

# El modelo BEG con interacciones de largo alcance: propiedades estáticas y dinámicas

A. Ramírez-Hernández

*Department of Chemical and Biological Engineering,  
University of Wisconsin-Madison, Madison, Wisconsin 53706, USA,  
e-mail: ramirezhera@wisc.edu, abelardo.rhz@gmail.com*

Recibido el 7 de septiembre de 2009; aceptado el 1 de diciembre de 2009

En este trabajo estudiamos algunas propiedades estáticas y dinámicas del modelo introducido por Blume, Emery y Griffiths, considerando interacciones de largo alcance. Éste es un modelo exactamente soluble tanto en el ensemble canónico como en el microcanónico, calculamos la función de partición canónica y a través de ésta las líneas de transición de fase. Derivamos la ecuación cinética para la evolución temporal de la magnetización a través de la ecuación maestra del sistema bajo la dinámica de Glauber, estudiando las propiedades de esta ecuación, nos enfocamos en el comportamiento del sistema como nos aproximamos al punto crítico, observando el fenómeno de alentamiento crítico. Así, este modelo representa un ejemplo bastante interesante donde todas estas propiedades (estáticas y dinámicas) pueden estudiarse de manera exacta, y que presenta un diagrama de fases más rico que el tradicional modelo de Ising, representando un ejemplo con mucho potencial para cursos de física estadística.

*Descriptores:* Interacciones de largo alcance; transiciones de fase; ecuación maestra.

We study the static and dynamic properties of the BEG model with long-range interactions. This model is exactly solvable both in the canonical and in the microcanonical ensembles, we obtain the canonical partition function and the phase transition lines. Also, we study the dynamic properties through the master equation within the Glauber dynamics. We have derived and studied the kinetic equation for the magnetization, we observed the critical slowing down phenomenon near the critical point. Thus, this model represents a very interesting example, where it is possible to study all these phenomena, moreover it has a richer phase diagram than the Ising model, so it can be a nice example as part of the courses of statistical physics.

*Keywords:* Long-range interactions; phase transitions; master equation.

PACS: 64.60.De; 64.60.-i; 64.70.qj

## 1. Introducción

Los ejemplos y problemas dentro de los cursos básicos de física estadística pueden dividirse básicamente en dos: muy simples o extremadamente complicados [1]. Los primeros siendo fáciles de resolver con las técnicas básicas aprendidas en este curso y los últimos requiriendo técnicas muy sofisticadas, como por ejemplo, técnicas de teorías de campo. Además, los ejemplos sencillos típicamente no poseen la riqueza de fenómenos tan interesantes como los efectos cooperativos, dando lugar a transiciones de fase, excepto claro, por el famoso modelo de Ising en la aproximación de campo medio. Por ello, resulta interesante tener a la mano otro modelo que muestre esa riqueza y que además permita ser estudiado tanto desde el punto de vista estático como dinámico.

Aquí nos enfocamos en un modelo cuyas propiedades estáticas pueden ser obtenidas de manera exacta, tanto en el ensemble microcanónico como en el canónico, cuya dinámica puede estudiarse con el uso de la ecuación maestra bajo el esquema de Glauber [2], así, permitiendo cerrar el círculo didáctico sobre el estudio de las propiedades macroscópicas a través de las herramientas de la física estadística. Además es necesario decir que este modelo es el más simple que posee transiciones de fase de primer y segundo orden [3]. Por otro lado, este modelo aunque siendo exactamente soluble, permite mostrar la necesidad del uso de herramientas numéricas

para calcular las cantidades de interés necesarias para el estudio de las propiedades termodinámicas de los sistemas bajo consideración.

Debemos mencionar que este modelo es un ejemplo dentro de una área de investigación bastante reciente, enfocada a los sistemas que poseen interacciones de largo alcance, y para los cuales se ha encontrado que para algunos sistemas, los ensembles estadísticos no son equivalentes [3-5], dando lugar, por ejemplo, a sistemas con calor específico negativo dentro del ensemble microcanónico [5], o a una rica variedad de fenómenos dinámicos, como la existencia de estados cuasi-estacionarios que decaen muy lentamente al equilibrio termodinámico [6-9]. La existencia de sistemas con calor específico negativo tiene consecuencias muy interesantes, por ejemplo, el contacto térmico entre dos sistemas idénticos de este tipo, a la misma temperatura, induce un cambio irreversible en el estado macroscópico de ellos, dando lugar a una violación de la ley cero de la termodinámica [10,11].

## 2. El modelo y sus propiedades estáticas

El modelo a estudiar fue introducido por Blume, Emery y Griffiths en 1971 [12] y es conocido como el modelo BEG. Este modelo fue creado con el objetivo de reproducir el comportamiento de mezclas de  $\text{He}^3$  y  $\text{He}^4$  en estado líquido. Este sistema (la mezcla de helio) es bastante interesante, ya que

muestra transiciones de fase continuas (transición superfluida) y transiciones de fase de primer orden (separación de fases). Los experimentos habían mostrado la existencia de una línea de transiciones de fase continuas (línea lambda) y una línea de transiciones discontinuas, la cual converge con la línea lambda en un punto tricrítico [12]. El modelo, aunque siendo un modelo de espines, reproduce bastante bien este comportamiento en su diagrama de fases y a través del estudio de las propiedades del modelo se pudieron entender varios comportamientos del sistema experimental que trataba de representar.

Aquí consideraremos una versión con interacciones de largo alcance del modelo original [3]. Primero definamos que queremos decir con interacciones de largo alcance: un sistema de partículas cuya interacción entre ellas  $U(r)$  decae a distancias grandes como  $U \sim r^{-\alpha}$  con  $\alpha \leq d$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio en el que el sistema vive, es un sistema con interacciones de largo alcance. Ejemplos: el potencial gravitacional y el potencial dipolo-dipolo en tres dimensiones, el potencial de interacción entre vortices de un fluido incompresible en 2-d [13], etc. El caso especial de sistemas para los cuales la interacción es de alcance infinito ( $\alpha = 0$ ), son llamados *tipo campo medio*. Entonces, pensemos en una malla en una dimensión, donde en cada vértice hay un espín que puede tomar los valores  $S = 0, \pm 1$ , el hamiltoniano que define al modelo está dado por

$$H = \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 - \frac{J}{2N} \left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2, \quad (1)$$

donde  $N$  es el número de espines,  $J > 0$  es la constante de acoplamiento ferromagnética y  $\Delta > 0$  es la constante de acoplamiento a un campo externo. Podemos ver que la interacción ferromagnética, el término

$$\left( \sum_i S_i \right)^2 = \sum_{i \neq j} S_i S_j + cte,$$

es de alcance infinito, ya que la intensidad entre cualquier par de espines sólo depende del estado de los espines pero no de la distancia entre ellos, es decir  $\alpha = 0$  en este caso. Como mencionamos, este modelo muestra transiciones de fase tanto continuas como de primer orden; las transiciones son entre una fase ferromagnética  $m \neq 0$  (a temperaturas bajas), y una fase paramagnética  $m = 0$  (a temperaturas altas); donde  $m$  es el parámetro de orden (magnetización) y está definido por

$$m = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \right|. \quad (2)$$

Ahora calcularemos la energía libre  $F(\beta)$  a través de la función de partición canónica,  $\beta F(\beta) = -\ln Z(\beta)$ , donde  $\beta = 1/k_B T$  es el inverso de la temperatura y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Por definición, la función de partición

canónica es [1]

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{S\}} e^{-\beta H\{S\}} \\ &= \sum_{S_1 \dots S_N} e^{-\beta \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 + \frac{\beta J}{2N} \left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde la suma es sobre todas las configuraciones del sistema. Debido al término ferromagnético, el cual acopla los grados de libertad del sistema, no es posible realizar la suma directamente. La manera de desacoplar a los espines es utilizando una versión de la transformación de Hubbard-Stratonovich [6], definida por la siguiente identidad:

$$e^{\frac{\tilde{\mathbf{M}}^2}{4a}} = \left( \frac{a}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-am^2 - \tilde{\mathbf{M}}m} dm. \quad (4)$$

Utilizando esta identidad con

$$\tilde{\mathbf{M}} = \beta J \sum_{i=1}^N S_i$$

y  $2a = N\beta J$ , e intercambiando la integral y las sumas en (3), obtenemos

$$\begin{aligned} Z &= \left( \frac{N\beta J}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N\beta J}{2} m^2} \\ &\times \left( \sum_{S_1 \dots S_N} e^{-\beta \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 - \beta J m \sum_{i=1}^N S_i} \right) dm. \end{aligned} \quad (5)$$

Los términos dentro del paréntesis en la Ec. (5) se desacoplan, por lo que las sumas pueden ser hechas fácilmente:

$$\begin{aligned} &\sum_{S_1 \dots S_N} e^{-\beta \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 - \beta J m \sum_{i=1}^N S_i} \\ &= \sum_{S_1 \dots S_N} \prod_{i=1}^N e^{-\beta \Delta S_i^2 - \beta J m S_i} \\ &= \left( \sum_{S=0, \pm 1} e^{-\beta \Delta S^2 - \beta J m S} \right)^N \\ &= \left( 1 + 2e^{-\beta \Delta} \cosh(\beta J m) \right)^N. \end{aligned} \quad (6)$$

Así, la Ec. (5) queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z &= \left( \frac{N\beta J}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{N\beta J}{2} m^2 \right. \\ &\left. + N \ln \left( 1 + 2e^{-\beta \Delta} \cosh(\beta J m) \right) \right] dm; \end{aligned} \quad (7)$$

notemos que en el límite  $N \rightarrow \infty$ , el primer factor de la ecuación anterior contribuye a la energía libre por partícula,  $f(\beta) = F(\beta)/N$  con un término que es despreciable, por lo

que en este límite podemos escribir a la función de partición canónica como

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-N\phi(m;\beta,\Delta)} dm, \quad (8)$$

con la función  $\phi(m; \beta, \Delta)$  dada por

$$\phi(m; \beta, \Delta) = \frac{\beta J}{2} m^2 - \ln(1 + 2e^{-\beta\Delta} \cosh(\beta J m)). \quad (9)$$

Ahora, esta integral puede ser realizada por el método de punto silla, ya que estamos considerando el límite de  $N$  muy grande [14,15], así, la energía libre canónica por partícula es

$$\beta f(\beta) = \min_m \phi(m; \beta, \Delta), \quad (10)$$

donde hemos omitido la dependencia sobre la constante  $J$ , porque, sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante consideraremos  $J = 1$ . Ya con la expresión de la energía libre podemos calcular cualquier propiedad derivada de ésta, como la energía por partícula o la entropía, entre otras propiedades [1].

Antes de avanzar, detengámonos un momento en las tres últimas ecuaciones. Primero debemos mencionar que, de hecho, la variable  $m$  en la Ec. (10) es la magnetización definida en la Ec. (2). Para ver que esto es así, en lugar de utilizar la identidad (4), pudimos haber hecho uso de la función Delta de Dirac  $\delta(M - \sum S_i)$  y sus propiedades. Después tendríamos que utilizar la representación integral de esta función, e intercambiar las integrales y las sumas resultantes. Finalmente tendríamos que rotar el contorno de integración, después de lo cual, obtendríamos el mismo resultado para la energía libre. Identificado el significado físico de la variable  $m$  en las ecuaciones anteriores, ahora identifiquemos el significado físico de la función  $\phi$ . De la Ec. (10) vemos que la energía libre está relacionada al valor mínimo de  $\phi$  sobre la variable macroscópica  $m$ , así podemos interpretar a  $\phi$  como una energía libre asociada a cada estado macroscópico  $m$ , cuyo extremo identifica al estado de equilibrio del sistema.  $\phi$  es conocida como energía libre generalizada o energía libre de Landau [1].

Ahora nos enfocaremos en el diagrama de fases. Como mencionamos arriba, la variable  $m$  es la magnetización del sistema, vemos que para un conjunto de valores de  $\beta$  y  $\Delta$ , la magnetización de equilibrio  $m_{eq}$ , será aquella que minimice  $\phi$ , de la expresión para esta función, obtenemos que esta cantidad satisface la ecuación de auto-consistencia,

$$m_{eq} = \frac{2 \sinh(\beta m_{eq})}{e^{\beta\Delta} + 2 \cosh(\beta m_{eq})}, \quad (11)$$

además para que sea un mínimo se debe de satisfacer,

$$1 - \frac{2\beta e^{-\beta\Delta} \cosh(\beta m_{eq})}{1 + 2e^{-\beta\Delta} \cosh(\beta m_{eq})} + \frac{4\beta e^{-2\beta\Delta} \sinh^2(\beta m_{eq})}{[1 + 2e^{-\beta\Delta} \cosh(\beta m_{eq})]^2} > 0. \quad (12)$$

De la Ec. (11) vemos que el estado paramagnético,  $m_{eq} = 0$ , es una solución posible, y esta será estable si se satisface la condición (12). Ahora, como mencionamos arriba, este sistema posee una línea de transiciones de fase continuas en el plano  $(\beta, \Delta)$ , en este caso el parámetro de orden cambia suavemente de un valor cero a un valor distinto de cero como nos acercamos a la temperatura crítica, así, es de esperar que el estado  $m_{eq} = 0$ , pase suavemente de un mínimo a un máximo de la función  $\phi$ , por lo que para un conjunto de valores de la temperatura inversa  $\beta$  y la constante  $\Delta$ , se debe de satisfacer

$$\beta_c = 1 + \frac{1}{2} e^{\beta_c \Delta_c}, \quad (13)$$

obtenida de (12) para el estado paramagnético, con la condición de que la desigualdad sea convertida en una igualdad a cero, así, la Ec. (13) define a línea de transiciones de fase continuas.

Para el caso de las transiciones de primer orden, tenemos que obtener las dos soluciones de (11),  $m = 0$  y  $m \neq 0$ , y evaluar la energía libre (10); el punto  $(\beta_t, \Delta_t)$  donde ambas energías libres son iguales marca el punto de transición de fase de primer orden [1]. Así, podemos obtener el diagrama de fases completo de éste modelo en el plano  $(\beta, \Delta)$ , utilizando para ello rutinas numéricas básicas para resolver el conjunto de ecuaciones auto-consistentes involucradas. Las dos líneas de transición de fase (primer y segundo orden) se juntan en un punto conocido como punto tricrítico, para localizar este punto es necesario hacer una expansión de  $\phi(m; \beta, \Delta)$  para valores de  $m$  pequeños, alrededor del estado paramagnético, obteniendo:

$$\phi = \phi_o + A(\beta, \Delta)m^2 + B(\beta, \Delta)m^4 + O(m^6),$$

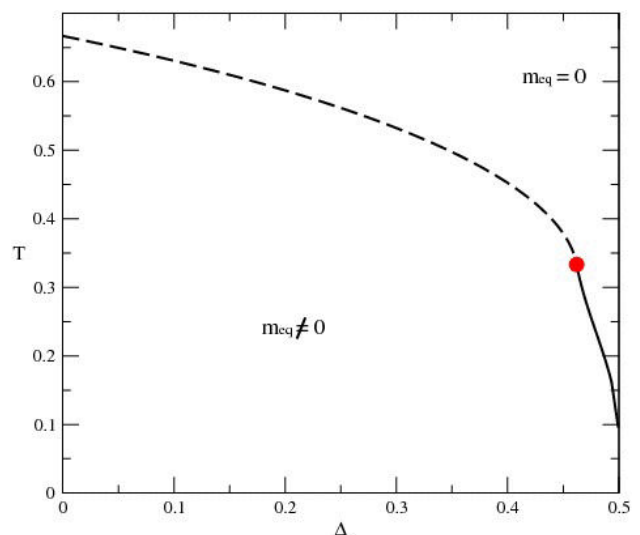


FIGURA 1. Diagrama de fases del modelo BEG con interacciones de largo alcance. La línea a trozos indica las transiciones de segundo orden, la línea continua indica las transiciones de primer orden y el punto indica la localización del punto tricrítico.

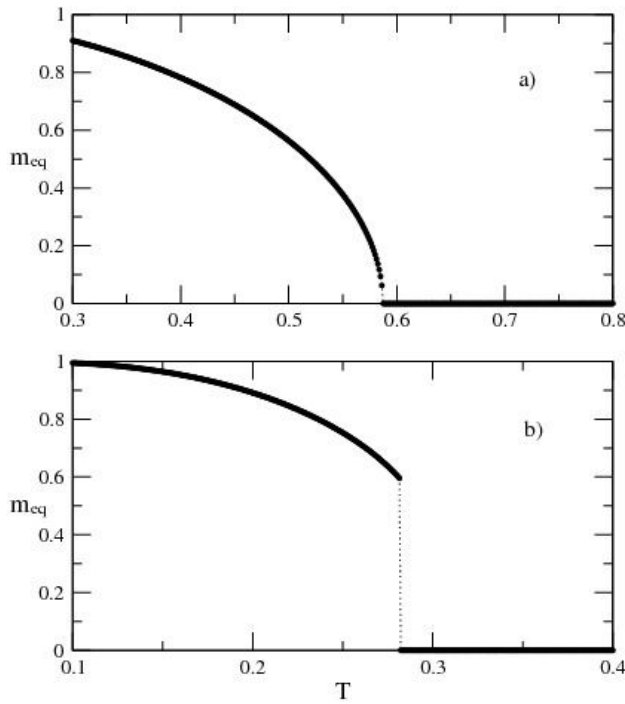


FIGURA 2. Magnetización como función de la temperatura, del modelo BEG con interacciones de largo alcance. a)  $\Delta = 0.2$  y b)  $\Delta = 0.47$ .

el punto tricrítico  $(\beta_{tri}, \Delta_{tri})$ , satisface  $A(\beta_{tri}, \Delta_{tri}) = 0$  y  $B(\beta_{tri}, \Delta_{tri}) = 0$  [1], queda al lector realizar esto y encontrar que  $\beta_{tri} = 3$  y  $\Delta_{tri} = \ln(4)/3$ .

En la Fig. 1 mostramos el diagrama de fases obtenido por resolver el conjunto de ecuaciones auto-consistentes de manera numérica. Indicamos las líneas de transición de primer y segundo orden, así como el punto tricrítico en el plano  $(\Delta, T)$ , con  $k_B = 1$ . En la Fig. 2 mostramos las curvas de la magnetización como función de la temperatura para dos valores de la constante  $\Delta$ , una dentro de la región de transiciones continuas (Fig. 2a) y la otra donde la transición es discontinua (Fig. 2b). Es necesario comentar que, experimentalmente, la variable medida es la capacidad calorífica, y del comportamiento de ella como función de la temperatura, es la que llevo a descubrir la existencia de las transiciones de fase. Por ello, dejamos al lector, calcular esta cantidad haciendo uso de las relaciones termodinámicas conocidas (ver por ejemplo la Ref. 1, o cualquier texto de mecánica estadística) y las rutinas numéricas apropiadas.

### 3. Las propiedades dinámicas

Ahora estudiaremos las propiedades dinámicas del modelo BEG, para ello haremos uso de la ecuación maestra, la cual rige la evolución temporal de la probabilidad  $P(\{S\}, t)$ , de que el sistema se encuentre en la configuración  $\{S\} = \{S_1 \dots S_N\}$  al tiempo  $t$  [1]. Nos enfocaremos en la dinámica introducida por Glauber para la dinámica en el ensemble canónico [2]. En la dinámica de Glauber, consideramos a las funciones estocásticas del tiempo

$S_i(t)$ , ( $i = 1 \dots N$ ), las cuales pueden tomar un conjunto discreto o continuo de valores, y transitan entre ellos como el tiempo transcurre. La transición dentro de este esquema cambia solamente el valor de un espín a la vez, como por ejemplo,  $S_j \rightarrow \hat{S}_j$ , y ocurre tanto por la interacción con los espines del sistema como por la interacción con el baño térmico asociado al ensemble canónico.

La ecuación maestra es

$$\frac{dP(\{S\}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{\hat{S}_i} \left[ w_i(\hat{S}_i \rightarrow S_i) P(\{S_{j \neq i}\}, \hat{S}_i, t) - w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) P(\{S\}, t) \right], \quad (14)$$

donde  $w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i)$  es la probabilidad de transición por unidad de tiempo, de que el espín  $i$  cambie de estado. Esta función debe de satisfacer varios requerimientos, a decir: debe ser positiva definida, debe estar normalizada y debe satisfacer la condición de balance detallado [16]. Matemáticamente hablando, estas condiciones se escriben como

$$w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) \geq 0, \quad (15)$$

$$\sum_{\hat{S}_i} w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) = 1, \quad (16)$$

$$\frac{w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i)}{w_i(\hat{S}_i \rightarrow S_i)} = \frac{P_o(\{S_{j \neq i}\}, \hat{S}_i)}{P_o(\{S\})}, \quad (17)$$

siendo  $P_o(\{S\}) = Z^{-1} \exp(-\beta H(\{S\}))$  la distribución de equilibrio del sistema en el ensemble canónico (la distribución de Boltzmann). Para la probabilidad de transición elegimos la siguiente forma funcional, la cual satisface los requerimientos mencionados [16]:

$$w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) = Q_i^{-1} e^{-\beta H(\{S_{j \neq i}, \hat{S}_i\})}, \quad (18)$$

donde  $Q_i$  esta definida a través de la condición de normalización referida arriba.

Ahora, podemos definir a las siguientes cantidades:

$$m_k(t) = \sum_{\{S\}} S_k P(\{S\}, t), \quad (19)$$

$$C_{j \dots k}(t) = \sum_{\{S\}} S_j \dots S_k P(\{S\}, t), \quad (20)$$

la primera ecuación define a la magnetización local y la segunda a las correlaciones entre los espines  $j \dots k$ , como función del tiempo. A través de la ecuación maestra podemos deducir ecuaciones cinéticas para estas cantidades, para ello tomamos la derivada temporal de las ecuaciones anteriores y utilizamos la ecuación maestra, ilustramos la deducción solo para  $m_k(t)$ , ya que para la otra cantidad se procede de manera

similar. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dm_k(t)}{dt} &= \sum_{\{S\}} S_k \frac{dP(\{S\}, t)}{dt} = \sum_{\{S\}} S_k \\ &\times \sum_{i=1}^N \sum_{\hat{S}_i} \left[ w_i(\hat{S}_i \rightarrow S_i) P(\{S_{j \neq i}\}, \hat{S}_i, t) \right. \\ &\left. - w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) P(\{S\}, t) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

ahora podemos dividir las sumas en dos términos, aquellos con  $i \neq k$  y los otros con  $i = k$ . Veamos a los términos con  $i \neq k$ ,

$$\begin{aligned} (i \neq k) &= \sum_{\{S\}} S_k \sum_{i \neq k} \sum_{\hat{S}_i} \left[ w_i(\hat{S}_i \rightarrow S_i) P(\{S_{j \neq i}\}, \hat{S}_i, t) \right. \\ &\left. - w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) P(\{S\}, t) \right] \\ &= \sum_{\{S_{i \neq k}\}} S_k \sum_{i \neq k} \left( \sum_{S_i, \hat{S}_i} \left[ w_i(\hat{S}_i \rightarrow S_i) P \right. \right. \\ &\left. \left. \times (\{S_{j \neq i}\}, \hat{S}_i, t) - w_i(S_i \rightarrow \hat{S}_i) P(\{S\}, t) \right] \right) \end{aligned} \quad (22)$$

podemos notar que la expresión dentro del paréntesis mas externo se anula, ya que sumamos sobre todos los valores de las variables  $S_i$  y  $\hat{S}_i$ , así la contribución de estos términos es nula. Para los otros términos,

$$\begin{aligned} (i = k) &= \sum_{\{S\}} \sum_{\hat{S}_k} S_k \left[ w_k(\hat{S}_k \rightarrow S_k) P(\{S_{j \neq k}\}, \hat{S}_k, t) \right. \\ &\left. - w_k(S_k \rightarrow \hat{S}_k) P(\{S\}, t) \right] \\ &= \sum_{\{S\}} \sum_{\hat{S}_k} S_k w_k(\hat{S}_k \rightarrow S_k) P(\{S_{j \neq k}\}, \hat{S}_k, t) \\ &- \sum_{\{S\}} S_k P(\{S\}, t) = -m_k(t) \\ &+ \sum_{\{S_{i \neq k}\}} \sum_{\hat{S}_k, S_k} S_k w_k(\hat{S}_k \rightarrow S_k) \\ &\times P(\{S_{j \neq k}\}, \hat{S}_k, t) = -m_k(t) \\ &+ \sum_{\{S\}} \left( \sum_{\hat{S}_k} \hat{S}_k w_k(S_k \rightarrow \hat{S}_k) \right) P(\{S\}, t), \end{aligned} \quad (23)$$

en donde hemos separado los términos y utilizado la condición de normalización al pasar de la línea uno a la dos, e intercambiado los índices de las sumas de la tres a la línea

final, así, la ecuación cinética queda

$$\begin{aligned} \frac{dm_k(t)}{dt} &= -m_k(t) \\ &+ \sum_{\{S\}} \left( \sum_{\hat{S}_k} \hat{S}_k w_k(S_k \rightarrow \hat{S}_k) \right) P(\{S\}, t). \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora, calculamos las expresiones dentro de los paréntesis con ayuda de las ecuaciones que definen a la probabilidad de transición y la energía del sistema,

$$\sum_{\hat{S}_k} \hat{S}_k w_k(S_k \rightarrow \hat{S}_k) = \frac{2 \sinh(\frac{\beta M_k}{N})}{e^{\beta \Delta - \frac{\beta}{2N}} + 2 \cosh(\frac{\beta M_k}{N})}, \quad (25)$$

donde  $M_k = \sum_{i \neq k} S_i$ , ahora, si usamos el hecho de que para interacciones de largo alcance la aproximación de campo medio es valida en el límite  $N \rightarrow \infty$  [17], entonces la magnetización local será la magnetización por partícula del sistema completo, así obtenemos la siguiente ecuación determinista para la magnetización promedio por partícula,

$$\frac{dm}{dt} = -m + \frac{2 \sinh(\beta m)}{e^{\beta \Delta} + 2 \cosh(\beta m)}. \quad (26)$$

Por lo tanto, el punto fijo  $m^*$  de esta ecuación satisface

$$m^* = \frac{2 \sinh(\beta m^*)}{e^{\beta \Delta} + 2 \cosh(\beta m^*)}, \quad (27)$$

como podemos ver, es la misma ecuación de auto-consistencia obtenida en el estudio de las propiedades estáticas del modelo. Debemos notar que la Ec. (26) puede ser obtenida a través del gradiente de la energía libre de Landau, lo que indica que la dinámica hace que la energía libre de Landau tienda a su valor mínimo en la dirección de máximo cambio. Con esta consideración, tenemos una equivalencia entre una solución termodinámicamente estable (mínimo de  $\phi$ ), y la solución dinámicamente estable (alcanzada a tiempos largos) de la Ec. (26).

Ahora podemos extraer información acerca del comportamiento dinámico del sistema ante fluctuaciones. Para ello nos enfocaremos en la fase paramagnética, cuyo punto fijo es  $m^* = 0$ , y hagamos un análisis de la estabilidad lineal alrededor de esta solución. Así, consideremos a  $m = m^* + \delta m$ , la evolución lineal de esta desviación esta gobernada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d(\delta m)}{dt} = \left( \frac{2\beta}{2 + e^{\beta \Delta}} - 1 \right) \delta m, \quad (28)$$

la solución a este problema está dada por  $\delta m(t) = \delta m(0)e^{\lambda t}$  y donde

$$\lambda = \left( \frac{2\beta}{2 + e^{\beta \Delta}} - 1 \right).$$

Notemos en particular que el estado paramagnético es estable siempre que  $\lambda < 0$  y será inestable cuando esta cantidad

cambie de signo, así, si la transición es continua, entonces existirán valores de  $\beta$  y  $\Delta$  para los cuales  $\lambda = 0$ , es decir  $\beta = 1 + (1/2)e^{\beta\Delta}$  se satisface. Así ésta será la línea de transiciones de fase de segundo orden, la cual fue ya obtenida desde el punto de vista estático a través del comportamiento de la energía libre del sistema. Además, podemos interpretar a

$$\tau = |\lambda|^{-1} = \frac{2 + e^{\beta\Delta}}{2 - 2\beta + e^{\beta\Delta}}$$

como el tiempo de relajación de la fluctuación  $\delta m$  hacia el estado estable paramagnético. Ahora veamos cómo se comporta este tiempo de relajación como nos acercamos al punto crítico  $\beta_c = 1/k_B T_c$  desde la fase paramagnética. Para ello sea  $\beta = \beta_c - \delta\beta$  tal que  $0 < \delta\beta \ll 1$ , entonces haciendo las expansiones correspondientes para este valor pequeño, obtenemos el comportamiento asintótico,

$$\tau \sim (T - T_c)^{-1}. \quad (29)$$

Básicamente, esta expresión nos dice que conforme nos acercamos al punto de transición de fase de segundo orden, una

perturbación tardaría muchísimo en decaer al estado de equilibrio del sistema (estado paramagnético), este fenómeno es conocido como alentamiento crítico.

## 4. Conclusiones

Presentamos el estudio de las propiedades estáticas y dinámicas de un modelo con interacciones de largo alcance que es soluble y que representa un ejemplo muy ilustrativo para los cursos de física estadística.

## Agradecimientos

Agradezco al CONACYT por el apoyo brindado a través de la beca posdoctoral 92637. También deseo agradecer al Dr. Saul Hernández y a la Dra. Consuelo García por la lectura y comentarios sobre este manuscrito, así como a los árbitros por las críticas y sugerencias.

- 
1. L. Reichl, *A Modern Course in Statistical Mechanics* (Second Edition Wiley Interscience 1998).
  2. R.J. Glauber, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 294.
  3. J. Barré, D. Mukamel y S. Ruffo, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 030601.
  4. A. Antoniazzi y S. Ruffo, *Nucl. Instr. and Meth. A* **561** (2006) 143.
  5. F. Leyvraz y S. Ruffo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 285.
  6. M. Antoni y S. Ruffo, *Phys. Rev. E* **52** (1995) 2361.
  7. F. Leyvraz, M.C. Firpo y S. Ruffo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 4413.
  8. J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois y S. Ruffo, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 110601.
  9. D. Jeong, J. Choi y M.Y. Choi, *Phys. Rev. E* **74** (2006) 056106.
  10. A. Ramírez-Hernández, H. Larralde y F. Leyvraz, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 120601.
  11. A. Ramírez-Hernández, H. Larralde y F. Leyvraz, *Phys. Rev. E* **78** (2008) 061133.
  12. M. Blume and V.J. Emery y R.B. Griffiths, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1071.
  13. P.H. Chavanis, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 056123.
  14. J.E. Marsden y M.J. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, (Editorial Trillas 1996).
  15. H.B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics*, Second Edition (John Wiley and Sons, 1985).
  16. J.Y. Zhu y Z.R. Yang, *Phys. Rev. E* **59** (1999) 1551.
  17. P.H. Chavanis, *Physica A* **361** (2006) 55.