Separación de variables en la ecuación cinemática $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ y su importancia

S. Díaz-Solórzano y L.A. Gonzalez-Díaz
Centro de Investigaciones de Matemática y Física, Departamento de Matemáticas y Física,
Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela,
e-mail: srafael@upel.ipc.upel.edu.ve; lugonzal@cantv.net

Recibido el 25 de enero de 2010; aceptado el 3 de marzo de 2010

Se muestra la forma de separar en variables la ecuación cinemática escalar $V^2 = V_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ en coordenadas cartesianas, lo cual es poco discutido en los textos escolares de física general, al igual que la conexión entre dicha expresión cinemática y el teorema del trabajo y la energía cinética. Adicionalmente, se muestra una generalización de la referida ecuación cinemática.

Descriptores: Rapidez; cinemática; enseñanza de la mecánica.

Here we show how to separate into variables the scalar kinematic equation $V^2 = V_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ in Cartesian coordinates, a procedure that is little considered in the school texts on general physics, and also the connection between the kinematic expression and the theorem on work and kinetic energy. We also show a generalization of this same kinematic equation.

Keywords: Speed; kinematics; teaching of the mechanics.

PACS: 01.40.J, 01.55+b, 45.20.D-

1. Introducción

La cinemática, enmarcada en la mecánica clásica, es uno de los tópicos que se enseñan en cursos básicos de física general. La dinámica de trabajo en dichos cursos está fuertemente ligada a la resolución de problemas, los cuales se centran en el estudio y análisis de situaciones problemáticas que convergen al movimiento de cuerpos en presencia de campos de fuerzas constantes. Dentro de la dinámica de trabajo resulta habitual presentar las ecuaciones de posición en función del tiempo y velocidad instantánea en coordenadas cartesianas, en lugar de presentar dichas ecuaciones en forma vectorial. La ausencia del formalismo vectorial conduce a conclusiones erróneas o extrapolaciones incorrectas asociadas al sistema de coordenadas empleado. En este sentido el artículo intenta aclarar la confusión presentada al resolver el problema titulado ¡Tengo el resultado bueno, pero el profesor me puso cero!, propuesto por Figueroa [1]. El cual consiste en determinar la rapidez de un ciclista que se desplaza por una carretera horizontal y al llegar al precipicio cae al vacío por un acantilado.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. 2 se presenta, brevemente, la disputa entre un estudiante y un docente en relación a la forma procedimental en que obtienen la rapidez del ciclista. En la Sec. 3, se presenta el marco conceptual que despeja la confusión entre ambos planteamientos, específicamente se muestra la distinción entre descomposición en coordenadas y separación de variables; la primera es natural para la formulación vectorial de las ecuaciones de cinemática y la segunda para separar las variables horizontales y verticales de un movimiento en la ecuación escalar del cuadrado de la rapidez, que surge de eliminar el parámetro tiempo de las ecuaciones vectoriales de la cinemática.

2. Planteamiento de la controversia

Al calcular la rapidez de una partícula con que llega al suelo, después de ser lanzada horizontalmente en presencia del campo gravitacional terrestre, desde una altura H y con rapidez V_0, un estudiante apresurado usa la expresión,

$$V^2 = V_0^2 + 2a_y(y - y_0), \tag{1}$$

inmediatamente sustituye los siguientes datos: rapidez inicial V_0, desplazamiento vertical $y - y_0 = -H$ y la aceleración vertical de la partícula como la aceleración de gravedad, es decir $a_y = -g$. Obteniendo como respuesta,

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gH}. \tag{2}$$

Figueroa [1] establece que el resultado es absolutamente correcto. Sin embargo, el procedimiento empleado es absurdo porque usó la ecuación para el movimiento vertical y V_0 no guarda relación con dicho movimiento. Además agrega el autor que el procedimiento correcto es emplear las expresiones,

$$\begin{cases} V_x^2 = V_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0), \\ V_y^2 = V_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0), \\ V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \end{cases} \tag{3}$$

y sustituir las componentes de los vectores: velocidad inicial $\vec{V}_0 = V_0\hat{\imath}$, aceleración $\vec{a} = -g\hat{\jmath}$ y desplazamiento $\Delta\vec{r} = d\hat{\imath} - H\hat{\jmath}$ donde la letra d representa la mayor distancia horizontal alcanzada por la partícula, medida desde el lugar de lanzamiento. Obteniendo como respuesta a la expresión (2), que según el autor, es pura casualidad que el resultado obtenido por el estudiante, en forma incorrecta, coincide con el resultado que obtuvo mediante el referido planteamiento. Con lo cual, evalúa al procedimiento seguido por el estudiante como incorrecto.

3. Expresión para la rapidez en cinemática

Las ecuaciones que rigen la cinemática de una partícula con aceleración constante vienen dadas por

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \\ \vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t. \end{cases} \tag{4}$$

El problema de obtener una expresión que elimine el parámetro tiempo de (4) ha sido considerado por Chyba [2], obteniendo la expresión

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_0|^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0), \tag{5}$$

donde el punto indica producto escalar, $|\vec{V}|$ y $|\vec{V}_0|$ corresponden a la rapidez final e inicial de la partícula, respectivamente. Existe un procedimiento alternativo para obtener una generalización de esta expresión, al considerar el producto escalar de la velocidad con la aceleración instantánea,

$$\vec{V}\cdot\vec{a} = \vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} \quad\Longrightarrow\quad 2\vec{V}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}|\vec{V}|^2, \tag{6}$$

integrado respecto al parámetro tiempo y asumiendo que en t_0 la rapidez es $|\vec{V}_0|$, se obtiene una generalización para la expresión (5)

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_0|^2 + 2\int_{t_0}^{t} \vec{a}\cdot\vec{V}dt, \tag{7}$$

notándose que esta expresión coincide con (5) cuando la aceleración es constante.

La expresión (5), por ser netamente escalar, no admite una descomposición en coordenadas. Admite una separación de variables en coordenadas cartesianas; para ello se escribe (5) de la siguiente manera:

$$V_{0x}^2+2a_x(x-x_0)-V_x^2=-\left[V_{0y}^2+2a_y(y-y_0)-V_y^2\right], \tag{8}$$

observándose que el lado izquierdo (derecho) de esta igualdad es una función de la componente horizontal (vertical) de la velocidad y la posición. En virtud de la independencia de los movimientos [3], la igualdad que surge de (6) debe ser una constante, que designaremos por α, así

$$\begin{cases} V_{0x}^2 + 2a_x(x-x_0) - V_x^2 = \alpha, \\ V_{0y}^2 + 2a_y(y-y_0) - V_y^2 = -\alpha. \end{cases}, \tag{9}$$

La constante se determina al escoger la situación inicial, donde $V_x = V_{0x}$ y $x = x_0$, estableciéndose que α se anula; es decir, $\alpha = 0$. Otra manera de obtener la constante α es calculando V_x^2 mediante la descomposición en coordenadas cartesianas de (4). Este último procedimiento es el que habitualmente aparece en los textos de física general [3]. La existencia de un valor para α, muestra que (5) admite una separación de variables en coordenadas cartesianas, dada por (3); mostrándose así la equivalencia entre dichas expresiones.

Sin embargo, para el movimiento bidimensional con aceleración a lo largo del eje vertical, tal como ocurre en el lanzamiento horizontal en presencia del campo gravitacional terrestre, la expresión (5) toma la forma planteada por el estudiante (1), en virtud de que la componente horizontal de la aceleración es nula; es decir $a_x = 0$. En esta circunstancia, los planteamientos que conducen a (1) y (3) son equivalentes, obteniéndose el mismo resultado.

La existencia de un valor para α y por consiguiente la separación en coordenadas de la expresión (5), es característico de los sistemas de coordenadas donde la orientación de los vectores unitarios asociados a dichas coordenadas no depende del punto del espacio donde éstos se describan. En los sistemas de coordenadas donde no ocurre lo antes descrito, como es el caso de las coordenadas polares en el plano, por ejemplo, no podemos realizar una separación de (5) como la mostrada en (8). Veamos: Partiendo de (5), tenemos que

$$\begin{aligned} V_r^2 + V_\theta^2 &= V_{r_0}^2 + V_{\theta_0}^2 \\ &\quad + 2(a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta})\cdot(r\hat{r} - R\hat{r}_0) \\ V_r^2 - V_{r_0}^2 &- 2a_r R(1-\cos(\theta-\theta_0)) \\ &= V_{\theta_0}^2 - V_\theta^2 - 2a_\theta\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0, \end{aligned} \tag{10}$$

donde R y $\hat{r}_0$ corresponden a la magnitud y vector unitario del vector $\vec{r}$, respectivamente, θ_0 es el ángulo que forma $\hat{r}_0$ con el eje horizontal, medido en el sentido antihorario. Nótese que ambos lados de la Ec. 10 dependen de las coordenadas r y θ simultáneamente, lo cual imposibilita la separación en coordenadas de la misma, tal como ocurre en el caso de las coordenadas cartesianas.

4. Discusión

Tanto el procedimiento empleado por el estudiante como el presentado por el profesor son correctos, en todo caso el argumento dado por el profesor es atribuido a que éste está considerando la expresión (1) como una separación en coordenadas cartesianas en la forma (3), en lugar de pensarla como la expresión escalar (5). Tal proceder es atribuido a la ausencia del formalismo vectorial en la discusión. En tal sentido, el resultado obtenido a partir del planteamiento que conduce a (1) debe ser igual al obtenido mediante el planteamiento que conduce a (3). Dicha coincidencia no es casualidad, como se afirma en [1]. La expresión (5) no es ampliamente discutida en los textos escolares de física general, siendo implementada como una ecuación más de la cinemática donde se ha eliminado el parámetro tiempo [3]. La expresión (5) puede obtenerse de forma natural del teorema de trabajo y la energía cinética usando variables puramente cinemáticas,

$$\frac{1}{2}m|\vec{V}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{V}_0|^2 = W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{11}$$

al colocar que $\vec{F} = m\vec{a}$, queda

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_0|^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0). \tag{12}$$

donde $W_{\vec{F}}$ es el trabajo realizado por todas la fuerza constantes que actúan sobre la partícula. Nótese que tal conexión entre la dinámica y la cinemática es clara en el ámbito del formalismo vectorial.

5. Conclusiones

La técnica de separación de variables presentada en el presente trabajo muestra, con claridad y sencillez, la relación entre la expresión (5) y la expresión (3), poco discutida en los textos de física general. Mostramos, tomando las coordenadas polares en el plano como ejemplo, que la separación de variables no es siempre posible. Las coordenadas polares en el plano se encuentran dentro de los sistemas de coordenadas donde la orientación de los vectores unitarios asociados a dichas coordenadas depende del punto del espacio (en nuestro caso, los puntos del plano) donde éstos se describan. En tales sistemas de coordenadas, la separación de variables no es siempre posible. En otras palabras, la separación de variables es sólo posible si los movimientos en cada uno de los ejes coordenados son independientes.

Enfatizamos el uso del formalismo vectorial en las discusiones cinemáticas y dinámicas. En el ámbito cinemático, lo hacemos señalando el resultado de Chyba, además de introducir un mecanismo alternativo para la obtención de (5); y en el ámbito dinámico, mostrando la conexión entre el teorema del trabajo y la energía cinética y la expresión (5).

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto de investigación `08-011` inscrito ante la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Caracas de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

---

1. D. Figueroa, *Cinemática* (Gráfica León, 2da. Edición, Volumen 1, Caracas, 2000).
2. T. Chyba, *Am. J. Phys*, **51** (1983) 851.
3. R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, Volumen 1 (International Thomson, México, 2005).