ENSEÑANZA REVISTA MEXICANA DE FÍSICA E **56** (2) 165–171 DICIEMBRE 2010

Un complemento al teorema de Nyquist

J.M. Alvarado Reyes y C.E. Stern Forgach
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México,
e-mail:catalina@ciencias.unam.mx

Recibido el 1 de octubre de 2009; aceptado el 21 de junio de 2010

Este trabajo está dirigido a estudiantes que por primera vez realizan la adquisición y el tratamiento de señales. En algunas carreras científicas puede ser debido a un curso obligatorio de los primeros semestres, en otras a un curso optativo y en otras carreras puede simplemente ser parte de un curso de laboratorio. Se presenta una revisión de los requisitos para hacer una buena adquisición de señales, de manera que en el espacio temporal se pueda reconstruir la señal original con sus características más importantes, y al transformar al espacio de las frecuencias, se obtenga también la resolución requerida. Se revisa el teorema de Nyquist y se muestra que éste no es suficiente para asegurar una resolución adecuada en el espacio de las frecuencias. Finalmente se hace una propuesta para escoger los parámetros de la adquisición de datos de la mejor manera posible.

Descriptores: Adquisición de señales; resolución en frecuencia; teorema de Nyquist.

The content of this article is specially designed for students that are starting their education in data acquisition and signal processing. In some scientific majors this can happen in a compulsory or an elective course or in an experimental one. We review some of the fundamental requirements for proper signal acquisition in order to reconstruct the most important characteristics of the original signal, and at the same time obtain the required resolution when transforming to frequency space. We show that the satisfaction of Nyquist criterion is not sufficient to assure adequate resolution in frequency space. Finally we suggest how to choose the parameters for the best possible acquisition.

Keywords: Data acquisition; resolution in frequency space; Nyquist Theorem.

PACS: 01,50KW

1. Introducción

Richard Lyons en su famoso libro *Para Entender el Procesamiento Digital de Señales*, le dice al lector en su prefacio: “No es necesario decirte cuan importante es el procesamiento digital de señales en la ingeniería moderna, sólo te diré que el futuro de la electrónica ***es*** el procesamiento digital de señales” [1].

Un buen procesamiento permite reconstruir la señal analógica, recuperar la información importante y desechar parte del ruido. La señal temporal reconstruida es en general difícil de analizar, por lo que es común transformarla para estudiarla en el espacio de las frecuencias. La caracterización más común de una señal es a través de su densidad espectral, que es la transformada de Fourier de la función de auto-correlación de la señal original. Hay una relación directa entre la densidad espectral y el contenido energético de la señal [2].

Lo más importante para poder hacer un buen tratamiento de señal, es asegurar en cada paso que la información original no ha sido alterada. El presente trabajo hace una revisión de algunas de las ideas más importantes alrededor del procesamiento confiable de señales. Se hace énfasis, en particular, en que un buen muestreo en el dominio del tiempo no asegura una buena resolución en el dominio de las frecuencias y, además, que tanto el teorema de Nyquist como la decisión sobre el tiempo total de muestreo y el número de muestras es fundamental para recuperar toda la información de las frecuencias de la señal original.

2. Datos experimentales vs. datos adquiridos

Una gran cantidad de actividades, tanto en la vida cotidiana como en el laboratorio o en las aplicaciones tecnológicas, dependen de cómo se transforma una señal analógica en una señal digital. En el mundo moderno, recibimos y transmitimos mucha información a través de corrientes eléctricas. Estas corrientes traen a veces ruido mezclado con la información que nos interesa y otras traen varias informaciones mezcladas. Para poder descifrar esa información es necesario adquirirla, por ejemplo con una computadora y, después, reconstruirla de la manera más fiel posible, para posteriormente identificarla.

En un laboratorio de investigación se hacen experimentos, es decir, se reproducen fenómenos de manera controlada, eliminando o introduciendo aquellas variables que puedan influir en ellos. Se entiende por variable toda característica que pueda causar cambios en los resultados de un experimento. Primero, se deben determinar todas las variables que intervienen en un proceso. Después se trata de cuantificar relaciones entre variables, como la densidad, la temperatura, la energía, etc. A veces solamente se logra adquirir información cualitativa, pero en general se trata de medir, de asignar un número. Las mediciones de las variables se hacen a través de transductores, es decir, de sistemas que transforman un tipo de energía en otro. Lo más común, independientemente del transductor o sensor que se use, es que la señal final sea una corriente eléctrica. Por ejemplo, un micrófono o un foto-detector transforman la energía acústica o luminosa en energía eléctrica. Lo que realmente se mide es una diferencia de potencial o una corriente. El transductor da una medida confiable cuando se conoce con precisión la relación entre la energía eléctrica y la variable que se quiere cuantificar.

El proceso de medición no acaba aquí. La señal eléctrica debe todavía ser digitalizada, adquirida y procesada, ya sea con un multímetro, un osciloscopio o una computadora.

La corriente eléctrica pasa por un convertidor analógico-digital que asigna un valor numérico a la diferencia de potencial en un instante dado. El experimentador tiene que tomar decisiones importantes para hacer este proceso. Para empezar, la amplitud de la señal debe ser suficiente para que el convertidor pueda asignarle un valor sin ambigüedad. Después es necesario determinar el intervalo de tiempo Δt entre cada dato que se adquiere y el número de puntos N que se quiere adquirir. Al conjunto de datos adquiridos se le llama muestra. El intervalo Δt entre un dato y otro es la resolución temporal o periodo de muestreo de la señal digitalizada. Es importante que Δt sea suficientemente pequeño para que no pasen inadvertidos eventos importantes entre un dato y el siguiente. Por otro lado, si Δt es demasiado pequeño, se necesitan muchos datos para poder estudiar el fenómeno durante un tiempo adecuado.

El tiempo total T_t de la muestra es igual a $\mathrm{T}_t = N\Delta t$ Es importante que el tiempo total sea suficiente para que el fenómeno se pueda observar completamente. Por ejemplo, si se va a estudiar la variación en la altura del agua cuando pasa una ola, y este proceso toma entre 7 y 9 segundos, el tiempo total de muestreo debe ser mayor a 7 ó 9 segundos. De estas decisiones depende la credibilidad de la señal adquirida.

Al inverso del período de muestreo se le llama frecuencia de muestreo $f_S = 1/\Delta t$. El teorema de Nyquist, considerado el más importante en la adquisición de señales, establece una condición necesaria y suficiente para la reconstrucción, en el dominio temporal, de una señal adquirida: la frecuencia de muestreo debe ser al menos 2 veces mayor que la frecuencia más alta de la señal que se quiere reconstruir [1,2]:

$$f_S \geq 2f_m. \tag{1}$$

En general se da por hecho que el cumplimiento del teorema de Nyquist es una condición necesaria y suficiente para la adquisición correcta de una señal. Esto es indudablemente cierto en el dominio del tiempo, pero no lo es cuando se trabaja en el domino de la frecuencia. Si Δt es pequeño, f_S será grande. La resolución en el espacio de las frecuencias, es decir, el intervalo de frecuencias más pequeño que se puede estudiar será $\Delta f = f_S/N$. Si el fenómeno tiene dos frecuencias diferentes separadas por un intervalo menor a Δf, estas dos frecuencias no podrán identificarse claramente.

3. Señales en el dominio del tiempo y el teorema de Nyquist

Los osciloscopios modernos son instrumentos muy útiles para adquirir señales, pues por un lado se puede observar la señal en tiempo real y por otro guardar toda la información o transferirla a otro instrumento. Algunos osciloscopios solamente pueden adquirir un número de muestras fijo. Otros tienen una función de selección automática, y hay otros, más sofisticados, que permiten al operador escoger estos parámetros.

La Fig. 1 muestra la gráfica de una señal sinusoidal con una frecuencia $f = 10$ Hz, adquirida con diferentes frecuencias de muestreo (5 Hz, 20 Hz y 50 Hz) y un número de muestras fijo (512). Una de las frecuencias de muestreo no satisface el teorema de Nyquist. La diferencia más evidente en estas señales adquiridas es que a mayor frecuencia de muestreo menor es el número de ciclos. También hay diferencias en la amplitud.

La Fig. 2 muestra un detalle de la Fig. 1. Se puede observar que efectivamente, mientras mayor sea la frecuencia de muestreo, más se parece la señal reproducida a una señal sinusoidal. La muestra que no satisfizo el teorema de Nyquist aparece distorsionada, no como una función sinusoidal.

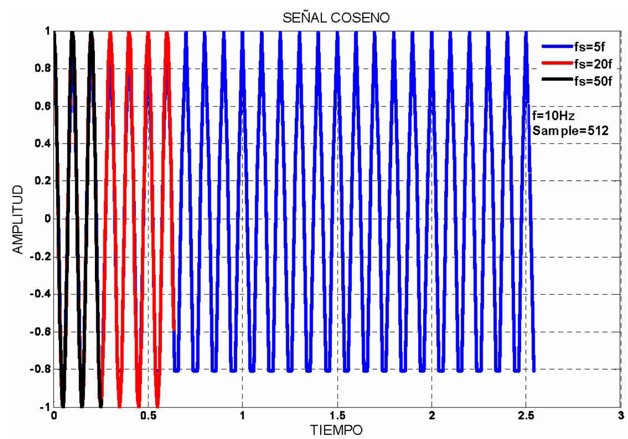

FIGURA 1. Una misma señal con distintas frecuencias de muestreo y número de muestras constante.

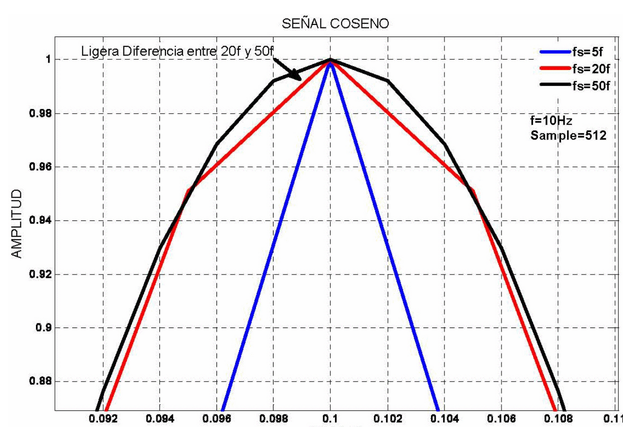

FIGURA 2. Detalle de una de las crestas de la Fig. 1. En esta figura se observa una mejora considerable en la forma de la señal para una frecuencia de muestreo 50 Hz. Para una frecuencia de muestreo de 5 Hz, la señal no es sinusoidal.

Cuando no se muestrea con la frecuencia correcta pueden aparecer componentes no deseadas en la señal y se pueden perder o sobreponer frecuencias de la señal original; a este fenómeno se le llama *aliasing*. En muchos textos se recomienda el sobremuestreo para evitar el *aliasing*. Tanto el teorema de Nyquist como el problema de *aliasing* están bien documentados en la mayor parte de la bibliografía referente al procesamiento de señales, así es que no los explicaremos en este trabajo [1,3,4].

4. La señal en el dominio de las frecuencias y la transformada de Fourier

Conocer el contenido frecuencial, es decir, el espectro de frecuencias de una señal, es fundamental para entender el o los procesos físicos de los que proviene. La técnica más común para transformar una señal del espacio temporal al espacio frecuencial es la Transformada de Fourier. La extensa variedad de señales: periódicas, no periódicas, aleatorias, caóticas, turbulentas etc; ha obligado a generar una gran diversidad de técnicas diferentes para obtener la Transformada de Fourier.

Sin importar el uso de herramientas, antiguas o modernas, numéricas o analíticas, si la señal no ha sido adquirida adecuadamente no será posible observar el comportamiento frecuencial correcto. Es necesario definir entonces criterios adecuados para una buena adquisición de señales cuando se trabaja en el dominio de las frecuencias.

Como muestra la Ec. (1), el teorema de Nyquist pone un mínimo a la frecuencia de muestreo pero no un máximo. Del inciso 2 se puede concluir que mientras más grande sea la frecuencia de muestreo, más pequeño será Δt y la muestra se parecerá más a la señal original. Por lo tanto parece que lo mejor es adquirir una señal con la mayor frecuencia de muestreo posible y con el mayor número de datos.

Es necesario en este punto hacer notar lo siguiente. Al pasar al espacio de las frecuencias, la frecuencia más grande que aparece es justamente la frecuencia de muestreo. La resolución en frecuencia está dada por

$$\Delta f = \frac{f_S}{N}. \tag{2}$$

Mientras mayor sea f_S mayor será Δf, y menor la resolución en el espacio de las frecuencias. Por lo tanto, escoger arbitrariamente la mayor frecuencia de muestreo posible o el número de datos, afecta de manera importante la información en el espacio de las frecuencias. El teorema de Nyquist no es entonces un criterio suficiente para adquirir correctamente la señal. Es necesario agregar otras condiciones para obtener una mejor resolución en frecuencia.

A pesar de que estas conclusiones son obvias y todo el mundo las conoce, no se mencionan explícitamente en ningún texto sobre procesamiento de señales. Se han revisado una gran cantidad de libros de texto que son la bibliografía recomendada tanto en cursos de la UNAM como en universidades de reconocido prestigio internacional. La consecuencia de no tomarlas en cuenta resultará en la falta de resolución espectral, es decir, en la incapacidad de discernir entre dos frecuencias cercanas.

Existe una técnica llamada *zero padding* que consiste en agregar un cierto número de ceros a la señal. Por la Ec. (2) se puede pensar que al aumentar el número de puntos, Δf disminuye y la resolución espectral aumenta. En realidad interpola la transformada de Fourier discreta a un conjunto más denso de frecuencias. Sin embargo, esta técnica no puede agregar información nueva a la señal y, por lo tanto, no puede aumentar la precisión en frecuencia que está determinada exclusivamente por la frecuencia de muestreo [5].

El muestreo convierte a una señal analógica en una colección de puntos. Es entonces adecuado utilizar la transformada de Fourier discreta (DFT por sus siglas en inglés) para pasar del espacio temporal al frecuencial. La DFT se define como

$$X(m)= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}= \sum_{n=o}^{N-1} x(n)\left[\cos\left(2\pi nm/N\right)\right. \\ \left. -j\,\mathrm{sen}\left(2\pi nm/N\right)\right]\ldots, \tag{3}$$

donde $X(m)$ es la ***m-ésima*** componente de salida de la DFT, m es el índice de la salida DFT en el dominio de la frecuencia (m =0, 1, 2, 3, ...,$N-1$), $x(n)$ la secuencia de entrada de muestras, n es el índice en el dominio del tiempo de las muestras de entrada, (n =0, 1, 2, 3, 4,.......,$N-1$), $j=\sqrt{-1}$ y N es el número de muestras de la secuencia de entrada y el número de puntos en el espacio de las frecuencias en la salida de la DFT.

4.1. Resolución en el espacio de las frecuencias

Los ejemplos que se presentan a continuación fueron adquiridos experimentalmente empleando instrumentación de patente: un generador de funciones y un osciloscopio. Con este osciloscopio se puede controlar tanto el número de muestras como la frecuencia de muestreo, lo que permite, sin lugar a dudas, mostrar la relación que existe entre estas dos variables y por ende controlar a placer la resolución en frecuencia de las señales.

Se genera una señal con una sola componente frecuencial de 1.5 MHz. Se adquirió con una frecuencia de muestreo f_s = 10 MHz y se obtuvieron muestras de distintos tamaños: 32384, 16423, 8192, 4096, 2048 y 256 datos. Estas señales se muestran en la Fig. 3.

Lo primero que se observa en la Fig. 3 es que, contrariamente a lo que pasa en el espacio temporal, el número de muestras sí afecta el resultado en el espacio de las frecuencias. La amplitud de los espectros y hasta la posición de la frecuencia de la señal cambia. Estos resultados, conocidos como amplitud y derrame espectral, son muy conocidos y su

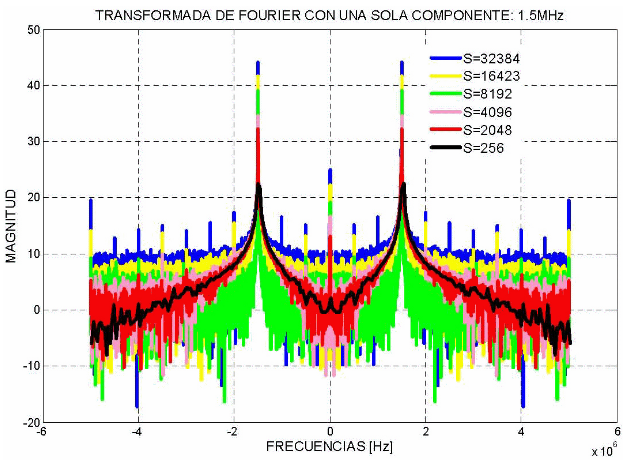

FIGURA 3. Una misma señal con la misma frecuencia de muestreo y diferentes números de muestras adquiridas.

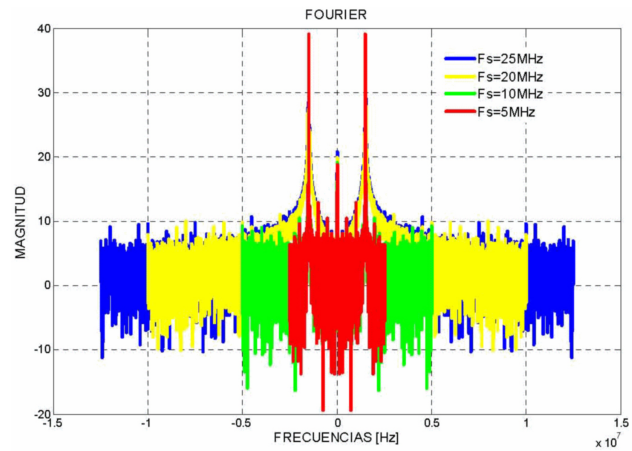

FIGURA 5. Una señal de 1.5 MHz, con diferentes frecuencias de muestreo y un mismo número de muestras 8192.

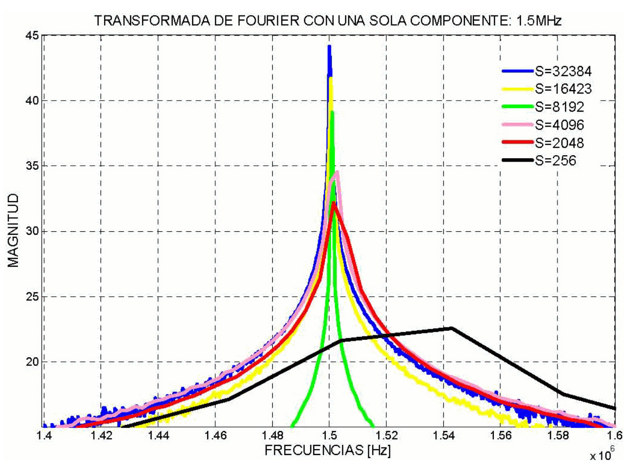

FIGURA 4. Ampliación sobre la zona de picos de la Fig. 3.

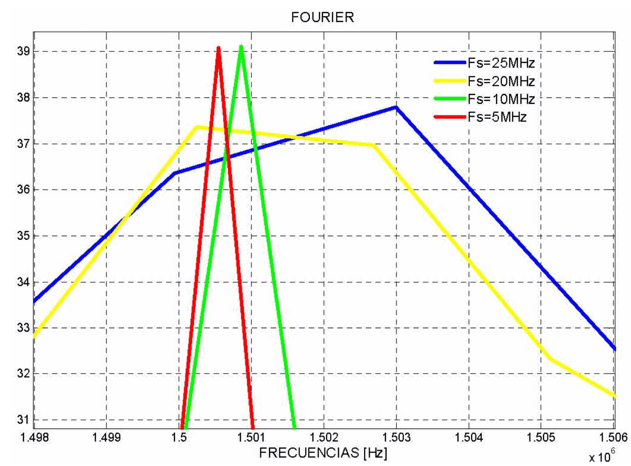

FIGURA 6. Ampliación en los picos de las distintas frecuencias de muestreo.

origen se discute en muchos libros. En este trabajo el interés consiste en destacar la importancia de la resolución en frecuencia. Por tal motivo, se hace un acercamiento a los picos obtenidos para los distintos números de muestra, (Fig. 4).

En la Fig. 4 se puede observar que el ancho del pico disminuye conforme se incrementa el número de muestras.

La Fig. 5 muestra una señal de 1.5 MHz, con 8192 muestras adquirida a diferentes frecuencias: 25 MHz, 20 MHz, 10 MHz y 5 MHz. Al hacer un acercamiento, se puede observar un comportamiento interesante; para una frecuencia de muestro menor se obtiene un derrame espectral menor y una amplitud de pico mayor, y el ancho del pico es mucho mayor para una frecuencia de muestreo mayor.

De las gráficas anteriores es claro que una frecuencia de muestreo muy alta no es necesariamente la mejor opción, en particular si el número de muestras no es controlable. Es necesario en todos los casos hacer un compromiso entre la frecuencia de muestreo y el número de muestras dependiendo de la resolución que se requiera en ambos espacios. Este compromiso no es siempre fácil de lograr. La Fig. 7 muestra una manera de llegar a este compromiso.

Se presenta una señal con pocas muestras, 256, y dos frecuencias de muestreo distintas, 25 MHz y 10 MHz. De la figura se puede concluir que con pocas muestras y una frecuencia de muestreo menor se puede obtener una definición del comportamiento de la señal en el domino del tiempo y reducir el ancho del pico de la componente frecuencial.

5. Resolución en frecuencia, identificación de fenómenos simultáneos

En la mayoría de los experimentos suceden varios fenómenos con frecuencias características distintas simultáneamente. Puede suceder que estas frecuencias, aunque distintas, sean muy cercanas y, sin la resolución suficiente en el espacio de las frecuencias, aparecerían todas juntas como un pico ancho y no podrían identificarse. La resolución en frecuencia es fundamental para identificar varios procesos que suceden al mismo tiempo en el mismo lugar.

Para analizar mejor este punto, se capturó una señal con cuatro componentes frecuenciales: 1 MHz, 1.01 MHz,

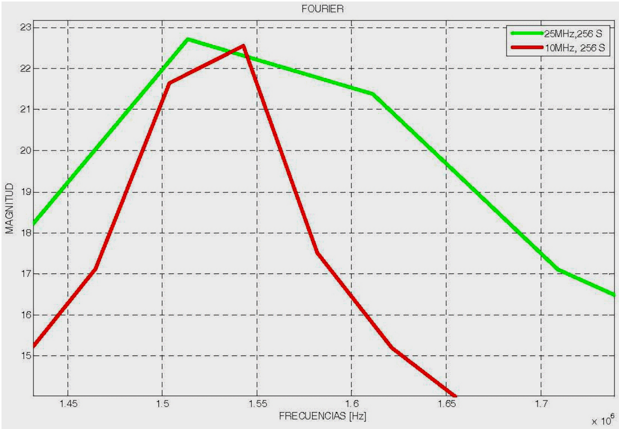

FIGURA 7. Combinando la frecuencia de muestreo y el número de muestras Δf=25$\times$10^6/256=97656.62 y Δf=10$\times$10^6/256=39062.5.

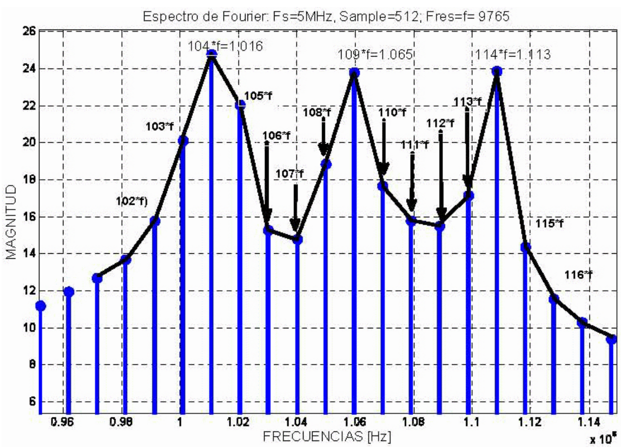

FIGURA 8. Espectro de una señal con “4 componentes frecuenciales”.

1.05 MHz y 1.1 MHz; con una f_S=5 MHz, y N=512. Con estos parámetros, aplicando la Ec. 1, se obtiene una resolución en frecuencia de Δf = 9765 Hz. La transformada de Fourier de esta señal se presenta en la Fig. 8.

En la Fig. 8, se esperaba encontrar 4 componentes frecuenciales y sólo se observan claramente 3 componentes: 1.01 MHz, 1.06 MHz y 1.11 MHz. La frecuencia más alta de estas componentes es de 1.1 MHz, por lo que una frecuencia de muestreo de f_S=5 MHz cumple perfectamente con el teorema de Nyquist.

Aun técnicas de tratamiento de señal como ondeletas o periodogramas no permiten resolver las cuatro frecuencias. Por ejemplo, el espectro de esta señal se obtuvo empleando el software ***wavemenu*** de Matlab con distintas ondeletas madres, Haar, Marlet (Sombrero Mexicano), Daubechies, Coiflet y la Symmlet. En la Fig. 9 se presentan los resultados que arroja el software antes mencionado empleando la ondeleta madre Haar. La figura que es importante observar es la que representa la transformada de Fourier y que corresponde a la gráfica, normalizada, inferior derecha. Es decir, *por muy buena que sea la técnica de análisis espectral, no puede crear frecuencias que no fueron adquiridas*.

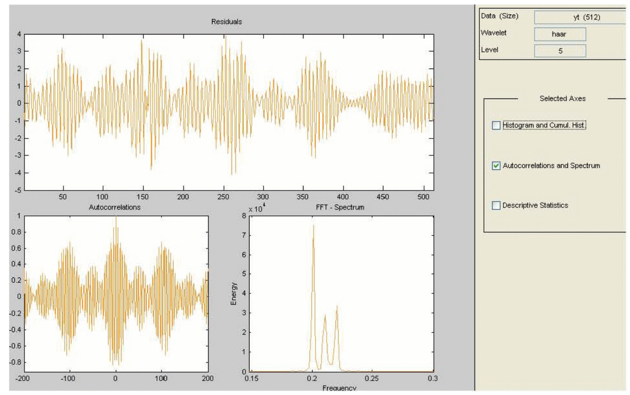

FIGURA 9. Gráficas obtenidas de emplear ***wavemenu*** de Matlab, uso de ondeletas para resolver las componentes frecuenciales.

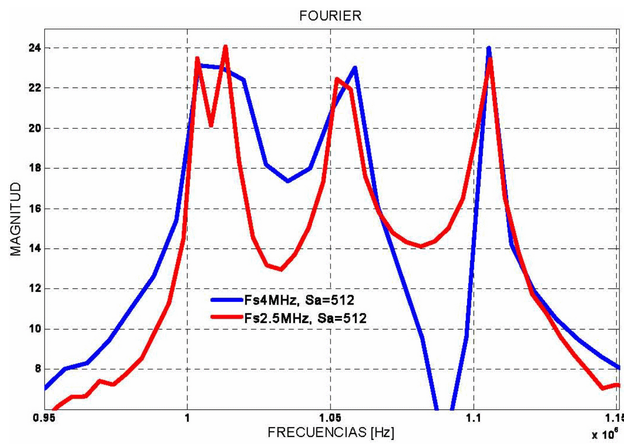

FIGURA 10. Una misma señal con distintas frecuencias de muestreo Δf = 4$\times$10^6/512 = 7812.12 y Δf = 2.5$\times$10^6/512 = 4882.8.

En un análisis cualitativo se tiene que las frecuencias mas cercanas entre si, 1 MHz y 1.01 MHz, tienen una separación entre ellas de 10 KHz, y los intervalos en frecuencia son de 9765 por lo consiguiente estos intervalos hacen que difícilmente pueda distinguirse entre ellas. Como consecuencia se obtienen componentes con picos anchos que envuelven a todas aquellas componentes frecuenciales que se encuentren cercanas o dentro del intervalo de 9765 Hz, como lo reflejan las Figs. 8 y 9.

La Fig. 10 muestra la señal experimental de cuatro componentes frecuenciales adquirida a distintas frecuencias de muestreo con el mismo número de muestras de la Fig. 9.

En la Fig. 10 es posible observar que para una frecuencia de muestreo dos veces y media mayor a la frecuencia mas grande involucrada en la señal -esta frecuencia es cercana a la frecuencia de Nyquist- fue posible resolver las cuatro componentes frecuenciales sin la necesidad de incrementar la frecuencia de muestreo o el número de muestras; no con la precisión deseada pero sí con una buena resolución, dado que es posible distinguir las cuatro componentes. Es decir, en algunos casos, se puede obtener una mejor resolución simplemente incrementando el número de muestras con una frecuencia de muestreo de 5 MHz. Por lo tanto, para una señal

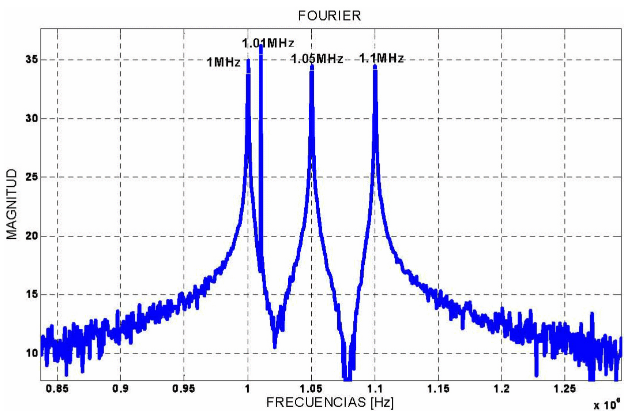

FIGURA 11. Con una frecuencia de muestreo de 5 MHz y 8192 muestras, se obtiene una buena resolución de las componentes frecuenciales.

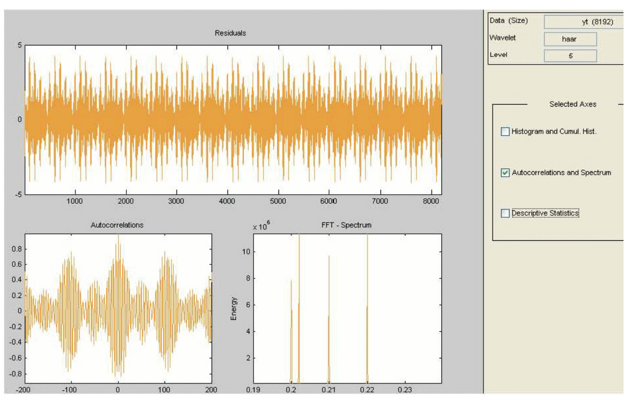

FIGURA 12. Graficas obtenidas de emplear ***wavemenu*** de Matlab, uso de ondeletas para resolver las componentes frecuenciales.

con N=8192 se tiene una resolución de 610 Hz, lo cual da excelentes resultados como se puede observar en la Fig. 11.

Es necesario mencionar que si se hubiera querido resolver dos componentes cercanas, alrededor de 610 Hz, sucedería exactamente lo mismo que se ha mencionado anteriormente. Aplicando nuevamente el software ***wavemenu*** es posible resolver sin mayor problema, como muestra la Fig. 12, las componentes frecuenciales involucradas. La gráfica, normalizada inferior derecha, muestra claramente las cuatro componentes frecuenciales esperadas.

Durante el desarrollo del presente trabajo se ha resaltado la importancia de considerar la resolución requerida tanto en el espacio temporal como en el de las frecuencias, como un parámetro para tomar decisiones sobre la adquisición de una señal. Los instrumentos con la capacidad de adquirir una señal tienen, en ocasiones, el número de muestras constante independientemente de las componentes frecuenciales involucradas. Tener conocimiento de todo lo anterior permitirá al usuario conocer anticipadamente la resolución en frecuencia y, con ello, saber las capacidades de su instrumento para discernir entre dos componentes cercanas. Para aquellos instrumentos que permiten manipular f_S y N, le permitirán adquirir con mayor certeza las componentes que desea estudiar.

6. Conclusiones

Cuanto se ha escrito en el presente trabajo está ya explicado en la mayoría de los libros de texto sobre el tema. Sin embargo, en ninguno de los que revisamos, ni en las consultas personales que se hicieron a expertos internacionales, se menciona que el teorema de Nyquist **no** es un criterio suficiente para recuperar toda la información frecuencial de una señal. En este trabajo se ha puesto en evidencia esta carencia, y se muestra cómo, tomando en cuenta la resolución espectral desde un principio, se puede hacer una adquisición de datos adecuada.

Independientemente del tipo de procesamiento empleado, pasar por alto la estimación de la resolución hará difícil, y a veces imposible, discernir entre componentes cercanas o incluso transiciones que pudieran suceder dentro del intervalo Δf. Si se tiene idea desde antes de la adquisición, de la resolución espectral deseada, la metodología es muy clara. Si no, será necesario hacer un estudio detallado de los “picos anchos” para saber si sí son el resultado de un proceso aleatorio o de dos o más procesos que suceden a frecuencias muy cercanas.

En conclusión, se insiste sobre el hecho de que si una señal ha sido adquirida tomando en cuenta solamente el teorema de Nyquist, es difícil garantizar que el comportamiento obtenido en la gráfica espectral sea representativa del fenómeno que se está estudiando.

Lectura recomendadas

1. R.N. Bracewell, *The fourier transform and its applications* (McGraw-Hill, 1978).
2. T.J. Cavicchi, *Digital signal processing* (J. Wiley, 2000).
3. A.A. Khan, *Digital signal processing fundamentals* (Hingham, Massachusetts Da Vinci Engineering, 2005).
4. Kuo y Sen-Maw, *Real-time digital signal processing :implementations and applications* (J. Wiley, 2006).
5. Mitra, Sanjit Kumar, *Digital signal processing :a computer-based approach* (Boston, McGraw-Hill, 2006).
6. Olnes y Enochson, *Digital Time Series Analysis* (John Wiley & Sons.)
7. T.F. Quatieri, *Discrete-time speech signal processing :principles and practice* (Prentice Hall, 2002).
8. Smith y W. Steven, *Digital signal processing :a practical guide for engineers and scientists* (Newnes, 2003).

1. R. Lyons, *Understanding Digital Signal Processing* 2^{nd} Edition, (Eddison Wesley, 1997).
2. A.V. Oppenheim, *Discrete-time signal processing* (Prentice Hall, 1999).
3. J.G. Proakis y G.M. Dimintris, *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Aplications* 3^a edición, (Prentice Hall, 1998).
4. A. Ambardar, *Analog and Digital Signal Processing* 3^a edición, (An International Thomson Publishing Company, 1995).
5. M. Kay Steven, *Modern Spectral Estimation. Theory & Application, Signal Processing Series* 4^a edición, (Prentice Hall, 1988).