

# Fraccionalización de la transformada discreta de Fourier

J. Rueda-Paz y C.A. Muñoz

*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Av. Universidad s/n, Cuernavaca, Morelos 62251, México,  
e-mail: juvenal@fis.unam.mx*

Recibido el 18 de septiembre de 2009; aceptado el 18 de enero de 2010

En este artículo mostramos cómo se extiende la definición de la transformada discreta de Fourier (DFT) al introducir una fraccionalización (FrDFT) de ésta. La transformada FrDFT se define como una potencia real de la matriz unitaria que define a la DFT, de tal forma que se garantiza la aditividad entre potencias al aplicar dos FrDFT consecutivas. Además describimos algunas de las bases en las cuales es posible definir la FrDFT, mostramos gráficamente cómo esta fraccionalización se contrae a su equivalente continuo la transformada fraccional integral de Fourier (FrIFT).

*Descriptores:* Transformada de Fourier finita; transformada fraccionaria de Fourier; análisis de señales.

In this paper we show how to extend the definition of the Finite Fourier Transform (DFT) as we introduce a fractionalization (FrDFT) of them, the FrDFT transform is defined as a real power of the unitary matrix that defines the DFT, of such form that additivity between powers is guaranteed when applying two different FrDFTs, also we describe some of the bases in which it is possible to define the FrDFT, we graphically show how this fractionalization contracts to its continuous equivalent the Fractional Integral Fourier Transform (FrIFT).

*Keywords:* Finite Fourier transform; fractional Fourier transform; signal analysis.

PACS: 03.30.Nw; 02.20.Qs; 02.30.Em; 43.60.Uv

## 1. Introducción

La transformada integral de Fourier (IFT) tiene en la actualidad múltiples aplicaciones en distintas áreas de la ciencia y la ingeniería, tales como la teoría de números, la combinatoria, la teoría de la probabilidad, la estadística, arreglos ópticos, la propagación de ondas, el procesamiento de señales, entre muchas otras; por esta razón su estudio es de gran importancia para el desarrollo científico y tecnológico.

Como herramienta matemática se utiliza para convertir funciones cuadrado integrables, definidas en un dominio real, llamado por lo general dominio temporal, a otras funciones definidas en otro dominio real llamado dominio de frecuencias; con esta transformación se pueden analizar funciones continuas en el dominio de frecuencias en busca de propiedades adicionales que no se ven fácilmente en el dominio temporal de la función.

Geoméricamente la IFT se puede interpretar como la rotación de una función de distribución (construida con base en la función original) en  $\pi/2$  radianes en el espacio tiempo-frecuencia, un espacio definido por dos ejes ortogonales, uno correspondiente al dominio original de la función (eje temporal), y otro correspondiente al dominio de la función transformada con la IFT (eje de frecuencias). Debido a esta interpretación geométrica se ha sugerido extender la definición de la IFT a una transformación que realice rotaciones en las funciones de distribución en ángulos intermedios entre 0 y  $2\pi$ . Tal transformación se conoce como transformada fraccionaria integral de Fourier (FrIFT); el proceso para definir la FrIFT se conoce como fraccionalización de la IFT, ésta fue definida primeramente por Condon [1], y posteriormente fue introducida por Namias [2] en conexión con ciertos problemas en mecánica cuántica. Otras construcciones para la FrIFT se pueden encontrar en la Ref 3.

El tratamiento de funciones utilizando la transformada de Fourier no sólo se limita a funciones continuas, también es posible definir una transformada discreta de Fourier (DFT) análoga a la IFT para el estudio de funciones discretas, es decir, funciones que toman valores en ciertos puntos igualmente espaciados, esta última transformación es muy útil en física experimental e ingeniería. De la misma forma, también se puede considerar un análogo discreto para la FrIFT; tal transformación se conoce como transformada fraccionaria discreta de Fourier (FrDFT). En la literatura se encuentran varios caminos para definir la FrDFT, una revisión completa de éstos se puede ver en la Ref 3.

En este artículo nos centraremos en el estudio de la FrDFT, estudiaremos su construcción, sus propiedades y su semejanza con la FrIFT. El artículo se organiza de la siguiente forma: En la Sec 2 se introducen brevemente la IFT junto con la fraccionalización (FrIFT); en la Sec. 3 se introducen la transformada finita de Fourier (DFT) y su fraccionalización (FrDFT), en la Sec. 4 se describen las bases más comunes con las cuales se puede escribir la FrDFT; finalmente en la Sec. 5 discutimos las propiedades que comparten la FrIFT y la FrDFT tomando en cuenta gráficas del valor absoluto y el argumento de los elementos de ambas, así como la evolución de cada una sobre señales de prueba rectangulares, esto con la finalidad de verificar la contracción de la FrDFT hacia la FrIFT.

## 2. Transformada integral de Fourier y su fraccionalización

Comencemos definiendo a una señal como una función real de variable real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para la cual se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{1}$$

Dicha señal debe tener un número finito de discontinuidades acotadas (e.g. el pulso cuadrado) y satisfacer la condición de Lipschitz. Al dominio original de la función se le suele llamar dominio temporal de la señal. Para este tipo de señales la IFT se define mediante la transformación integral

$$\tilde{f}(x') = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{\mathbb{R}} F(x, x') f(x) dx, \tag{2}$$

$$F(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ixx'), \tag{3}$$

donde (3) es el núcleo de Fourier. La función que se obtiene de aplicar (2) se suele decir que está definida en el dominio de frecuencias. A lo largo de este artículo utilizaremos tildes para marcar las variables que pertenecen al dominio de frecuencias, mientras que las variables sin tilde pertenecerán al dominio temporal. Otros dominios entre los cuales la IFT transforma funciones pueden ser: momento y posición, ángulo y momento angular, tiempo y energía.

Lo usual en el tratamiento de señales es aplicar la transformada (2) a una señal  $f(x)$ , realizar operaciones sobre la nueva señal  $\tilde{f}(x')$  y regresar al dominio original, mediante la transformación inversa

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(x')\} = \int_{\mathbb{R}} F^{-1}(x, x') \tilde{f}(x') dx, \tag{4}$$

$$F^{-1}(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ixx'). \tag{5}$$

Como se puede observar la IFT es un mapeo invertible; siempre es posible regresar de  $\tilde{f}(x')$  en el dominio de las frecuencias a  $f(x)$  en el dominio temporal utilizando la expresión (4).

La finalidad de aplicar la transformada (2) a una señal es estudiarla en un nuevo dominio, el cual muestre propiedades adicionales que no se ven en el dominio original; así por ejemplo cuando se analizan imágenes utilizando transformada de Fourier, la imagen original se transforma a otra imagen en un nuevo dominio de frecuencias en el cual se pueden realizar operaciones sobre ésta; como por ejemplo, descartar cierta información para limpiar la imagen o aplicar filtros para transformarla, por esta razón en algunos casos las operaciones que se realizan en el dominio de frecuencias sobre la función  $\tilde{f}(x')$  modifican ésta de tal forma que la función que se obtiene al aplicar (4) no es la función original sino una función aproximada a la original.

Para la transformación (2) es posible introducir sus eigenfunciones utilizando las funciones de Hermite-Gauss:

$$\Psi_k(x) = \frac{H_k(x) \exp(-x^2/2)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}}, \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{m,n},$$

donde  $H_k(x)$  son los polinomios de Hermite definidos mediante las relaciones de recurrencia

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{7}$$

Las funciones de Hermite-Gauss (6) satisfacen la ecuación

$$\int_{\mathbb{R}} F(x, x') \Psi_k(x') dx' = (-i)^k \Psi_k(x), \tag{8}$$

por lo tanto son eigenfunciones de la IFT con eigenvalor  $(-i)^k$ ; además forman una base completa en la cual podemos escribir desarrollos de señales.

La función de distribución de Wigner es una herramienta con muchas aplicaciones en mecánica cuántica, nos permite estudiar la cuantización de variables clásicas, la evolución de operadores en el espacio de Hilbert utilizando funciones reales sobre un espacio de fase continuo, además es útil para estudiar el comportamiento clásico de algunos sistemas cuánticos en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  [17]. En este artículo utilizaremos la función de distribución de Wigner como una herramienta para representar el estado cuántico de un sistema  $f(x) = \langle x | f \rangle$  como una función de 2 variables sobre el espacio de fase  $x - x'$ . La función de distribución de Wigner para una señal  $f(x)$  se define mediante la integral

$$W_f(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x - y/2)^* \times e^{-iyx'} f(x + y/2) dy, \tag{9}$$

la cual está definida sobre puntos  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$  en el espacio tiempo-frecuencia, donde  $x$  es una variable de tiempo que marca al eje horizontal y  $x'$  es una variable de frecuencia que marca al eje vertical.

Para dar una interpretación geométrica a la IFT utilizando funciones de distribución de Wigner sustituyamos las funciones  $f(x)$  en (9) por sus transformadas (inversas) de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy'x} \tilde{f}(y') dy', \tag{10}$$

haciendo esto obtenemos

$$W_f(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x' - y/2)^* e^{iyx} \tilde{f}(x' + y/2) dy. \tag{11}$$

De esta expresión observamos que la función de distribución de Wigner para la función  $f(x)$  es parecida a la función de distribución de Wigner para la función  $\tilde{f}(x')$  (ciertamente las funciones  $f(x)$  y  $\tilde{f}(x')$  son distintas) realizando el cambio de variables

$$x \rightarrow -x', \quad x' \rightarrow x, \tag{12}$$

Este cambio de variables corresponde a una rotación de  $\pi/2$  radianes en el espacio tiempo-frecuencia, debido a esto la IFT se interpreta como una transformación que rota la función de

distribución  $W_f(x, x')$  en el espacio tiempo-frecuencia en  $\pi/2$  radianes. Una transformación del tipo (12) se conoce comúnmente como transformación canónica, ya que no altera la estructura de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi [5]. La propiedad que tiene la IFT de realizar una transformación canónica en las coordenadas de la función de distribución de Wigner es muy importante, dado que permite expresarla utilizando el formalismo de transformaciones canónicas lineales [15].

Geoméricamente la FrIFT se puede introducir como una transformación que rota a la función de distribución de Wigner (9) en el espacio tiempo-frecuencia en un ángulo  $\alpha = \mu\pi/2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , esto es

$$W_{\mathcal{F}^\mu\{f(x)\}}(x, x') = W_{f(x)}(x \cos(\mu\pi/2) - x' \sin(\mu\pi/2), x \sin(\mu\pi/2) + x' \cos(\mu\pi/2)), \quad (13)$$

donde  $\mathcal{F}^\mu\{f(x)\}$  representa la FrIFT de la señal  $f(x)$ . De esta interpretación esperamos que la FrIFT sea de tal forma que

$$\mathcal{F}^{\mu_1}\{\mathcal{F}^{\mu_2}\{f(x)\}\} = \mathcal{F}^{\mu_1+\mu_2}\{f(x)\}. \quad (14)$$

Otra interpretación que se suele dar a la FrIFT es la de ser una potencia real del operador IFT. En el cálculo fraccional se estudia la posibilidad de definir potencias arbitrarias de un operador diferencial o integral. Consideremos el siguiente ejemplo: una potencia entera de un operador diferencial  $\hat{D} = d/dx$  o integral

$$\hat{J} = \int dx$$

se define como la aplicación sucesiva del mismo operador, esto es,

$$\hat{D}^n = \frac{d^n}{dx^n}, \quad \hat{J}^n = \int \int \dots \int \underbrace{dx^{(1)} dx^{(2)} \dots dx^{(n)}}_{n\text{-veces}} \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (15)$$

De esta forma, un operador fraccional se interpreta como una potencia real o compleja de los operadores  $\hat{D}$  o  $\hat{J}$ ; para ilustrar lo anterior consideremos el operador integral  $\hat{J}$ . Podemos preguntarnos si tiene sentido la expresión  $\sqrt{\hat{J}} = \hat{J}^{1/2}$ , de tal forma que  $\hat{J}^{1/2}\hat{J}^{1/2} = \hat{J}$ , es decir, que al aplicar dos veces el operador  $\sqrt{\hat{J}}$  a una función se obtiene el mismo efecto que la aplicación usual de  $\hat{J}$ . En este sentido, la FrIFT es una transformación lineal que permite definir una especie de IFT a la  $\mu$ -ésima potencia, donde  $\mu$  es un número real.

En éste artículo introduciremos la FrIFT como lo ha realizado Namias [2], la FrIFT se introduce mediante la transformación integral

$$f_\mu(x') = \int_{\mathbb{R}} F_\mu(x, x') f(x) dx, \quad (16)$$

donde  $F_\mu(x, x')$  es el núcleo de la FrIFT y es tal que la acción de la FrIFT sobre las funciones de Hermite-Gauss es

$$\int_{\mathbb{R}} F_\mu(x, x') \Psi_k(x) dx = (-i)^{k\mu} \Psi_k(x'). \quad (17)$$

Es decir, las eigenfunciones de la FrIFT son las funciones de Hermite-Gauss, además como podemos observar la Ec. (17) se reduce a la Ec. (8) cuando  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ , lo anterior indica que la FrIFT debe coincidir con la IFT para  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Para determinar la forma que tiene el núcleo  $F_\mu(x, x')$  desarrollemos una señal arbitraria  $f(x)$  utilizando la base de funciones de Hermite-Gauss, esto es,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \Psi_k(x), \quad (18)$$

$$C_k = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Psi_k(x) dx. \quad (19)$$

Si aplicamos la FrIFT definida en la Ec. (16) sobre la señal (18) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_\mu(x, x') f(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{\mathbb{R}} F_\mu(x, x') \Psi_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k (-i)^{k\mu} \Psi_k(x') \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(x) (-i)^{k\mu} \Psi_k(x') f(x) dx \end{aligned} \quad (20)$$

de donde identificamos el núcleo de la FrIFT como

$$F_\mu(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(x) (-i)^{k\mu} \Psi_k(x'). \quad (21)$$

Una representación más común de este núcleo es

$$\begin{aligned} F_\mu(x, x') &= \frac{\exp\{i\pi[\mu/2 - \text{sign}(\sin(\pi\mu/2))]/2\}}{\sqrt{2\pi|\sin(\pi\mu/2)|}} \\ &\times \exp\left\{i\frac{x^2+x'^2}{2}\cot(\pi\mu/2) - ix x' \csc(\pi\mu/2)\right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

cuya demostración se puede encontrar en la Ref 3.

Cuando  $\mu$  toma los valores enteros 0, 2 y 4 la expresión (22) debe sustituirse por

$$\begin{aligned} F_0(x, x') &= \delta(x - x') = F_4(x, x'), \\ F_2(x, x') &= \delta(x + x'), \end{aligned} \quad (23)$$

de tal forma que valores enteros de  $\mu$  en (22) coinciden con aplicaciones sucesivas de la IFT sobre una señal  $f(x)$ , claramente el núcleo (22) tiene como límites las Ecs. (23) para estos valores enteros de  $\mu$ . Una propiedad importante del núcleo (22) es que satisface la Ec. (14), lo cual está en concordancia con la interpretación de una rotación que realiza la FrIFT sobre una función de distribución de Wigner, además de esto el parámetro  $\mu$  es cíclico módulo 4.

### 3. Transformada finita de Fourier y su fraccionalización

En general se puede hacer uso de la IFT siempre que la señal dependa de una variable continua. En el caso cuando la variable de interés está restringida a un intervalo discreto equiespaciado es posible introducir una transformación análoga a la IFT llamada transformada finita de Fourier (DFT); las señales sobre las que se aplica esta transformación son funciones  $f(t)$  para las cuales  $t$  toma valores finitos equiespaciados  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$ , donde  $t_p - t_{p+1}$  es constante para todo entero  $p$  entre 0 y  $N - 2$ .

La DFT se define mediante la matriz

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \|F_{m,m'}\|, \\ F_{m,m'} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} mm'\right), \\ 0 &< m, m' < N - 1, \end{aligned} \tag{24}$$

la cual es simétrica, unitaria y periódica en sus índices con periodo  $N$ . Las distintas potencias de (24) son

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^2)_{m,m'} &= \delta_{m,-m'}, & (\mathbf{F}^3)_{m,m'} &= (\mathbf{F})_{m,-m'}, \\ (\mathbf{F}^4)_{m,m'} &= \delta_{m,m'}. \end{aligned} \tag{25}$$

La DFT se aplica a señales discretas, una señal discreta puede ser escrita como un vector columna  $\mathbf{v} = [f(t_0), \dots, f(t_{N-1})]^\top$  en  $C^N$ . La DFT transforma señales discretas  $\mathbf{v} \in C^N$  en el dominio temporal a señales discretas  $\tilde{\mathbf{v}} \in C^N$  en el dominio de frecuencias mediante la operación

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{F}\mathbf{v}, \tag{26}$$

siendo ésta el análogo finito de la Ec. (2); además en virtud de que  $\mathbf{F}$  es unitaria, la expresión (26) es invertible y nos permite definir una transformada inversa de Fourier  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^3$ , para la cual

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}, \tag{27}$$

es el análogo de (4).

Los eigenvalores de la expresión (24) son las 4 raíces de la identidad  $\exp(-\pi i n/2) = (-i)^n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ . Debido a la multiplicidad de los eigenvalores (para dimensiones  $N > 4$ ) el espacio vectorial formado por todos los eigenvalores de (24) puede ser dividido en 4 subespacios  $\varphi_n$  cada uno de dimensión  $N_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$  ( $N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$ ), donde cada vector  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  del subespacio  $\varphi_n$  (el superíndice  $j$  numera el eigenvector dentro del subespacio  $\varphi_n$  y corre desde 0 hasta  $N_n - 1$ ) tienen el eigenvalor  $(-i)^n$ . En la Tabla I se muestra la dimensión de estos subespacios como función de  $N$ .

La función de distribución Wigner para sistemas discretos presenta problemas en su interpretación geométrica, en

TABLE I. Dimensión de los subespacios  $N_0, N_1, N_2$  y  $N_3$ .

Dimensión	Dimensión de los subespacios					
$N$	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$\text{tr}(\mathbf{F})$	$\text{det}(\mathbf{F})$
$4J$	$J + 1$	$J$	$J$	$J - 1$	$1 + i$	$-i(-1)^J$
$4J + 1$	$J + 1$	$J$	$J$	$J$	1	$(-1)^J$
$4J + 2$	$J + 1$	$J$	$J + 1$	$J$	0	$-(-1)^J$
$4J + 3$	$J + 1$	$J + 1$	$J + 1$	$J$	$-i$	$i(-1)^J$

estos sistemas dicha función se introduce de forma consistente únicamente cuando la dimensión del sistema es un número primo a una potencia entera, ya que cuando esto no sucede existen problemas con la interpretación de la probabilidad marginal al sumar por una línea en el espacio de fase. Este inconveniente sobre la dimensión del sistema conlleva a que, para estos sistemas, no existe un orden natural en los elementos del campo finito que enumera los ejes del espacio de fase discreto. Por esta razón, una rotación en el espacio de fase puede resultar engañosa o no estar bien definida [7], debido a esto, el sentido que daremos en este artículo a la transformada fraccional discreta de Fourier (FrDFT) será la de una potencia real de la matriz que define a la DFT, en analogía con la interpretación de la FrIFT como una potencia real de un operador diferencial. Además de esto seguiremos esperando un análogo discreto de la Ec. (14) para la FrDFT. La  $\mu$ -ésima FrDFT de una señal discreta  $\mathbf{v}$ , la cual denotamos como  $\tilde{\mathbf{v}}_\mu$ , puede ser definida multiplicando  $\mathbf{v}$  con la  $\mu$ -ésima potencia real de la matriz que define la DFT,

$$\tilde{\mathbf{v}}_\mu = \mathbf{F}^\mu \mathbf{v}. \tag{28}$$

Así por ejemplo, cuando  $\mu$  es el racional de dos números enteros  $\mu = p/q$ ,  $\mathbf{F}^\mu$  es simplemente la  $p$ -ésima potencia de  $\mathbf{F}^{1/q}$ , donde esto último es la  $q$ -ésima raíz de  $\mathbf{F}$ , es decir, la matriz cuya  $q$ -ésima potencia es  $\mathbf{F}$ . Ciertamente la forma que tiene  $\mathbf{F}^\mu$  no es única, ya que la potencia real de una matriz no es unívoca, para definir una FrDFT de forma consistente y con sentido físico haremos uso de los subespacios que forman los vectores propios de la DFT.

Escribamos la ecuación para los vectores propios de (24) como

$$\mathbf{F}\mathbf{v}^{(n,j)} = (-i)^n \mathbf{v}^{(n,j)}. \tag{29}$$

Para cada subespacio  $\varphi_n$  podemos definir un proyector hacia ese subespacio como

$$\mathbf{P}_n = \sum_{j=0}^{N_n-1} \mathbf{v}^{(n,j)} \bar{\mathbf{v}}^{(n,j)\top}, \tag{30}$$

donde  $\bar{\mathbf{v}}^{(n,j)}$  es un vector de la base dual, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{v}}^{(n,j)\top} \mathbf{v}^{(n',j')} = \delta_{n,n'} \delta_{j,j'}. \tag{31}$$

Para los proyectores (30) se pueden verificar las relaciones

$$\mathbf{P}_n = \sum_{k=0}^3 (-i)^{nk} \mathbf{F}^k, \quad \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n'} = \delta_{n,n'} \mathbf{P}_n. \tag{32}$$

De las Ecs. (32) y (31) podemos deducir la expresión

$$\mathbf{F}^\nu = \sum_{n=0}^3 \exp(-i\frac{1}{2}\pi\nu n) \mathbf{P}_n, \quad (33)$$

válida para cualquier  $\nu$  entero.

La FrDFT se puede definir mediante la Ec. (33) permitiendo que los valores que toma  $\nu$  sean cualquier número real. Más aún debido a la forma de (33) el índice  $\nu$  toma valores modulo 4, de la misma forma en que lo hace la FrIFT. Haciendo uso de (31) podemos expresar los elementos matriciales de la FrDFT como

$$(\mathbf{F}^\nu)_{m,m'} = \sum_{n=0}^3 \sum_{j=0}^{N_{\varphi_n}-1} v_m^{(n,j)} \times \exp[-i\frac{1}{2}\pi\nu(4j+n)] \bar{v}_{m'}^{(n,j)}, \quad (34)$$

donde  $v_m^{(n,j)}$  son las componentes del vector  $\mathbf{v}^{(n,j)}$ .

Una propiedad importante que se deriva de (31) y (34) es

$$\mathbf{F}^{\nu_1} \mathbf{F}^{\nu_2} = \mathbf{F}^{\nu_1+\nu_2}, \quad (35)$$

la cual es el análogo discreto de (14). Esta propiedad nos permite interpretar a las matrices  $\mathbf{F}^\nu$  como un subgrupo cíclico de  $SL(N, C)$  que depende de los eigenvectores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$ , parametrizado por un índice continuo  $\nu$  modulo 4.

La Ec. (34) será la que utilizaremos como definición para la FrDFT, cabe recalcar que existen otras formas de definir una FrDFT [4], sin embargo éstas no tienen las propiedades geométricas que mostraremos en la Sec. 5. Como se puede observar, la Ec. (34) depende fuertemente de la elección de los eigenvectores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  de la matriz DFT, debido a esto la FrDFT no es única. Los eigenvectores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  se pueden elegir de tal forma que formen una base completa, no necesariamente ortogonal, en el caso cuando los vectores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  son ortonormales (principalmente nos interesa la ortonormalidad dentro de cada subespacio  $\varphi_n$ , ya que los vectores entre diferentes subespacios son ortogonales) la transformación (34) es unitaria y se le puede dar una interpretación física en vez de puramente matemática.

Como es de esperarse la Ec. (34) coincide con las Ecs. (25) cuando  $\nu$  toma valores enteros independientemente de los eigenvectores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  que se elijan.

#### 4. Bases para la transformada fraccionaria finita de Fourier

Como se mencionó en la sección anterior la forma de la FrDFT depende fuertemente de los eigenvectores de la matriz DFT, éstos no son únicos, ya que siempre se puede encontrar una transformación unitaria que transforme éstos sin alterar la estructura de la ecuación de eigenvalores. En esta sección haremos mención de algunos de los conjuntos de eigenvectores más importantes que pueden ser utilizados para definir una FrDFT.

#### 4.1. Eigenvectores de Hermite-Gauss muestreados

Los eigenvectores que mostraremos en esta subsección son vectores que son aproximadamente eigenvectores de la DFT, tales vectores no son una base muy adecuada para definir la FrDFT, sin embargo, la forma de calcular estos es muy sencilla y la aproximación que se obtiene con ellos es buena para valores grandes de  $N$ , como ya hemos visto en la Sec. 2, los estados propios de la IFT son las funciones de Hermite-Gauss (6), debido a esto podemos proponer como primera aproximación las funciones de Hermite-Gauss evaluadas en algunos valores equiespaciados de su dominio para definir los eigenvectores de (24), para esto definamos las funciones

$$\phi_m^{(k)} = \Psi_k \left( \sqrt{\frac{2\pi}{N}} m \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (36)$$

a las cuales se les conoce comúnmente como funciones de Hermite-Gauss muestreadas. Los vectores

$$\phi_k = \{\phi_k(-(N-1)/2), \dots, \phi_k((N-1)/2)\},$$

$k \in \mathbb{Z}^+$  son aproximadamente eigenvectores de la DFT, el error es pequeño para valores pequeños de  $k$  y valores grandes de  $N$ , si tomamos los primeros  $N$  vectores podemos formar aproximadamente una base para la DFT. Al conjunto formado por los vectores  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}\}$  se le conoce como base de Taipei [8]. Dicha base no es ortogonal, sólo los vectores con paridad  $(-1)^k$  son ortogonales con los vectores de paridad  $-(-1)^k$  [4], sin embargo los estados de más baja energía ( $k < \sqrt{N}$ ) pueden considerarse quasi-ortogonales, para estos el producto punto entre dos de ellos distintos es casi cero. Esta base no es periódica ni en  $k$  ni en  $m$ ; así como tampoco se garantiza que  $\phi_m^{(k)}$  tengan  $k$  cambios de signos conforme varía  $m$  tal como lo hace la función continua [4].

#### 4.2. Eigenvectores de Mehta

Los estados propios del operador DFT (24) han sido encontrados de forma analítica por Mehta [9], las componentes de estos son copias desplazadas de las funciones de Hermite-Gauss (6) evaluadas en ciertos valores,

$$\mu_k(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Psi_k \left( \sqrt{\frac{2\pi}{N}} [m + lN] \right), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (37)$$

Utilizando la fórmula de suma de Poisson [10] se puede verificar que las funciones  $\mu_k(m)$  satisfacen la ecuación de eigenvalores

$$\sum_{m=0}^{N-1} F_{m,m'} \mu_k(m) = (-i)^k \mu_k(m'), \quad (38)$$

por lo que los vectores  $\mu_k = [\mu_k(0), \dots, \mu_k(N-1)]^\top$  son eigenvectores del operador DFT (24) con eigenvalor  $(-i)^k$ .

El conjunto de eigenvectores  $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}\}$  forman una base completa no ortogonal a la cual se le conoce como base de Mehta. Los eigenvectores  $\mu_k$  de la base de Mehta no están normalizados ni son ortogonales, una FrDFT definida con estos eigenvectores no será unitaria para valores de  $\nu$  que no sean enteros. Sin embargo podemos construir una FrDFT unitaria ortogonalizando los eigenvectores de Mehta  $\mu_k$  con el procedimiento de Gram–Schmidt, debido a lo complejo de la expresión (37) no es posible obtener una expresión analítica sencilla para los eigenvectores de la base de Mehta ya ortonormalizados, pese a esto numéricamente son fáciles de calcular. En la Fig. 1 mostramos gráficas de densidad para estos vectores.

**4.3. Eigenvectores de Harper**

Existe otro conjuntos de eigenvectores de la DFT que podemos utilizar para definir la Ec. (34), éstos son los eigenvectores del hamiltoniano de Harper [11,12,13]

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} [\mathbf{\Delta} + \tilde{\mathbf{\Delta}}], \tag{39}$$

donde  $\mathbf{\Delta}$  es el operador de segunda diferencia definido mediante la matriz circulante

$$\mathbf{\Delta} = \text{circ}(-2, 1, 0, \dots, 0, 1), \tag{40}$$

y  $\tilde{\mathbf{\Delta}}$  es el operador de segunda diferencia transformado mediante la DFT ( $\tilde{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{F}\mathbf{\Delta}\mathbf{F}^{-1}$ ). El hamiltoniano (39) conmuta con (24), por lo tanto ambas matrices tienen un conjunto común de eigenvectores, el cual puede diagonalizarlas simultáneamente, esto es,

$$\mathbf{H}\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad \mathbf{F}\phi_k = (-i)^n \phi_k. \tag{41}$$

Al conjunto  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}\}$  de eigenvectores se le llama base de Ankara [11–13]. Los eigenvectores de la base de Ankara son ortogonales y no degenerados para dimensiones  $N$  que no son un múltiplo de 4. Los eigenvectores  $\phi_k$  del hamiltoniano (39) no pueden ser calculados analíticamente para  $N > 4$  por lo que tienen que ser calculados numéricamente, debido a esto la relación entre el eigenvector  $\phi_k$  y el eigenvalor de Fourier  $(-i)^n$  no se conoce hasta que no se calculen los eigenvectores. En la Fig. 2 se muestra la gráfica de densidad para estos estados.

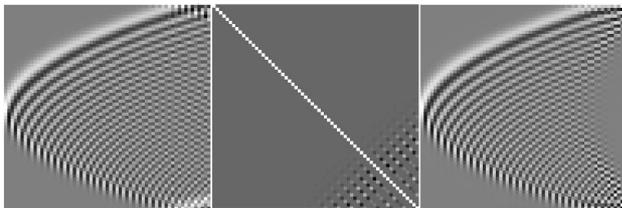


FIGURA 1. Gráficas de densidad de la base de Mehta para  $N = 64$ . La figura de la izquierda: Cada  $k$ -ésima columna de la matriz representa las componentes de los vectores  $\mu_k$  en escala de grises, donde el color blanco es el valor máximo, el gris es cero y el negro es el valor mínimo. La figura del centro: Cada elemento  $(p, q)$  de la matriz representa el producto  $\mu_p^\top \mu_q$ . La figura de la derecha: Cada  $k$ -ésima columna de la matriz representa las componentes de los vectores  $\mu_k$  ortonormalizados.

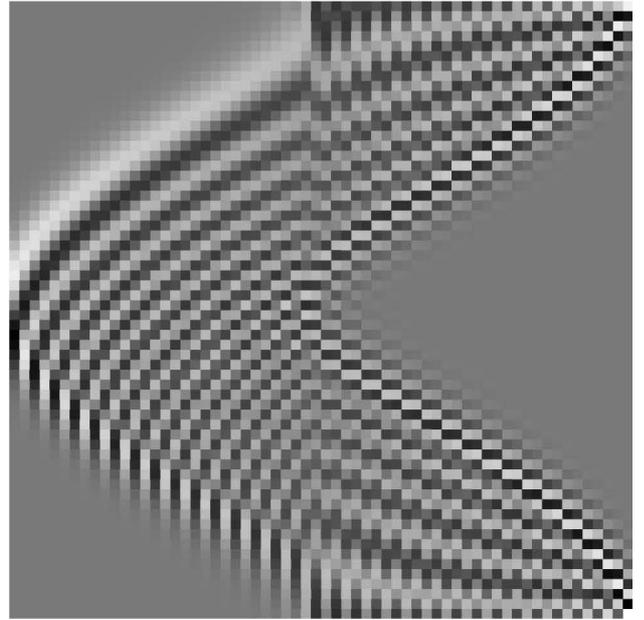


FIGURA 2. Gráfica de densidad para la base de Harper para  $N = 64$ , cada columna de la matriz representa las componentes de cada eigenvector del hamiltoniano (39).

**5. Comparación entre la transformada fraccionaria finita e integral de Fourier**

En la presente sección veremos una comparación entre el núcleo para la FrIFT (22) y el de la FrDFT (34), haremos esta comparación en el límite cuando  $N$  tiende a infinito, en este límite el núcleo (34) debe coincidir con el núcleo (22) haciendo una contracción [14]. Para contraer una transformada finita lo que se suele hacer es cambiar los índices  $m$  y  $m'$  de sus elementos matriciales, por las variables  $x_m = m\sqrt{2\pi/N}$ ,  $x'_m = m'\sqrt{2\pi/N}$  y tomar el límite  $N \rightarrow \infty$ . En este límite las variables  $x_m, x'_m$  tienden a las variables continuas  $x, x'$ , ya que la diferencia entre una variable  $x_{m+1}$  y  $x_m$  es del orden  $1/\sqrt{N}$ , así mismo el intervalo por el que se suma crece como  $\sqrt{N}$ , de esta forma una transformada finita se contraerá a una transformada integral. Así por ejemplo podemos contraer la DFT haciendo el cambio de variables anteriormente mencionado y calcular el límite  $N \rightarrow \infty$  para obtener de esta forma la IFT. La aplicación de la DFT sobre una señal discreta  $f(m)$  definida sobre los puntos equiespaciados  $m = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2$ , se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp\left(\frac{-2\pi imm'}{N}\right) f(m) \tag{42} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N/2}^{N/2} e^{-ix_m x'_m} g\left(x_m \sqrt{N/2\pi}\right) \Delta x_m, \end{aligned}$$

donde  $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \sqrt{2\pi/N}$  y hemos remplazado la función original  $f(m)$  por la función escalón

$$g(x) = f(m), \quad m \leq x < m + 1, \quad (43)$$

así se cubre completamente el intervalo

$$\left(-\frac{(N-1)}{2}, \frac{(N-1)}{2}\right),$$

si suponemos que en el límite  $N \rightarrow \infty$  la función escalón  $g(x)$  converge a una función Riemann-integrable en todo el dominio real podemos sustituir  $\int dx$  en vez de  $\sum \Delta x$ , cabe mencionar que  $f(m)$  debe de hacerse cero para los valores extremos  $m = \pm N/2$ , si estas condiciones se satisfacen podemos escribir el límite

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m'=-N/2}^{N/2} e^{-ix_m x'_m} f\left(x_m \sqrt{N/(2\pi)}\right) \Delta x_m \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixx') h(x) dx, \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g\left(x_m \sqrt{N/(2\pi)}\right)$ , el camino seguido en este ejemplo muestra como se puede contraer una transformación finita a una transformación integral, una discusión completa sobre las propiedades que debe satisfacer  $f(m)$  para obtener el límite anterior se encuentra en la Ref. 15.

El mismo procedimiento de contracción se puede aplicar a la FrDFT, sin embargo, ya que ésta depende fuertemente de la elección de los eigenvalores  $\mathbf{v}^{(n,j)}$  de la DFT pueden existir distintas contracciones de la FrDFT hacia la FrIFT. La única base para la que “en teoría” podemos hacer éste proceso de forma analítica es la base de Mehta, ya que la base de Harper sólo puede ser obtenida de forma numérica, el proceso de contracción debe de realizarse sobre FrDFTs unitarias para así obtener una FrIFT unitaria, por esta razón es necesario tomar la base de Mehta ortonormalizada para realizar tal contracción. Como se mencionó anteriormente, es prácticamente imposible obtener expresiones analíticas sencillas de la base de Mehta ortonormalizada, debido a esto no nos es posible mostrar analíticamente que la base de Mehta ortonormalizada permite contraer la FrDFT a la FrIFT. En consecuencia, sólo nos es posible hacer comparaciones gráficas de la FrDFT con la base de Mehta ortonormalizada y la FrIFT, con el fin de ver hasta qué punto ambas transformaciones se comportan de la misma forma para valores de  $N$  grandes.

Una propiedad notoria del núcleo (22) es que su valor absoluto es constante para todo valor de  $x$  y  $x'$  cuando  $\mu$  no es un entero, además de esto la fase forma hipérbolas de fase constante

$$(x^2 + x'^2) \cot(2\mu/\pi) - 2xx' \csc(2\mu/\pi) = K, \quad (45)$$

en el plano  $x-x'$ , tales hipérbolas son de la forma

$$1 = u^2/a^2 - v^2/b^2, \quad (46)$$

$$a^2 = K / (2 \csc(2\mu/\pi) + \cot(2\mu/\pi)), \quad (47)$$

$$b^2 = K / (2 \csc(2\mu/\pi) - \cot(2\mu/\pi)), \quad (48)$$

rotadas un ángulo  $\pi/4$  con respecto al eje  $x$ , en el caso cuando  $\mu = 1$  las hipérbolas son de la forma  $xx' = K$ . En la Fig. 3 se muestran gráficas de densidad en las que se observa el valor absoluto y la fase de los elementos matriciales de la FrDFT utilizando la base de Mehta ortonormalizada. Como se puede observar en estas figuras, el valor absoluto de los elementos matriciales de la FrDFT no es constante para todos los valores de  $m$  y  $m'$ , sólo en la parte central de las figuras el valor absoluto se puede considerar constante, sin embargo la fase de los elementos matriciales forma hipérbolas “discretas” de fase constante muy similares a las que describe la Ec. (45).

En el análisis de señales es común estudiar la acción de la FrIFT sobre funciones “localizadas” en el dominio temporal, frecuentemente se estudian señales rectángulo, una señal rectángulo de ancho  $h$  se define como

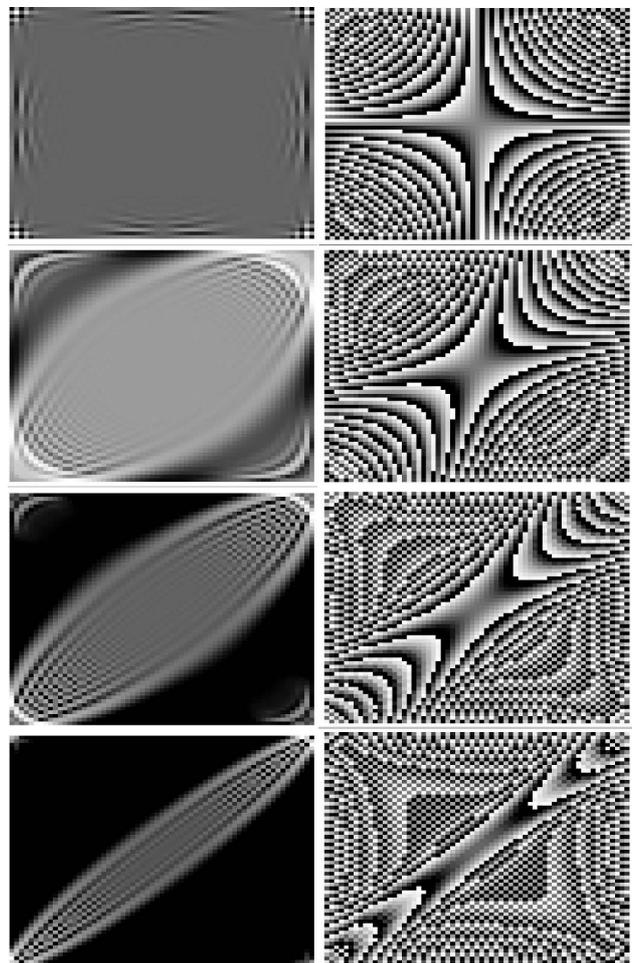


FIGURA 3. Gráficas de densidad de los elementos matriciales de la FrDFT para  $N = 64$ , en estas figuras negro corresponde al valor mínimo, y blanco al valor máximo. En la primera columna se muestra el valor absoluto de los elementos  $(\mathbf{F}^\nu)_{m,m'}$  y en la segunda columna el argumento de estos elementos, la primera fila corresponde a  $\nu = 1$ , la segunda  $\nu = 3/4$ , la tercera  $\nu = 1/2$  y la última  $\nu = 1/4$ .

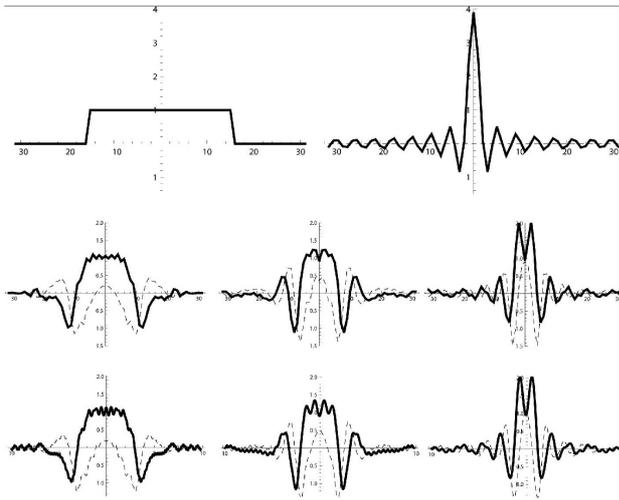


FIGURA 4. Evolución de una señal rectangular de ancho 10 unidades para  $N = 64$ . En la primera fila se muestran la señal original y se obtiene transformando con la DFT. La segunda fila se muestran las transformaciones de la señal original con la FrDFT definida con la base de Mehta para valores de  $\nu = 3/4$ ,  $\nu = 1/2$  y  $\nu = 1/4$  (de izquierda a derecha). La última fila muestra la FrIFT de la señal con valores de  $\nu = 3/4$ ,  $\nu = 1/2$  y  $\nu = 1/4$  (de izquierda a derecha).

$$R_h(x) = \begin{cases} 0, & x < -h/2 \\ 1, & -h/2 \leq x \leq h/2 \\ 0, & x > h/2 \end{cases} \quad (49)$$

Para sistemas discretos también podemos estudiar la acción de la FrDFT sobre un vector señal “rectángulo”. Un vector señal “rectángulo” es el vector

$$\mathbf{R}_h = [0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0, 0]^\top, \quad (50)$$

donde los 1's están centrados a la mitad del vector y hay tantos 1's como el ancho  $h$  (en este caso  $h$  es un entero) lo especifique. El vector (50) es una función discreta análoga a la señal rectángulo (49). En la Fig. 4 se pueden observar distintas transformaciones de una señal rectángulo (continua y discreta), utilizando la FrDFT definida con la base de Mehta ortonormal para la señal discreta y la FrIFT para la señal continua, en dicha figura hemos hecho el cambio de escala  $\sqrt{2\pi/N}$  en la FrDFT necesario para estudiar la contracción de una transformación discreta. Como podemos observar tanto la versión continua como la discreta tienen aproximadamente el mismo comportamiento, lo que nos permite suponer

que la FrDFT definida con la base de Mehta ortonormal se contrae a la FrIFT.

## 6. Conclusiones

En el presente artículo hemos mostrado cómo se realiza la fraccionalización del operador DFT. Para sistemas discretos la FrDFT se introduce de forma consistente utilizando la expresión (34), la cual se interpreta como una potencia real del operador DFT (24), de tal forma que se preserva la aditividad entre potencias (35). Esta transformación depende fuertemente de la base formada por los eigenvectores del operador DFT que se elija. En este artículo hemos elegido los eigenvectores de Mehta para definir dicha transformación.

Como se mencionó en el artículo, la FrDFT se contrae a la FrIFT en el límite cuando  $N$  tiende a infinito siempre y cuando la base elegida para definir la FrDFT sea ortonormal, debido a la forma complicada que tiene la base de Mehta ortonormalizada no nos es posible calcular este límite analíticamente. Para resolver este inconveniente hemos hecho comparaciones gráficas entre el núcleo de la FrIFT y el operador FrDFT eligiendo un número grande para  $N$ ; en este artículo hemos realizado gráficas de los valores absoluto y argumento de elementos matriciales de la FrDFT, así como la evolución de una señal “rectángulo” utilizando la FrDFT (con un cambio de escala) y la FrIFT. En los elementos matriciales de la FrDFT hemos encontrado que el valor absoluto de éstos es sólo constante en una pequeña región en el centro de la matriz a diferencia de la FrIFT que es constante en todo el plano, pese a esto, el argumento de los elementos matriciales forma hipérbolas “discretas” muy parecidas a las hipérbolas de fase constante (45) que presenta el núcleo de la FrIFT. Además de esto, la evolución de señales “rectángulo” es muy parecida en la FrDFT (con el cambio de escala  $\sqrt{2\pi/N}$ ) como en la FrIFT, confirmándonos la suposición de que la base de Mehta ortogonalizada permite contraer la FrDFT hacia la FrIFT.

## Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Bernardo Wolf por la aportación de sus ideas y comentarios que fueron fundamentales para la consolidación del artículo. Agradecemos el apoyo de los proyectos de Óptica Matemática (DGAPA-UNAM IN-105008 y SEP-CONACYT 79899) y a Guillermo Krötzsch (ICF-UNAM) por su indispensable ayuda con las gráficas.

1. E.U. Condon, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **23** (1937) 158.
2. V. Namias, *J. Inst. Math. Appl.* **25** (1980) 241.
3. H.M. Ozaktas, M.A. Arıkan y M. Alper Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* **44** (2001) 2141.
4. K.B. Wolf y G. Krötzsch, *Opt. Soc. Am. A* **24** (2007) 651.
5. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd ed. ed. New York: Springer, 1989) ISBN 978-0387968902.
6. M. Moshinsky y C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1772.
7. A.B. Klimov, C. Muñoz y J.L. Romero, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 14471.

8. S.-C. Pei, M.-H. Yeh y C.-C. Tseng, *IEEE Trans. Signal Process* **47** (1999) 1335.
9. M.L. Mehta, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 781.
10. J.J. Benedetto y G. Zimmermann, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997) 505.
11. H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky y M. Alper Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*. (Wiley 2001).
12. C. Candan, M. Alper Kutay y H.M. Ozaktas, *IEEE Trans. Signal Process* **48** (1999) 1329.
13. L. Barker, C. Candan, T. Hakioglu, A. Kutay y H. M. Ozaktas, *J. Phys. A* **33** (2000) 2209.
14. N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan y K.B. Wolf, *International Journal of Modern Physics A* **18** (2003) 317.
15. K.B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Publ. Corp., New York, 1979).
16. E. İnönü y E.P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **39** (1953) 510.
17. C.K. Zachos, D.B. Fairlie y L. Thomas *World Scientific* (2005).