como el juego de algunos constituyentes gobernados por unas pocas leyes y fuerzas fundamentales, uno tiene que medir las propiedades de los constituyentes más relevantes y su interacción tan preciso como sea posible. Como muchos procesos están interconectados, lo ideal es separarlos y estudiarlos individualmente. La posibilidad de observar partículas individuales atrapadas abrió una nueva dimensión en mediciones atómicas. Hasta

hace unos años todas las mediciones fueron llevadas a cabo sobre un ensamble de partículas, por lo que la magnitud medida era un valor promediado sobre muchas de ellas. Asumimos que todos los átomos tienen exactamente el mismo comportamiento estadístico cuando atribuimos el resultado a un átomo individual. En un átomo atrapado, sin embargo, uno puede observar su interacción con un campo de radiación y su propio comportamiento estadístico únicamente.

La posibilidad de llevar a cabo atrapamiento de nubes de partículas o incluso átomos o iones individuales en pequeñas regiones del espacio fue abierta con la invención de trampas electromagnéticas. Tales trampas permiten la observación de

partículas aisladas, por largos periodos de tiempo. La trampa de Kingdon se considera el primer tipo de trampa de iones en ser desarrollada (1923) [1]; esta consiste de un filamento rodeado de un cilindro, ambos metálicos, y un voltaje CD aplicado entre el filamento y el cilindro; los iones son atraídos hacia el alambre pero su momento angular hace que giren en órbitas circulares alrededor del alambre en trayectorias que tienen baja probabilidad de chocar contra el mismo. Una versión dinámica de la misma se obtiene si, además del voltaje CD, se aplica voltaje CA entre los polos. Sin embargo, este tipo de trampa no fue tan ampliamente usada en esa época porque tenía cortos tiempos de almacenamiento y porque su potencial no es armónico.

Desarrollos más recientes han sido la construcción de otros tipos de trampas como la de Penning [2] y la de Paul [3]. En la trampa de Penning la aplicación de campos eléctricos, junto con un campo magnético, hace posible el atrapamiento de iones. Los principios de la trampa de Penning fueron descritos en 1936, pero su completo desarrollo fue hasta después de que la trampa de Paul fue introducida en 1959.

La trampa electrodinámica fue inventada por Wolfgang Paul (quien recibió el Premio Nobel por su trabajo). La idea es que una partícula cargada no puede ser confinada en el espacio usando campos eléctricos constantes, por lo que un campo eléctrico oscilando a radiofrecuencias es aplicado en su lugar, formando el potencial apropiado para realizar el atrapamiento. Esta trampa emplea no sólo las fuerzas de enfocamiento o desenfoque de campos eléctricos cuadrupolares actuando sobre iones sino que también explota las propiedades de estabilidad de sus ecuaciones de movimiento.

Un ion atrapado individualmente es de interés porque ello provee un sistema simple para ser estudiado. En primer lugar, la forma del movimiento de un ion en una trampa de Paul puede ser modelada como armónica. Además, la simplicidad de un único ion atrapado permite una comparación más directa con la teoría. Iones individuales de  $\text{Ca}^+$ ,  $\text{Be}^+$ ,  $\text{Ba}^+$  y  $\text{Mg}^+$ , por ejemplo, pueden ser almacenados incluso durante días.

Los iones atrapados pueden ser utilizados para implementar una compuerta cuántica y muchos iones atrapados arreglados en cadena parece ser una herramienta prometedora para realizar una computadora cuántica [4]. Cada ion en la cadena representa una unidad fundamental de información o q-bit. El atrapamiento de iones individuales también ofrece numerosas posibilidades en espectroscopía [5], en la investigación de estándares de frecuencias [6,7], en el estudio de saltos cuánticos [8] y en la generación de estados no clásicos del estado vibracional del ion [9]. En algunas aplicaciones es un requerimiento que el ion se encuentre en su estado base vibracional. Esto sirve para dos propósitos principales: hacer que los iones sean más estables en la trampa, aumentando su duración de confinamiento y eliminar movimientos aleatorios indeseados. Mediante el uso apropiado de láseres la energía puede ser removida hasta llevarlos al estado base de vibración. Con la ayuda de estos láseres, los niveles internos del ion atrapado pueden ser acoplados a sus estados cuánticos vibratoriales, de tal modo que, para una cierta desintonía, el acoplamiento

es equivalente al hamiltoniano Jaynes-Cummings [10]. Por otro lado, el campo de luz que induce el acoplamiento puede ahora ser sintonizado de tal modo que permita interacciones en las cuales el estado interno y vibracional del ion sufren simultáneamente una transición, ya sea a un nivel de energía superior o inferior. Este tipo de acoplamiento es denominado anti-Jaynes-Cummings. Alternando sucesivamente estos dos tipos de interacciones puede lograrse que un ion atrapado pierda energía hasta ser llevado a su estado base vibracional.

Este artículo está dedicado a la presentación de algunos trabajos teóricos en el campo de la física de iones atrapados. Nuestro enfoque está dirigido al análisis del Hamiltoniano de interacción entre un ion y un haz láser, dependiente e independiente del tiempo. Para esto, en la Sec. 2 se revisan los mecanismos básicos de la trampa de Paul, ya que estaremos suponiendo a un ion confinado en este tipo de trampa. En la Sec. 3 se expone la teoría, como antecedente, sobre el enfriamiento láser del movimiento vibratorio de un ion, considerando la interacción de éste con un láser sintonizable fuera de resonancia. Junto con esto se muestra una nueva propuesta considerando interacción resonante entre el ion y un láser. En la Sec. 4 analizamos el caso de un ion con una frecuencia dependiente del tiempo interaccionando con un haz láser. Mediante una serie de transformaciones unitarias se linealiza el hamiltoniano de este sistema llevándolo a una forma soluble sin necesidad de ningún tipo de aproximaciones; la linealización también es válida para cualquier tipo de desintonía y para cualquier dependencia temporal de la trampa. Además, presentamos un caso específico de dependencia temporal de los parámetros de la trampa. La Sec. 5 es dedicada a las conclusiones.

## 2. Trampa de Paul

En esta sección se revisan algunos conceptos básicos sobre la trampa de Paul. Se expone que el potencial de la trampa es cuadrupolar y que es necesario tener campos oscilantes para poder llevar a cabo el confinamiento de iones. Se muestra que la ecuación que gobierna el movimiento del ion es la ecuación de Mathieu. Se concluye con una solución aproximada de dicha ecuación.

### 2.1. El potencial cuadrupolar de la trampa de iones

Las trampas de Paul, las cuales utilizan potenciales eléctricos estáticos y oscilantes, se han empleado exitosamente para confinar partículas cargadas. Las partículas estarán ligadas a un eje o coordenada en el espacio si una fuerza restauradora lineal actúa sobre ellas:

$$\vec{F} = -c \vec{r}, \quad (1)$$

donde  $\vec{r}$  es la posición de la partícula y  $c$  es una constante. En otras palabras, si la partícula se mueve en un potencial parabólico estático el cual se puede escribir en forma general como

$$\Phi(x, y, z) = A(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2). \tag{2}$$

Las herramientas apropiadas para generar tales campos de fuerza para atrapar partículas cargadas o neutras son campos eléctricos y magnéticos. Por otro lado,  $\Phi$  debe de cumplir la ecuación de Laplace [11]

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{3}$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano.

Dicha ecuación impone la condición

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{4}$$

Existen varias posibilidades de satisfacer esta condición.

- a) Una de ellas es considerar el caso específico  $\alpha=1=-\gamma$ ,  $\beta=0$ , lo cual resulta en un campo bidimensional

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(x^2 - z^2). \tag{5}$$

- b)  $\alpha = \beta = 1, \gamma = -2$ , genera la configuración en tres dimensiones, en coordenadas cilíndricas:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(r^2 - 2z^2), \quad \text{con } r_0^2 = 2z_0^2. \tag{6}$$

La configuración (5) es generada por cuatro electrodos en forma hiperbólica linealmente extendidos en la dirección  $z$  como es mostrada en la Fig. 1.

La configuración (6) se genera por electrodos con forma de hiperboloides de revolución alrededor del eje  $z$ , Fig. 2. El potencial en los electrodos es  $\pm\Phi_0/2$  si uno aplica el voltaje  $\Phi_0$  entre el par de electrodos opuestos. La constante  $A$  se puede obtener en cada caso considerando lo anterior como condición de frontera.

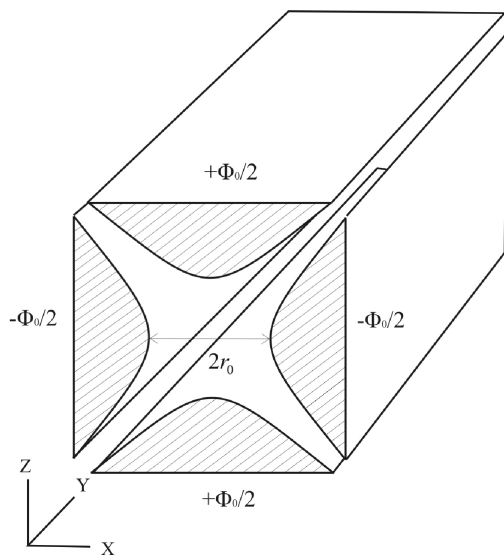


FIGURA 1. Estructura de los electrodos para la configuración bidimensional expresada por la Ec. (5).

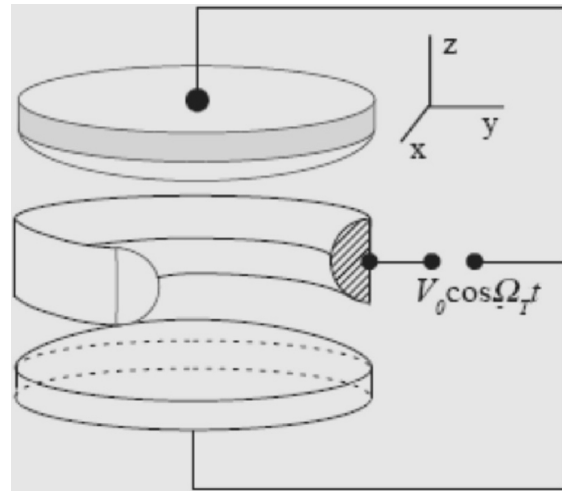


FIGURA 2. Diagrama mostrando los electrodos de la trampa de iones para una configuración en tres dimensiones expresada por la Ec. (6). Tomada de la Ref. 17.

La trampa más comúnmente usada es la trampa lineal, como la de la Fig. 1, pero con polos con una sección transversal circular en lugar de hiperbólica, ya que una de las ventajas es que estos son más fáciles de fabricar. La forma cilíndrica de los polos no corresponde a algún conjunto de valores en (4), pero mediante cálculos numéricos se ha demostrado que el potencial producido por éstos cerca del eje de la trampa es muy similar al producido por los de forma hiperbólica [12].

Para el caso tridimensional la magnitud del campo está dada por

$$E_x = -\frac{\Phi_0}{r_0^2}x, \quad E_y = -\frac{\Phi_0}{r_0^2}y, \quad E_z = 2\frac{\Phi_0}{r_0^2}z. \tag{7}$$

La inspección de las expresiones para el potencial y el campo eléctrico revelan que las componentes  $r$  y  $z$  del campo eléctrico son independientes una de otra y son funciones lineales de  $r$  y  $z$ , respectivamente. También revelan que el potencial es el de un oscilador armónico (parabólico-atractivo) en la dirección radial y un potencial parabólico-repulsivo en la dirección  $z$ . Si uno inyecta un ion es obvio que para un voltaje constante  $\Phi_0$  los iones se mantendrán oscilando armónicamente en el plano  $x - y$ ; pero debido al signo opuesto en el campo  $E_z$ , su amplitud en la dirección  $z$  aumentará exponencialmente. Las partículas se desfocarán y se perderán al chocar contra los electrodos. Así, el potencial cuadrupolar estático por sí mismo no es capaz de confinar partículas en tres dimensiones, ya que la forma del potencial produce a lo más equilibrio inestable. En la siguiente subsección se verá cómo se salva este problema.

## 2.2. Potencial oscilante de la trampa de Paul

El comportamiento inestable de las partículas bajo un potencial estático puede ser evitado si se modifica la trampa. Aplicando un campo eléctrico oscilatorio se produce una situación en la cual las partículas pueden ser confinadas. Debido

al cambio periódico del signo de la fuerza eléctrica, uno obtiene enfocamiento y desenfocamiento en ambas direcciones de  $r$  y  $z$  alternadamente en el tiempo.

Si el voltaje aplicado es dado por un voltaje continuo más un voltaje  $V$  con una frecuencia  $\Omega$ ,

$$\Phi_0 = U_0 + V_0 \cos \Omega t, \quad (8)$$

el potencial resultante en el eje de la trampa tiene la forma

$$\Phi = \frac{U_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{r_0^2 + 2z_0^2} (r^2 - 2z^2), \quad (9)$$

donde  $r_0$  es la distancia desde el centro de la trampa hasta la superficie del electrodo. En la Fig. 3 se muestra un dibujo de una sección transversal de una trampa de Paul usando un campo eléctrico oscilante.

En la sección siguiente se estudiarán algunos detalles sobre el movimiento del ion en la trampa.

### 2.3. Movimiento en la trampa de Paul

Consideremos el caso particular del atrapamiento de un único ion. Para ganar un poco de generalidad tomaremos el caso tridimensional. En un campo de este tipo, las ecuaciones de movimiento de un ion de masa  $m$  y carga  $e$  son

$$m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E} = -q \nabla \Phi, \quad r = (x, y, z), \quad (10)$$

con el objeto de analizar las condiciones de atrapamiento, reescribamos (10) en sus componentes:

$$\ddot{x} = -\frac{2e}{mR^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] x, \quad (11)$$

$$\ddot{y} = -\frac{2e}{mR^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] y, \quad (12)$$

$$\ddot{z} = \frac{2e}{mR^2} [2(U_0 + V_0 \cos(\Omega t))] z, \quad (13)$$

donde  $R^2 = (r_0^2 + 2z_0^2)$ . Después de la sustitución

$$a_r = \frac{8eU_0}{mR^2\Omega^2} = -\frac{a_z}{2}, \quad (14)$$

$$q_r = -\frac{4eV_0}{mR^2\Omega^2} = -\frac{q_z}{2} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{\Omega t}{2},$$

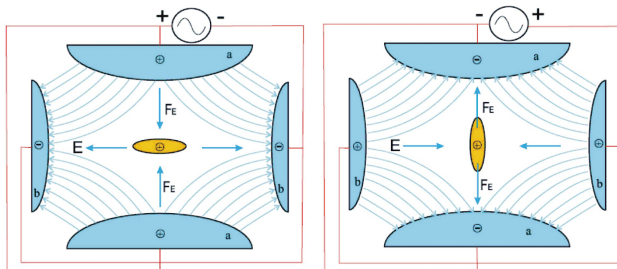


FIGURA 3. Esquema de una trampa de Paul para el almacenamiento de partículas cargadas usando campos eléctricos oscilantes generados por un cuadrupolo. La figura muestra dos estados durante un ciclo AC.

las Ec. (11), (12) y (13) toman la forma de la ecuación de Mathieu:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a_r - 2q_r \cos 2\tau)x = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (a_r - 2q_r \cos 2\tau)y = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + (a_z - 2q_z \cos 2\tau)z = 0, \quad (17)$$

respectivamente. Estas ecuaciones las podemos reescribir en una sola:

$$\frac{d^2u_i}{d\tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau)u_i = 0. \quad (18)$$

El subíndice  $i = r, z$  corresponde a cantidades asociadas con los movimientos axial y radial del ion, respectivamente.  $u_i$  representa el desplazamiento en las direcciones  $r$  y  $z$ .

A continuación procedemos a analizar las condiciones bajo las cuales es posible obtener una solución aproximada de la ecuación (18).

### 2.4. Solución aproximada de la ecuación de Mathieu

La ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos. Esta ecuación puede ser resuelta por el teorema de Floquet [13] el cual conduce a la solución general de (18):

$$u_i(\tau) = A_i e^{i\beta_i \tau} \phi(\tau) + B_i e^{-i\beta_i \tau} \phi(-\tau), \quad (19)$$

$A_i$  y  $B_i$  son constantes determinadas por la posición y velocidad iniciales del ion y

$$\phi(\tau) = \phi(\tau + \pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2in\tau} \quad (20)$$

es una función periódica.

Las ecuaciones de Mathieu tienen dos tipos de soluciones [14]:

- 1) Movimiento estable: Cuando el exponente característico  $\beta$  es puramente real, la variable  $u(\tau)$  es acotada y consecuentemente el movimiento es estable. Esto significa que las partículas oscilan con amplitudes limitadas y sin golpear los electrodos.
- 2) Movimiento inestable: Cuando  $\beta$  tiene una parte imaginaria, la función  $u(\tau)$  contiene una contribución exponencialmente creciente. Las amplitudes crecen exponencialmente y las partículas se pierden al chocar contra los electrodos. Es decir, existen condiciones que posibilitan que el ion quede atrapado en el campo cuadrupolar; es decir, su movimiento axial y radial puede ser estable con amplitudes limitadas.

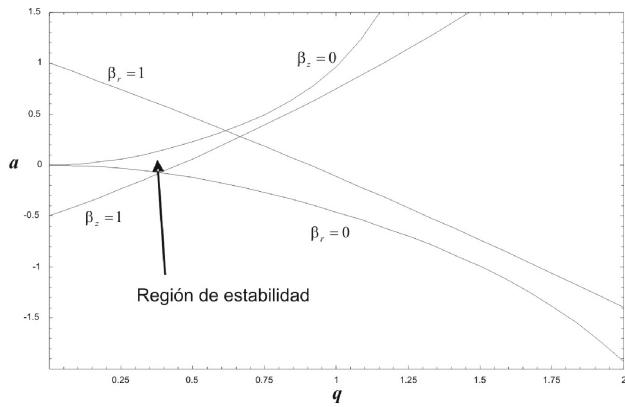


FIGURA 4. Región de estabilidad de la trampa de Paul (Tomada de Ref. 15).

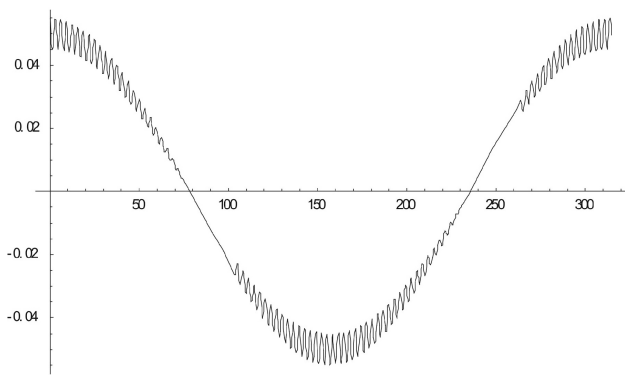


FIGURA 5. Micromovimiento y movimiento secular de un ion atrapado con parámetros  $q = 0.2$ ,  $\beta = 0.02$ . Las oscilaciones a mayor frecuencia son el micromovimiento y las de menor frecuencia el movimiento secular.

Las fronteras de las regiones de estabilidad corresponden a valores enteros o cero de  $\beta_i$  y la primera región de estabilidad está rodeada por cuatro líneas con  $\beta_r = 0$  y  $1$  y  $\beta_z = 0$  y  $1$  [15], como se muestra en la Fig. 4.

Ya que  $\beta_i$  está determinada por  $a$  y  $q$ , la ecuación de Mathieu tiene soluciones estables como una función de  $a$  y  $q$ . Regiones de estabilidad para las soluciones de la Ec. (18) corresponden a regiones en el espacio de los parámetros  $a - q$  en donde se traslapan las regiones de estabilidad en la dirección axial y radial.

En la literatura no es posible encontrar soluciones analíticas para la Ec. (18), pero para la mayoría de las aplicaciones una especificación de la carta de estabilidad de sus soluciones es suficiente y no es necesaria una dependencia funcional detallada. Sin embargo, se puede dar una solución aproximada en la región de estabilidad que es de interés.

Con este fin podemos reescribir la Ec. (19) como

$$u_i(\tau) = A_i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n}^i \cos(2n + \beta_i)\tau + B_i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n}^i \sin(2n + \beta_i)\tau, \quad (21)$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  están determinadas por la posición y velocidad iniciales del ion,  $u_i(0)$  y  $\dot{u}_i(0)$ , respectivamente. El subíndice  $i = r, z$  corresponde a las cantidades asociadas con el movimiento axial y radial del ion, respectivamente.

Los coeficientes  $C_{2n}^i$  están dados por una relación de recurrencia

$$C_{2n+2}^i - D_{2n}^i C_{2n}^i + C_{2n-2}^i = 0, \quad (22)$$

con

$$D_{2n}^i = [a_i - (2n + \beta_i)^2]/q_i. \quad (23)$$

Dados  $a_i$  y  $q_i$ ,  $C_{2n}^i$  y  $\beta_i$  pueden ser calculados. Si definimos

$$G_{2n}^i = \frac{C_{2n}^i}{C_0^i}, A_i' = A_i C_0^i \quad \text{y} \quad B_i' = B_i C_0^i, \quad (24)$$

y haciendo

$$u_i(t) = u_i^s(t) + u_i^m(t), \quad (25)$$

se obtiene de la Ec. (21)

$$u_i^s(\tau) = A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t, \quad (26)$$

$$u_i^m(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t)(G_{2n}^i + G_{-2n}^i) \times \cos n\Omega t] + (B_i' \cos \omega_i t - A_i' \sin \omega_i t) \times (G_{2n}^i - G_{-2n}^i) \sin n\Omega t, \quad (27)$$

con  $\omega_i = \beta_i \Omega / 2$ . Puede verse de las Ecs. (26) y (27) que el movimiento del ion consiste de dos componentes: el movimiento  $u_i^s(t)$  en la forma de una oscilación armónica con una frecuencia  $\omega_i$  y el movimiento  $u_i^m(t)$  compuesto de la superposición de varios armónicos con frecuencia fundamental  $\Omega$  y cuyas amplitudes están moduladas con la frecuencia  $\omega_i$ . Sin embargo, la proporción de las dos componentes, los valores de  $\omega_i$ , el número de subcomponentes que contribuyen apreciablemente y sus pesos dependen fuertemente de los valores  $a_i$  y  $q_i$ , de tal forma que estos variarán con la región. Todo esto se determina cuando los valores de  $\beta_i$  y  $G_{2n}^i$  están dados. Varios valores de  $\beta_i$  y  $G_{2n}^i$  correspondientes a algunos valores típicos de  $a_i$  y  $q_i$  aparecen listados en la Ref. [16]. En esta tabla puede apreciarse que para  $a \ll q \ll 1$  en la primera región uno puede asumir que  $G_2^i \cong G_{-2}^i$  y se pueden ignorar el resto de los coeficientes  $G_{\pm 2n}^i$  ( $n > 1$ ); entonces las Ecs. (26) y (27) pueden ser reescritas como

$$u_i^s(\tau) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (28)$$

$$u_i^m(\tau) = C u_{i0} \cos \Omega t \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (29)$$

es decir,

$$u_i(t) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i) (1 + C \cos \Omega t) \quad (30)$$

$$u_{i0}^2 = A_i'^2 + B_i'^2,$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( A_i' / \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2} \right) \quad \text{y} \quad C = 2G_2^i.$$

En la Fig. (5) se muestra una gráfica de la Ec. (30). El movimiento del ion está compuesto por dos tipos de oscilaciones: la oscilación armónica correspondiente a la frecuencia  $\omega_i$ , llamado movimiento secular, y las pequeñas contribuciones oscilando a la frecuencia  $\Omega$ , llamado micromovimiento. Generalmente se desprecia el micromovimiento, aunque es posible su reducción mediante el uso de electrodos adicionales [17]. De esta forma, el movimiento del ion está gobernado por la Ec. (28) y se comporta como si estuviera confinado en un pseudopotencial armónico, que para la parte radial, tiene la forma

$$q\psi_{2D} = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \quad (31)$$

Típicamente,  $U_0 = 0$  V y de aquí  $a=0$  (además de que se está trabajando en la región para la que  $a \sim 0$ ); así que las frecuencias  $\omega_x$  y  $\omega_y$  son degeneradas. La Ec. (31) se reduce a

$$q\psi_{2D} = \frac{m\omega_r^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (32)$$

Para obtener una expresión para la frecuencia  $\omega_r$  podemos usar la aproximación [18]

$$\beta_r = \sqrt{a_r + \frac{1}{2}q_r^2}, \quad (33)$$

junto con la definición  $\omega_r = \beta_r \Omega / 2$ , para obtener

$$\omega_r = \frac{\Omega q_r}{2^{3/2}} = \frac{eV_0}{mr_0^2 \Omega^{1/2}}. \quad (34)$$

Experimentalmente, los rangos típicos de operación son  $V_0 = 300-800$  Volts,  $\Omega/2\pi = 16 - 18$  MHz y  $r_0 = 1.2$ mm; lo que da una frecuencia radial de  $\omega_r = 1.4-2$  MHz para iones de calcio ( $^{40}\text{Ca}^+$ ). Los iones son creados en la región de atrapamiento; primero se produce un haz de átomos neutros con un horno, se inyectan en la trampa y entonces se ionizan con un haz de electrones [19].

Hasta aquí hemos contemplado algunos conceptos sobre la trampa de Paul, hemos visto que, bajo ciertas condiciones, es válido modelar el movimiento de un ion atrapado en una trampa de Paul como el de un oscilador armónico. Las secciones siguientes están dedicadas al estudio de la interacción entre un ion atrapado y un haz láser bajo distintas condiciones de interacción.

### 3. Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia independiente del tiempo

En esta sección se estudia la interacción de un láser con un ion atrapado en un potencial armónico con una frecuencia constante a partir del hamiltoniano de este sistema; se

muestra que es posible encontrar transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings para distintos casos de resonancia y para diferentes intensidades del láser que induce el acoplamiento entre los estados internos y vibracionales del ion.

#### 3.1. Hamiltoniano del sistema

En la sección anterior se mostró que el movimiento de un ion confinado en una trampa de Paul puede ser considerado como un movimiento armónico. Ahora procedemos a estudiar la interacción de un láser con un ion atrapado en una trampa con una frecuencia independiente del tiempo. Para esto consideramos el hamiltoniano, esto es, la energía total del sistema, para un único ion atrapado en un campo cuadrupolar eléctrico vibrando armónicamente en la dirección  $x$ . Este movimiento vibracional se acopla a la dinámica interna del ion, lo cual se logra vía la interacción con el láser. El modelo contempla usualmente tres términos: la energía vibracional del centro de masas del ion, la energía interna del mismo y la energía de interacción entre el láser y el ion. Esto lo podemos escribir en la forma

$$H = H_{vib} + H_{at} + H_{int}, \quad (35)$$

donde  $H_{vib}$  es la energía vibracional del centro de masa del ion,  $H_{at}$  es la energía interna del ion y  $H_{int}$  es la energía de interacción entre el ion y el láser.

Los movimientos vibracionales se modelan como los de un oscilador armónico cuántico. Para describir la energía interna del ion se considera la energía de transición entre dos niveles de todo su espectro. La energía de interacción entre el ion y el láser se representa mediante la interacción dipolar eléctrica  $-e \vec{r} \cdot \vec{E}$ , donde  $e \vec{r}$  es el momento dipolar del ion y  $\vec{E}$  es el campo eléctrico del láser, cuya parte negativa se escribe como

$$\vec{E}^{(-)}(\hat{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(k\hat{x} - \omega t)},$$

es decir, se considera una onda plana. El hamiltoniano total es simple pero no idealizado. En una trampa de Paul la principal limitante para el tiempo de vida de un ion atrapado son las colisiones con moléculas o átomos del medio ambiente. Estas colisiones pueden provocar que el ion pierda su estado vibracional y/o interno o que sea proyectado hacia alguno de los polos. En la práctica es un requisito indispensable encapsular la trampa al alto vacío para evitar esto y es el motivo por el que no se tomen en cuenta términos de relajamiento en el hamiltoniano. Una revisión sobre este tema se puede encontrar en [20,21]. Explícitamente (35) se escribe

$$H = \hbar\nu \hat{n} + \frac{\hbar\omega_{21}}{2} \sigma_z + \lambda E_0 (e^{i(kx - \omega t)} \sigma_+ + e^{-i(kx - \omega t)} \sigma_-). \quad (36)$$

El primer término en el hamiltoniano es la energía de vibración del ion donde  $\hat{n} = a^+a$  es el operador de número y

$$a = \sqrt{\frac{\nu}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2\hbar\nu}}, \quad a^+ = \sqrt{\frac{\nu}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2\hbar\nu}}, \quad (37)$$

son los operadores de aniquilación y creación respectivamente, con la masa del ion,  $m$ , igual a 1. Por comodidad se ha desplazado el hamiltoniano vibracional en una cantidad  $\hbar\nu/2$ , el cual es un término constante y con esto no se pierde información del sistema. El segundo término corresponde a la energía interna del ion donde  $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$  son las matrices de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $\omega_{21}$  es la frecuencia de transición entre el estado base y excitado; el tercero es la energía de interacción entre el ion y la onda plana. En el tercer término se ha aplicado una aproximación de onda rotante [27].

### 3.2. Interacción fuera de resonancia e intensidad baja

Esta sección está dedicada al estudio de la interacción fuera de resonancia entre un láser y una transición electrónica de un ion atrapado en un campo. Cabe aclarar que este método que se mostrará es usado comúnmente por los grupos de investigación que se dedican al estudio de la dinámica de un ion atrapado inducida por láser [22-24]. La motivación para mostrarlo aquí es para contrastarlo con otro método novedoso que se mostrará más tarde.

Consideramos primero la transformación a un marco rotante de frecuencia  $\omega$  por medio de la transformación unitaria

$$T(t) = e^{i\frac{\omega}{2}\sigma_z t} \quad (38)$$

Si consideramos que el hamiltoniano (39) corresponde a la función de onda  $|\xi(t)\rangle$ , la ecuación de Schrödinger puede escribirse como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\xi\rangle = H|\xi\rangle. \quad (39)$$

Aplicando la transformación  $T$

$$T(t)|\xi(t)\rangle = |\phi(t)\rangle, \quad (40)$$

la expresión

$$H_T = \left( i\hbar\frac{\partial T(t)}{\partial t}T^+(t) + T(t)HT^+(t) \right), \quad (41)$$

corresponde al hamiltoniano transformado. Siempre que llevemos a cabo una transformación en el sentido de (40) debemos calcular la expresión (41) para obtener el nuevo hamiltoniano. En este caso el hamiltoniano transformado es

$$H_T = \hbar\nu\hat{n} + \hbar\frac{k}{2}\nu\sigma_z + \lambda E_0(e^{i\eta(a^++a)}\sigma_+ + H.c.), \quad (42)$$

en donde

$$\eta = K\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}, \quad (43)$$

es llamado parámetro de Lamb-Dicke, el cual es una medida de la amplitud de las oscilaciones del ion respecto de la longitud de onda del láser que lo ilumina.  $K$  es el vector de onda del láser y

$$k\nu = \omega_{21} - \omega \quad (44)$$

es la desintonía entre la frecuencia de la onda plana y la frecuencia de transición del ion; es decir, estamos considerando que la desintonía es un múltiplo entero de la frecuencia vibracional del ion. El operador de posición  $x$  se ha expresado, de acuerdo a la Ec. (37), en términos de los operadores de aniquilación.

En la transformación del hamiltoniano se ha usado el lema de Baker-Hausdorff [25]:

$$e^{cA}Be^{-cA} = B + c[A, B] + \frac{c^2}{2!}[A, [A, B]] + \frac{c^3}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (45)$$

donde  $A, B$  son operadores que no conmutan y  $c$  un parámetro constante. También se utilizó la relación de conmutación entre las matrices de Pauli

$$[\sigma_{\pm}, \sigma_z] = \mp 2\sigma_{\pm} \quad (46)$$

Lo siguiente es factorizar la exponencial en (42). Como es una exponencial de operadores se utiliza el teorema de Baker-Hausdorff-Campbell [26]:

$$e^{A+B} = e^B e^A e^{1/2[A, B]} = e^A e^B e^{-1/2[A, B]}, \quad (47)$$

siendo  $A$  y  $B$  operadores que no conmutan,  $[A, B] \neq 0$ , pero que cumplen la relación

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

por lo cual podemos escribir

$$e^{-i\eta(a+a^+)} = e^{-\eta^2/2} e^{-i\eta a^+} e^{-i\eta a}. \quad (48)$$

Desarrollando en serie de Taylor las exponenciales que contienen operadores en la ecuación anterior y sustituyendo en (42)

$$H = \hbar\nu\hat{n} + \frac{\hbar k\nu}{2}\sigma_z + \lambda E_0 e^{-\eta^2/2} \times \left( \sigma_- \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} a^{+n} a^m + c.c. \right). \quad (49)$$

Al desarrollar en serie de Taylor podemos darnos cuenta del alto orden de derivadas presentes en el hamiltoniano

(debido a que  $a^k \rightarrow \partial^k / \partial x^k$ ). Ahora pasamos al cuadro de interacción mediante la transformación

$$T_{int} = e^{i(\nu \hat{n} + \frac{k\nu}{2} \sigma_z)t}. \quad (50)$$

Con esto básicamente eliminamos los dos primeros términos en (49) y mantenemos el tercero que es el de interacción. Al aplicar  $T_{int}$  se usan

$$[a, f(a, a^+)] = \frac{\partial f}{\partial a^+}, \quad (51)$$

y

$$[a^+, f(a, a^+)] = -\frac{\partial f}{\partial a}. \quad (52)$$

El hamiltoniano transformado está dado por

$$H_{int} = \Omega e^{-\eta^2/2} \left( \sigma_- \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} \times a^{+n} a^m e^{\frac{i}{\hbar}(n-m-k)\nu t} + c.c. \right), \quad (53)$$

con

$$\Omega = \lambda E_0, \quad (54)$$

llamada frecuencia de Rabi. Esta es la frecuencia a la cual intercambian energía los estados internos y vibracionales del ion. El hamiltoniano de interacción (53) consiste de una variedad de contribuciones las cuales oscilan a frecuencias que son múltiplos de  $\nu$ .

Ahora aplicamos la aproximación de onda rotante [27], lo cual consiste en lo siguiente: debido a que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo tenemos que integrar en el tiempo. Esta integración trae la suma y diferencia de frecuencia al denominador. De esto la contribución dominante debe venir de los términos variando lentamente por lo que se desechan los términos que rotan más rápidamente, por considerar que su contribución al hamiltoniano es despreciable, conservándose los más lentos. En este caso los términos que no rotan rápidamente son aquellos cuyo exponente cumple la relación  $n - m = k$  y son los que podemos conservar, ya que al hacer esta consideración estos términos no rotan. La aproximación es válida para

$$\Omega \ll \nu. \quad (55)$$

Como  $\Omega$  es proporcional a la amplitud del campo eléctrico del láser, Ec. (54), decimos que esta aproximación es válida para una intensidad baja.

Tenemos entonces que

$$H_{int} = \Omega e^{-\eta^2/2} \times \left( \sigma_- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{2m+k}}{(m+k)!m!} a^{+k} a^{+m} a^m + c.c. \right). \quad (56)$$

Se puede reescribir lo anterior si utilizamos la relación de completitud de los estados de número

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|, \quad (57)$$

Es el operador identidad, para escribir

$$a^{+m} a^m \sum |j\rangle \langle j| = \frac{\hat{n}!}{(\hat{n}-m)!} \sum |j\rangle \langle j|, \quad (58)$$

Sustituyendo (58) en (56) se puede obtener

$$H_{int} = \Omega e^{-\eta^2/2} \times \{ a^{+k} \sigma_- (-i\eta)^k \frac{n!}{(n+k)!} L_{\hat{n}}^{(k)}(\eta^2) + c.c. \}, \quad (59)$$

donde  $L_{\hat{n}}^{(k)}(\eta^2)$  son los polinomios asociados de Laguerre 41[28].

Considerando el caso  $k=1$  y el régimen de Lamb-Dicke, es decir,  $\eta \ll 1$ , lo que significa que la amplitud de oscilación del ion es mucho menor que la frecuencia del láser, el hamiltoniano toma la forma

$$H_{jc} = -i\eta\Omega_0(a^+ \sigma_- - a\sigma_+), \quad (60)$$

$k=1$  significa que el movimiento vibracional del ion y los estados internos del mismo intercambian un fotón. El hamiltoniano (60) describe la emisión y absorción de un cuanto vibracional cuando el átomo sufre transiciones electrónicas. El primer término implica el ascenso en un cuanto del movimiento vibracional del ion y la transición, al mismo tiempo, de un estado interno excitado al estado base. El segundo término corresponde a la situación contraria, a la creación de un estado interno excitado del ion y al decaimiento, al mismo tiempo, del movimiento vibracional en un cuanto. Esto puede verse si aplicamos el operador (60) al estado  $|n\rangle |e\rangle$ ,  $|n\rangle$  representa  $n$  cuantos vibracionales y  $|e\rangle$  al ion en estado excitado, lo que da

$$H_{jc} |n\rangle |e\rangle \propto |n+1\rangle |g\rangle, \quad (61)$$

y

$$H_{jc} |n+1\rangle |g\rangle \propto |n\rangle |e\rangle. \quad (62)$$

Se puede generalizar este clase de hamiltonianos para varios iones [29].

Partiendo de nuevo del hamiltoniano (42) podríamos repetir todo el procedimiento utilizado para el caso en que la frecuencia del láser es menor que la de la transición, pero ahora para el caso en que la frecuencia de láser es mayor que la de la transición

$$k\nu = \omega - \omega_{21}, \quad (63)$$

para obtener el siguiente hamiltoniano:

$$H_{ajc} = -i\eta\Omega_0(a\sigma_- - a^+\sigma_+). \quad (64)$$



En el primer término se tiene la aniquilación de un cuanto en el movimiento vibracional y la transición del estado excitado al estado base en los niveles internos del ion. El segundo término nos dice que el ion puede sufrir la creación de un cuanto en su estado vibracional y el ascenso del estado base al excitado en sus niveles internos. Éste es un hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings. Fig. 6a.

Lo anterior puede verse si aplicamos el hamiltoniano (64) al estado  $|n\rangle|e\rangle$

$$H_{ajc}|n\rangle|e\rangle = |n-1\rangle|g\rangle, \quad (65)$$

y

$$H_{ajc}|n-1\rangle|g\rangle = |n\rangle|e\rangle. \quad (66)$$

El poder realizar estos dos tipos de hamiltonianos, (60) y (64), significa que podemos llevar un ion atrapado a su nivel más bajo de energía vibracional alternando sucesivamente, y cuantas veces sea necesario, la desintonía entre la frecuencia de la onda plana y la frecuencia de transición interna del ion. Esto implica la utilización de un láser sintonizable. Esto puede ilustrarse si consideramos a un ion inicialmente en estado base interno y en estado  $n$  vibracional, al aplicarle el hamiltoniano (60)

$$H_{jc}|n\rangle|g\rangle = |n-1\rangle|e\rangle. \quad (67)$$

Si ahora le aplicamos (64) al nuevo estado

$$H_{ajc}|n-1\rangle|e\rangle = |n-2\rangle|g\rangle. \quad (68)$$

Lo que significa que el ion ha perdido dos cuantos de energía vibracional.

### 3.3. Interacción resonante a intensidad intermedia

En esta sección se introduce una nueva forma de lograr las interacciones Jaynes-Cummings y anti Jaynes-Cummings.

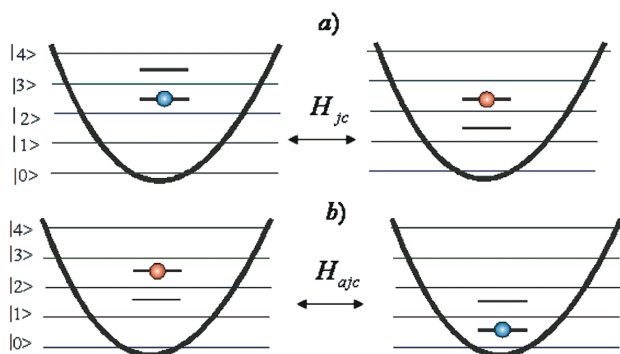


FIGURA 6. Un hamiltoniano Jaynes-Cummings implica el ascenso en un cuanto del movimiento vibracional del ion (del estado  $n=3$  al  $n=2$ ), representado por los escalones, y la transición, al mismo tiempo, de un estado interno excitado al estado base o viceversa. b) El hamiltoniano anti Jaynes-Cummings tiene el efecto de aniquilar un cuanto en el movimiento vibracional y la transición del estado excitado al estado base en los niveles internos del ion o viceversa.

En esta propuesta se demuestra que partiendo del hamiltoniano (42) se pueden alcanzar el mismo tipo de transiciones dadas por los Hamiltonianos (60) y (64) utilizando un láser a una sola frecuencia resonante y a una intensidad intermedia, y de esta forma más rápido que para el caso de intensidad baja debido a que la frecuencia de Rabi es mayor.

La condición de resonancia entre el láser y el ion es

$$\omega_{21} = \omega. \quad (69)$$

Si introducimos esta condición en el hamiltoniano (42) resulta

$$H = \hbar\nu \hat{n} + \Omega(\sigma_- e^{-i\eta(a+a^+)} + H.c.). \quad (70)$$

Considerando el régimen de Lamb-Dicke,  $\eta \ll 1$ , y desarrollando la exponencial en serie de Taylor a primer orden se obtiene

$$H = \hbar\nu \hat{n} + \Omega(\sigma_- \{1 - i\eta(a+a^+)\} + \sigma_+ \{1 + i\eta(a+a^+)\}), \quad (71)$$

reagrupando términos se tiene que

$$H = \hbar\nu \hat{n} + \Omega i\eta(a+a^+)(\sigma_+ - \sigma_-) + \Omega(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (72)$$

Podemos transformar este hamiltoniano mediante una rotación del tipo [30]

$$R = e^{\frac{1}{2}i\theta\sigma_y} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2}. \quad (73)$$

Con esto, el hamiltoniano rotado es

$$H_\theta = \hbar\nu \hat{n} + \Omega i\eta(a+a^+)(\sigma_+ - \sigma_-) + \Omega[(\sigma_+ + \sigma_-) \cos\theta + \sigma_z \sin\theta]; \quad (74)$$

haciendo  $\theta = \pm\pi/2$  encontramos

$$H_{\pm\pi/2} = \hbar\nu \hat{n} \pm \Omega\sigma_z + \Omega i\eta(a+a^+)(\sigma_+ - \sigma_-). \quad (75)$$

Mediante la transformación

$$T' = \exp\left(i(\nu \hat{n} \pm \Omega\sigma_z)t\right), \quad (76)$$

pasamos al cuadro de interacción, obteniéndose

$$H'_{\pm\pi/2} = \Omega i\eta \left( a\sigma_+ e^{-i(\nu\mp 2\Omega)t} - a\sigma_- e^{-i(\nu\pm 2\Omega)t} + a^+\sigma_+ e^{i(\nu\pm 2\Omega)t} - a^+\sigma_- e^{i(\nu\mp 2\Omega)t} \right). \quad (77)$$

En los Hamiltonianos transformados (77) se puede apreciar que se tienen términos que oscilan a las frecuencias  $\nu + 2\Omega$  y  $\nu - 2\Omega$ . Por la aproximación de onda rotante se tiene que la contribución dominante viene de los términos que oscilan más lentamente, es decir, de aquellos que cumplen

$$\Omega \approx \frac{\nu}{2}. \quad (78)$$

Con esto los hamiltonianos de interacción con aproximación de onda rotante están dados por

$$H'_{+\pi/2} = \Omega i \eta (a \sigma_+ - a^+ \sigma_-), \quad (79)$$

$$H'_{-\pi/2} = \Omega i \eta (a^+ \sigma_+ - a \sigma_-). \quad (80)$$

La Ec. (79) corresponde a un hamiltoniano tipo Jaynes-Cummings y (80) a un hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings. Estos hamiltonianos se han obtenido mediante la condición (69), y debido a que  $\Omega$  está relacionada con la intensidad de la onda plana como  $\Omega = \lambda E_0$  a través de (54), esto significa que podemos obtener las transiciones Jaynes-Cummings y anti Jaynes-Cummings ajustando la intensidad de la onda plana según (78), es decir a una intensidad intermedia, y a una sola frecuencia resonante, condición (69), eliminando la necesidad de utilizar un láser sintonizable como en el caso del método mostrado como antecedente. La rotación (73) está relacionada con la interacción resonante semiclásica del ion con un láser adicional, donde  $\theta$  específicamente es

$$\Omega_{sc} t = \theta, \quad (81)$$

siendo  $\Omega_{sc}$  la frecuencia de Rabi y  $t$  el tiempo de interacción. Podemos decir que

- i) Un pulso  $+\pi/2$  produce interacciones Jaynes-Cummings. Es decir,

$$|n\rangle |e\rangle \xleftrightarrow{+\pi/2} |n+1\rangle |g\rangle. \quad (82)$$

- ii) Un pulso  $-\pi/2$  produce interacciones anti-Jaynes-Cummings. Es decir,

$$|n+1\rangle |e\rangle \xleftrightarrow{-\pi/2} |n\rangle |g\rangle. \quad (83)$$

## 4. Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia dependiente del tiempo

Es esta sección se estudia el problema de un ion atrapado en una trampa con frecuencia dependiente del tiempo interactuando con un haz láser. Mediante un conjunto de transformaciones unitarias se muestra que este sistema es equivalente a la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo. Usando transformaciones unitarias dependientes del tiempo se linealiza el problema. Se presenta el caso particular de una trampa con una frecuencia en forma de un tren de escalones.

### 4.1. Oscilador armónico dependiente del tiempo

En la sección anterior se estudió la interacción entre un ion confinado en una trampa con una frecuencia independiente del tiempo y un haz láser. Pero en una trampa de Paul la frecuencia de la trampa podría ser manipulada de tal forma que no sea constante sino que varíe en el tiempo. En esta sección se estudiará el caso de un ion con un confinamiento oscilatorio en una trampa con una frecuencia dependiente del tiempo.

#### 4.1.1. Invariante de Lewis

En 1967 Lewis [31] consideró sistemas físicos que poseen un hamiltoniano de la forma

$$H = (1/2\varepsilon) (p^2 + \omega^2(t)x^2), \quad (84)$$

donde  $x$  es una coordenada canónica,  $p$  es su momento conjugado y  $\omega(t)$  es una función continua de  $t$  arbitraria. La motivación original para considerar tales sistemas fue el deseo de investigar la naturaleza de las series del momento magnético para un partícula cargada moviéndose en un campo electromagnético relativamente simple para el cual el potencial escalar es cero y donde el vector potencial es

$$\vec{A} = \frac{1}{2} h(t) \vec{B}(t) \times \vec{r}. \quad (85)$$

La ecuación de movimiento para tal sistema corresponde al hamiltoniano (84), en cuyo caso  $\omega(t)$  es  $1/2B(t)$ , y  $\varepsilon$  es la razón carga-masa. Lewis aplicó la teoría de Kruskal [32] a este sistema y como una consecuencia derivó un invariante exacto. Dicho invariante resulta ser

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 + \left( \rho p - \dot{\rho} x \right)^2 \right]. \quad (86)$$

Con  $\rho$  una función de  $t$  satisfaciendo la llamada ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho} + \omega(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}, \quad (87)$$

puede verse más sobre la obtención de este invariante en la Ref. 33.

Este invariante es una constante de movimiento del sistema descrito por el hamiltoniano (84) en el sentido de que

$$\frac{dI}{dt} = 0. \quad (88)$$

Si se considera a un sistema cuántico cuyo hamiltoniano esté dado por la Ec. (84) donde  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  son ahora operadores que satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (89)$$

Usando esta relación de conmutación y la ecuación para  $\rho$  se puede demostrar que la cantidad  $I$ , el cual es un invariante del sistema clásico, es también un invariante del sistema cuántico. Esto es, satisface,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0. \quad (90)$$

En lo siguiente  $x$  y  $p$  son operadores y se omitirá el signo de operador  $\wedge$ .

4.1.2. Transformaciones unitarias

Recientemente Moya-Cessa y Fernandez Guasti [34] presentaron una forma de resolver la ecuación de Schrödinger mediante el uso del invariante. Utilizando transformaciones unitarias que involucran la función auxiliar de este sistema cuántico logran resolver la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico con parámetros dependientes del tiempo, cuya ecuación es de la forma

$$H = (1/2) (p^2 + \omega^2(t)x^2). \tag{91}$$

Dichas transformaciones unitarias son

$$D = \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right), \tag{92}$$

$$S = \exp\left(i\frac{\ln\rho}{2\hbar}(xp + px)\right). \tag{93}$$

Estas transformaciones pueden ser obtenidas a partir del invariante de Lewis considerando a los términos  $x/\rho$  y  $p\rho$  en el invariante como una compresión en las variables  $x$  y  $p$ , y al término  $-\dot{\rho}x$  como un desplazamiento en la variable  $p$ .

Una transformación unitaria de la forma  $\exp(ix\alpha)$  desplaza al operador de momento  $p$  en una cantidad  $-\alpha$  [35]:

$$e^{ix\alpha}pe^{-ix\alpha} = p - \alpha. \tag{94}$$

Puede verse esto usando el lema (45) y la relación de conmutación entre  $x$  y  $p$  (89). En general se tiene

$$e^{ix^n\alpha/n}pe^{-ix^n\alpha/n} = p - \alpha x^{n-1}. \tag{95}$$

Usando esta expresión para el caso del invariante de Lewis puede escribirse el desplazamiento en el operador momento como en la Ec. (95) el cual actúa sobre  $p$  como

$$\exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\rho(t)}\right)p\exp\left(\frac{i\dot{\rho}(t)x^2}{2\rho(t)}\right) = p + \frac{\dot{\rho}(t)x}{\rho(t)}. \tag{96}$$

Aplicado al invariante resulta

$$DID^+ = \frac{1}{2} \left(\rho^2 p^2 + \frac{1}{\rho^2} x^2\right). \tag{97}$$

Por otro lado, la transformación unitaria realizada por el operador de compresión [36]

$$\exp\left(i\frac{g(t)}{2}(xp + px)\right), \tag{98}$$

genera una compresión y una dilatación en las variables posición y momento. Para  $p$  se tiene

$$SpS^+ = pe^{g(t)}, \tag{99}$$

y para  $x$

$$SxS^+ = xe^{-g(t)}. \tag{100}$$

La compresión y la dilatación dependen del signo de  $g(t)$ . Haciendo  $g(t) = \ln\rho$ , para el caso del invariante de Lewis se obtiene la transformación (93) la cual genera

$$SpS^+ = \rho p, \tag{101}$$

y

$$SxS^+ = \frac{x}{\rho}. \tag{102}$$

Si aplicamos  $S$  a (97) se obtiene

$$SDID^+S^+ = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) \tag{103}$$

Es decir, el invariante de Lewis es transformado en un operador que no depende explícitamente del tiempo. Enseñada mostraremos como esta transformación permite una solución simple de la ecuación de Schrödinger.

Las transformaciones  $S$  y  $D$  se pueden agrupar en una sola transformación  $T_{SD}$ :

$$T_{SD} = \exp\left(\frac{i\ln\rho(xp+px)}{2\hbar}\right)\exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\rho(t)}\right). \tag{104}$$

Esta transformación  $T_{SD}$  tiene la propiedad de que al ser aplicada al hamiltoniano del oscilador armónico dependiente del tiempo, Ec. (91), factoriza la dependencia temporal del hamiltoniano, es decir, si  $|\psi\rangle$  corresponde a la función de onda del oscilador dependiente del tiempo,  $T_{SD}$  la transforma en

$$|\varphi\rangle = T_{SD}|\psi\rangle. \tag{105}$$

La ecuación de Schrödinger para  $|\varphi\rangle$  es

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle = H_0|\varphi\rangle, \tag{106}$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2\rho^2(t)}(p^2 + x^2). \tag{107}$$

Es decir, la transformación factoriza la dependencia temporal del hamiltoniano, permitiendo una solución muy simple.

Este hecho se utiliza en la siguiente sección para el análisis del problema de un ion con frecuencia dependiente del tiempo interactuando con un láser lo que permite encontrar una forma de su hamiltoniano que sea soluble.

#### 4.2. Análisis del hamiltoniano de interacción entre un láser y un ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo

El hamiltoniano del sistema ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo en interacción con un láser es

$$H = \frac{1}{2} (p + \nu^2(t)x^2) + \frac{\hbar}{2}\omega_{21}\sigma_z + \hbar\lambda(t) [E^{(-)}(x,t)\sigma_- + H.c.]. \quad (108)$$

El hamiltoniano se construye igual que en el caso independiente del tiempo pero ahora la frecuencia de la trampa no es constante sino que se considera una función del tiempo. La ecuación de Schrödinger para este hamiltoniano la escribimos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\xi(t)\rangle = H |\xi(t)\rangle. \quad (109)$$

En el análisis del problema primero hacemos la transformación

$$|\phi(t)\rangle = T_{SD}(t) |\xi(t)\rangle, \quad (110)$$

con

$$T_{SD}(t) = \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{\nu_0}\}(xp + px)}{2\hbar}\right) \times \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right), \quad (111)$$

y la ecuación de Ermakov (87) como auxiliar.

Esta transformación convierte la función de onda correspondiente al hamiltoniano (108) en la función  $|\phi(t)\rangle$ . Al igual que en las transformaciones que hemos utilizado anteriormente debemos calcular la expresión

$$H_{SD} = \left(i\hbar \frac{\partial T_{SD}(t)}{\partial t} T_{SD}^+ + T_{SD}(t) H T_{SD}^+(t)\right) \quad (112)$$

para encontrar el hamiltoniano transformado, el cual resulta ser

$$H_{SD} = \frac{1}{2\rho^2(t)\nu_0} (p^2 + \nu_0^2 x^2) + \frac{\hbar}{2}\omega_{21}\sigma_z + \hbar\Omega(t) [e^{-i(k\rho(t)\sqrt{\nu_0}x - \omega t)}\sigma_- + h.c.], \quad (113)$$

siendo

$$\Omega(t) = \lambda E_0 \quad (114)$$

la frecuencia de Rabi.

Como podemos ver en el hamiltoniano (113), hemos podido factorizar la dependencia temporal de la trampa, esta dependencia está implícita en  $\rho(t)$ . Esto representa una ventaja cuando se requiere resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema.

Ahora transformamos a un marco rotante de frecuencia  $\omega$  usando la transformación

$$T_\omega(t) = e^{\frac{i}{2}\omega t\sigma_z}. \quad (115)$$

Para obtener

$$H_\omega = \frac{\hbar}{2\nu_0\rho^2(t)} (p^2 + \nu_0^2 x^2) + \frac{\hbar}{2}(\omega_{21} - \omega)\sigma_z + \hbar\Omega(t) [e^{-i(a+a^+)\eta(t)}\sigma_- + h.c.]. \quad (116)$$

Lo que podemos reescribir como

$$H_\omega = \hbar\tilde{\omega}(t) \left(\hat{n} + 1/2\right) + \hbar\frac{\delta}{2}\sigma_z + \hbar\Omega(t) [e^{-i(a+a^+)\eta(t)}\sigma_- + h.c.], \quad (117)$$

donde  $\delta = (\omega_{21} - \omega)$  es la desintonía entre el láser y el ion.

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} \quad (118)$$

es llamada la frecuencia característica del oscilador armónico dependiente del tiempo. El parámetro de Lamb-Dicke dependiente del tiempo es escrito como

$$\eta(t) = \eta_0\rho(t)\sqrt{\nu_0}, \quad (119)$$

con

$$\eta_0 = k\sqrt{\frac{\hbar}{2\nu_0}}, \quad (120)$$

siendo  $k$  la magnitud del vector de onda del láser que ilumina al ion. También se ha escrito el operador de posición  $x$  en función de los operadores de aniquilación y creación.

Por comparación con (42), el hamiltoniano (117) es equivalente al de la interacción entre un ion atrapado y un haz láser con parámetros dependientes del tiempo.

#### 4.3. Linealización del sistema

En esta sección llamamos linealizar el sistema a reducir el exponente de los operadores  $a$  y  $a^+$  a la primera potencia (ver hamiltoniano (49), el cual contiene todas las potencias) sin uso de aproximaciones.

Para este fin hacemos la transformación

$$|\phi_R\rangle = R(t) |\phi_\omega\rangle, \quad (121)$$

con  $R(t)$  dada por

$$R(t) = \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\sigma_+ - \sigma_-)\right] \times \exp\left[-i\frac{\eta(t)}{2}(a + a^+)\sigma_z\right]. \quad (122)$$

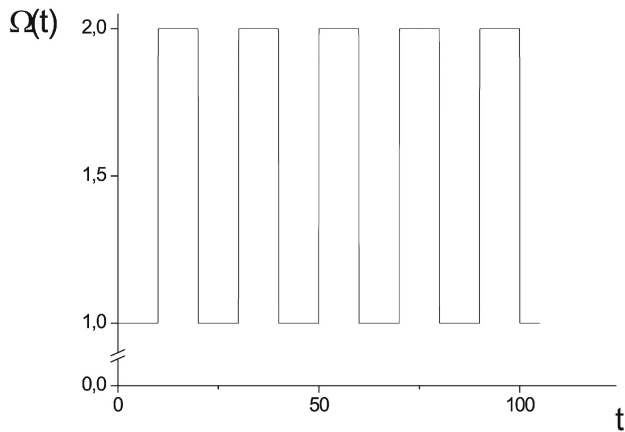


FIGURA 7. Frecuencia del oscilador armónico en forma de tren de escalones. El ancho de los escalones es de 10 unidades y el periodo de 20.

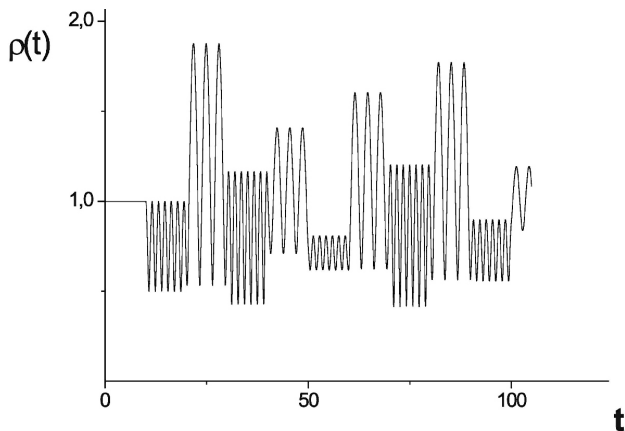


FIGURA 8. Solución numérica de la ecuación de Ermakov correspondiente a una frecuencia como en la Fig. 7.

Con esto se obtiene

$$H_R = \hbar \left( \nu_0 \hat{n} + \Omega(A_{22} - A_{11}) + \left\{ \frac{\delta}{2} + i[a\beta(t) - a^+ \beta^*(t)] \right\} (A_{12} + A_{21}) \right) \quad (123)$$

con

$$\beta(t) = \frac{\eta(t) \tilde{\omega}}{2} - \frac{i \dot{\eta}(t)}{2}.$$

No hemos considerado el término  $\tilde{\omega}(t)/2$  porque solo representa una fase, la cual al promediar observables no influye en el resultado (si  $|\psi_1\rangle = e^{-i\phi} |\psi_2\rangle$  entonces

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \langle \psi_1 | \hat{O} | \psi_1 \rangle \\ &= \langle \psi_2 | e^{+i\phi} \hat{O} e^{-i\phi} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{O} | \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Con la transformación (122) se logra linealizar el hamiltoniano sin necesidad de ningún tipo de aproximaciones, la aproximación de onda rotante no es usada por ejemplo y queda abierta la posibilidad para considerar distintos regímenes

de intensidad; tampoco se ha hecho ninguna suposición sobre  $\eta(t)$ , el parámetro de Lamb-Dicke. También es válido para cualquier tipo de desintonía, y para cualquier dependencia temporal de la frecuencia de la trampa. La forma obtenida para el hamiltoniano es soluble. Un método para resolver interacciones tipo Jaynes-Cummings con parámetros dependientes del tiempo, como el del hamiltoniano (123), se ha publicado en Ref. 37.

Cabe subrayar que no se ha impuesto ninguna condición sobre la forma de la frecuencia de la trampa  $\nu(t)$ , en principio esta frecuencia podría asumir cualquier forma temporal. Para una trampa de Paul, la forma más general es la expresión

$$\nu^2(t) = (a - 2q \cos 2t), \quad (124)$$

de la Ec. (18), con lo que (123) es el hamiltoniano (transformado unitariamente) de interacción haz-láser con micro-movimiento incluido. Así mismo, este hamiltoniano nos da libertad para elegir frecuencias dependientes del tiempo arbitrarias, como la que se muestra en la siguiente sección.

#### 4.4. Frecuencia en forma de un tren de escalones

En la Ref. 34 ha sido demostrado que la Ec. de Schrödinger dependiente del tiempo para el hamiltoniano armónico con parámetros dependientes del tiempo tiene una solución de la forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt} T^+ T(0) |\psi(0)\rangle, \quad (125)$$

donde  $\tilde{\omega}(t) = 1/\rho^2$ .

Por otro lado, en la Ref. 38 se ha estudiado la evolución en el tiempo para un oscilador armónico con una forma particular de dependencia temporal de la frecuencia de oscilación y en ausencia de interacción con un láser. El oscilador se somete a un cambio repentino de frecuencia lo cual se modela como una función escalón. Este estudio está basado en una solución analítica aproximada de la ecuación de Ermakov dependiente del tiempo, [Ec. (87)], para dicha forma de frecuencia. Se muestra en dicho artículo que la función de onda evolucionada de este sistema, para un estado inicial coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle, \quad (126)$$

es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt} T^+ |\alpha\rangle. \quad (127)$$

Este resultado es aplicado en el presente artículo a la situación en la cual la frecuencia del oscilador es un tren de escalones y en donde también estaremos considerando un estado inicial coherente para el oscilador. En este caso la Ec. (125) también es solución de este sistema. Nosotros hacemos la frecuencia inicial del oscilador  $\Omega_1 = 1$  y la final

$\Omega_2 = 2$ , el ancho de los escalones es de 10 unidades y el periodo de 20, (Fig. 7). El análisis se basa en una solución numérica de la Ec. de Ermakov, que se muestra en la Fig. 8, correspondiente a dicha forma temporal de la frecuencia.

Para el primer grupo de oscilaciones se tiene que en los máximos  $\dot{\rho} = 0$  y  $\ln \rho = 0$ , puesto que  $\rho = 1$ , por lo que  $T^+(t_{\text{máx}}) = 1$  y

$$|\psi(t_{\text{máx}})\rangle = \left| \alpha \exp\left(-i \int_0^{t_{\text{máx}}} \tilde{\omega}(t) dt\right) \right\rangle, \quad (128)$$

es decir, se recupera el estado coherente. Para los mínimos se tiene que  $\dot{\rho}(t_{\text{mín}}) = 0$  y  $\ln \rho(t_{\text{mín}}) \neq 0$ , entonces, reescribiendo en función de los operadores de aniquilación y creación, se tiene

$$|\psi(t_{\text{mín}})\rangle = e^{\frac{i \ln \rho(t_{\text{mín}})}{2} (a^2 - a^{+2})} \times \left| \alpha \exp\left(-i \int_0^{t_{\text{mín}}} \tilde{\omega}(t) dt\right) \right\rangle, \quad (129)$$

lo que corresponde a un estado comprimido. La Ec. (129) se puede escribir como

$$|\psi(t_{\text{mín}})\rangle = \left| \alpha \exp\left(-i \int_0^{t_{\text{mín}}} \tilde{\omega}(t) dt\right); \ln \rho(t_{\text{mín}}) \right\rangle. \quad (130)$$

Los estados comprimidos son estados de mínima incertidumbre. En este caso las relaciones de incertidumbre para  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  son

$$\Delta \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho(t_{\text{mín}})}, \quad (131)$$

$$\Delta \hat{p} = \frac{\rho(t_{\text{mín}})}{\sqrt{2}}. \quad (132)$$

Para los siguientes grupos de oscilaciones el análisis es similar. En las regiones en que los máximos son mayores a 1 y los mínimos menores a 1 se tiene compresión en una dirección en el máximo, en la dirección  $x$ , por ejemplo, y dilatación en la dirección  $p$ ; en los mínimos se tiene la situación contraria, dilatación en  $x$  y compresión en  $p$ . En las regiones en donde el máximo y el mínimo son ambos menores a 1 se tiene compresión en la misma dirección, cuando nos fijamos en una de las variables, lo que cambia es el grado de compresión.

Para tiempos intermedios la solución no es un estado coherente ni un estado comprimido sino la función de onda

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i \frac{\dot{\rho}(t)}{2\rho(t)} x^2\right) \times \left| \alpha \exp\left(-i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt\right); \ln \rho(t) \right\rangle. \quad (133)$$

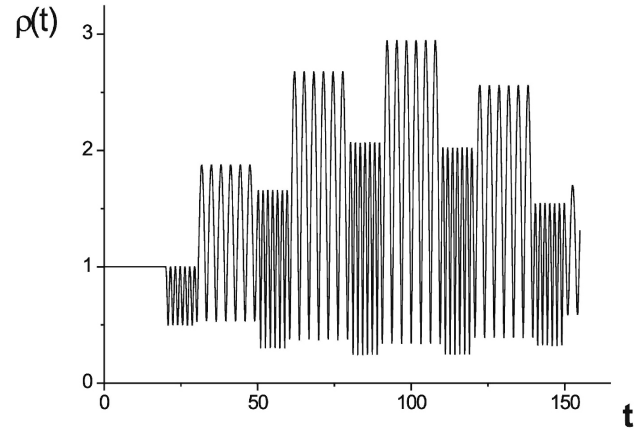


FIGURA 9. Solución numérica de la Ec. de Ermakov correspondiente a una frecuencia como en la Fig. 7, con  $\omega_1 = 1$  durante un tiempo de 20 unidades y  $\omega_2 = 2$  durante 10 unidades.

En la Fig. 9 se muestra la solución de la ecuación de Ermakov para el mismo tipo de frecuencia, solo que en este caso  $\Omega_1 = 1$  durante un tiempo de 20 unidades y  $\Omega_2 = 2$  durante 10 unidades. Comparando ésta con la Fig. 8 podemos ver que la cantidad de máximos y mínimos en cambios de frecuencia correspondientes es función del ancho de los escalones. La dirección de la compresión en dos escalones correspondientes también está influida por dichos parámetros como ocurre en el quinto grupo de oscilaciones.

## 5. Conclusiones

En este artículo se han revisado algunos conceptos básicos sobre atrapamiento de iones en donde nos hemos enfocado particularmente en la trampa de Paul. Hemos estudiado la interacción de un láser con un ion atrapado en un potencial armónico independiente del tiempo y hemos encontrado hamiltonianos de acoplamiento entre los niveles internos del ion y sus estados vibracionales que nos dan transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings para distintos regímenes de interacción. En nuestro tratamiento hemos considerado la condición de resonancia entre el láser y los niveles internos del ion y mediante la aproximación de onda rotante se impone una condición sobre la intensidad del láser (intensidad intermedia), encontrándose que debe ser proporcional a la frecuencia de vibración del ion. Se han utilizado rotaciones del hamiltoniano que corresponden a interacciones del ion con un láser a una frecuencia fija y en resonancia con el ion. Este método es más fácil de implementar porque no es necesaria la utilización de láseres sintonizables. Mediante una serie de transformaciones unitarias se ve que es posible linealizar el hamiltoniano del sistema formado por un ion atrapado sujeto a una frecuencia dependiente del tiempo interactuando con un láser encontrándose una forma soluble sin necesidad de aproximación de onda rotante, tampoco se ha hecho ninguna suposición sobre  $\eta(t)$ , el parámetro de Lamb-Dicke. También es válido el tratamiento para cualquier tipo

de desintonía. Ha quedado sin condición el régimen de intensidad utilizada y la dependencia temporal de la frecuencia de la trampa por lo que se puede considerar el micromovimiento. Por lo mencionado anteriormente la solución presentada es la mejor para este tipo de sistema. Se ha presentado un caso particular de dependencia temporal de la trampa, específicamente, en forma de un tren de escalones. Se ha mostrado que la solución de este sistema para un estado inicial coherente puede recuperar su estado coherente para ciertos tiempos o

producir estados comprimidos. Puede cambiarse la cantidad de estados comprimidos y la dirección de la compresión al cambiar el ancho de los escalones y su periodo.

## Agradecimientos

El Dr. José Manuel Vargas Martínez agradece a CONACYT por la beca de posdoctorado.

1. H.H. Kingdom, *Phys.Rev.* **21** (1923) 408.
2. F.M. Penning, *Physica* **4** (1937) 71.
3. W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 531.
4. J.I. Cirac y P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091(1995).
5. W.M. Itano, J.C. Bergquist, R.G. Hulet y D.J. Wineland, *Physica Scripta* **T22** (1988) 79.
6. D.J. Wineland, W.M. Itano, J.C. Bergquist y H. Hemmati, *Laser-Cooled and Trapped Ions, Proceedings of the Workshop on Spectroscopic Applications of Slow Atomic Beams*, edited by W.D. Phillips, *NBS Spec. Pub.* **653** (1983) 19.
7. J.J. Bollinger, J.D. Prestage, W.M. Itano y D.J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1000.
8. H.F. Powell, M.A. van Eijkelenborg, W. Irvine, D.M. Segal y R.C. Thompson *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** (2002) 205.
9. D.M. Meekhof, C. Monroe, B.E. King, W.M. Itano y D.J. Wineland, *Phys. Rev. Letters* **76** (1996) 1796; ver también H. Moya-Cessa, P.L. Knight y A. Rosenhouse-Dantsker, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 1814.
10. M. Abdel-Aty y Moya-Cessa, *Phys. Lett. A* **369** (2007) 372.
11. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, (Inc., 1962).
12. R.F. Bonner, J.E. Fulford y R.E. March, *International Journal or Mass Spectrometry and Ion Physics* **24** (1977) 255.
13. P.J. Bardroff, C. Leichtle, G. Schrade y W.P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 2198.
14. M. Abramowitz y I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* Dover (New Cork, 1972).
15. D.J. Bate, K. Dholakia, R.C. Thompson y D.C. Wilson, *J. Mod. Opt.* **39** (1992) 411.
16. X. Zhu y D. Qi, *Journal of Modern Optics* **39** (1992) 291 .
17. C.F. Roos, *Tesis doctoral* (Innsbruck, febrero 2000).
18. H. Dehmelt, *Adv. At. Mol. Phys.* **3** (1967) 53.
19. B.E. King, *Tesis Doctoral*, (University of Colorado at Boulder, 1999).
20. D.A. Church, *Phys. Rep.* **228** (1993) 253.
21. L.M. Arévalo-Aguilar y H. Moya-Cessa, *Quant and Semiclass. Opt.* **10** (1998) 671; H. Moya-Cessa, S.M. Dutra, J.A. Roversi and A. Vidiella-Barranco, *J. of Mod. Optics* **46** (1999) 555.
22. D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe y D. Wineland, *Reviews of Modern Physics* **75** (2003) 281.
23. J. Wineland *et al.*, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **103** (1998) 259.
24. M. Sasura y V. Buzek, *Journal of Modern Optics* **49** (2002) 1593.
25. W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (John Wiley and Sons, 1973) p. 137.
26. Ver Ref. 25, p. 136
27. L. Allen y J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover Publications Inc., 1987) p. 41.
28. G.B. Arfken y H.J. Weber, (Mathematical Methods for Physics) 5<sup>th</sup> Edition, (Academic Press) p. 725.
29. T. Jaynes y F.W. Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.
30. Ver Ref. 28, p. 832.
31. H.R. Lewis Jr., *Phys. Rev. Letters* **18** (1967) 510.
32. M. Kruskal, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 806.
33. H.R. Lewis Jr., *Journal of Mathematical Physics* **9** (1967).
34. M. Fernández Guasti y H. Moya-Cessa *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 2069.
35. K.E. Cahill y R.J. Glauber, *Physical Review* **177** 1857.
36. M.O. Scully, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997) p. 63.
37. J.Q. Shen, H. Zhu y P. Chen, *Eur. Phys. J. D* **23** (2003) 305.
38. H. Moya-Cessa y M. Fernández Guasti, *Phys. Lett. A* **311** (2003) 1.