

# Umrales de percolación exactos en redes duales

W. Lebrecht

*Departamento de Física, Universidad de La Frontera,  
Casilla 54-D, Temuco, Chile,  
e-mail: lebrecht@ufro.cl*

Recibido el 17 de mayo de 2010; aceptado el 28 de junio de 2010

Usando la transformación triángulo - estrella y la dualidad de redes, se calcula el umbral de percolación de enlaces para redes con simetría hexagonal. Este cálculo es exacto y ampliamente conocido especialmente para la red triangular y hexagonal. Esta técnica aplicada a la red de Kagomé en sitios y enlaces reproduce los umbrales de percolación obtenidos por Scullard y Ziff. Este procedimiento se amplía en la red cuadrada de enlaces, obteniéndose el valor exacto del umbral de percolación. De acuerdo a la simplicidad de la metodología usada, ésta puede aplicarse a otras geometrías planas y eventualmente a redes 3D.

*Descriptores:* Redes duales; percolación; umbral de percolación.

Bond percolation threshold is calculated for lattices with hexagonal symmetry, using the transformation triangle - star and the duality of lattices. This calculation is exact and widely well - known especially for triangular and hexagonal lattices. This technique applied to Kagomé lattice in sites and bonds reproduces the percolation thresholds obtained by Scullard and Ziff. This procedure is enlarged to square lattice of bonds, being obtained the exact value of the percolation threshold. According to the simplicity of the utilized methodology, this can be applied to other plane geometries and possibly to 3D lattices.

*Keywords:* Dual lattices; percolation; percolation threshold.

PACS: 64.60.Ak

## 1. Introducción y teoría

El fenómeno de percolación describe de manera simple la criticalidad de algunos sistemas complejos y auto - organizados, tales como fenómenos físicos, biológicos y sociales. Los estudios canónicos están dentro de la mecánica estadística y fundamentalmente asociados a transiciones de fase [1-3].

El concepto más básico de percolación está ligado a la idea de filtración o propagación, de este modo, la conectividad entre sus individuos es una variable importante. Así, por ejemplo, en una red cuadrada, pueden llamarse individuos a sus nudos (o sitios), como también a sus interacciones entre sitios vecinos (o enlaces). Los individuos pueden conectarse o no con sus vecinos, en esta concepción se está en presencia de un modelo discreto de percolación. Se puede entonces definir cierta probabilidad  $p$  de que un sitio (enlace) esté ocupado o  $1 - p$  si está desocupado [4-5]. La probabilidad continua está definida mediante una función que describe el comportamiento global del sistema a través de sus individuos [6].

La criticalidad en teoría de percolación, especialmente en modelos discretos, es observada por medio de una discontinuidad a medida que la probabilidad de ocupación aumenta. Este punto crítico lo determina un parámetro de orden, de la misma forma (clase), que caracteriza el diagrama de fase de un fluido, o la magnetización espontánea de un ferromagneto. Es por ello que se habla de universalidad en teoría de percolación.

En modelos discretos, existen diferentes técnicas para determinar el comportamiento crítico en tales sistemas; por un

lado, se usan desarrollos numéricos [7-8] en redes finitas y mediante simulaciones computacionales se registran distintos valores de la probabilidad  $p$  hasta lograr determinar el punto crítico donde el llenado de sitios (enlaces) llega a un nivel de saturación. Por sobre esta probabilidad, que determina el punto crítico, no hay cambios del parámetro de orden en la red. Por otro lado, están los desarrollos analíticos, los cuales pueden entenderse, directamente desde un punto de vista matemático, utilizando teoría de grafos [9], o bien mediante técnicas basadas en grupo de renormalización [10-11]. En el último caso, se estudian crecimientos de pequeñas celdas, las cuales se caracterizan por una función polinomial que se obtiene mediante renormalización. Manipulando estos polinomios que caracterizan las celdas renormalizadas se obtienen los puntos críticos no sólo asociado al parámetro de orden, sino que además permite determinar algunos exponentes críticos que caracterizan el sistema en cuanto a su dimensionalidad. Nuevamente podemos asociar esta idea al concepto de universalidad.

Otra técnica analítica utilizada, corresponde a un estudio de conectividades [12-13] basada en la transformación triángulo - estrella propuesta por Sykes y Essam [13], la cual permite calcular exactamente los puntos críticos de aquellas redes arquimedianas [14] que presentan esta simetría.

En este trabajo se obtiene, de manera simple y exacta, el punto crítico discutido en los párrafos anteriores, denominado umbral de percolación para algunas redes que presentan simetría hexagonal. Se extiende esta metodología a la red cuadrada, que es simétrica a sí misma y no tiene simetría hexagonal, obteniéndose los valores exactos informados en la literatura [2-3,9].

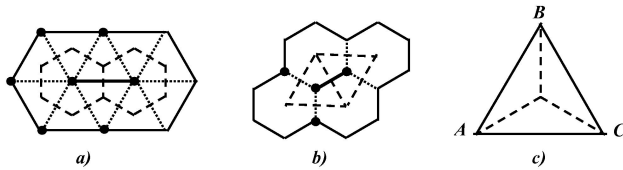


FIGURA 1. a) Red triangular simétrica y su dual hexagonal, b) red hexagonal simétrica y su dual triangular, c) transformación triángulo - estrella.

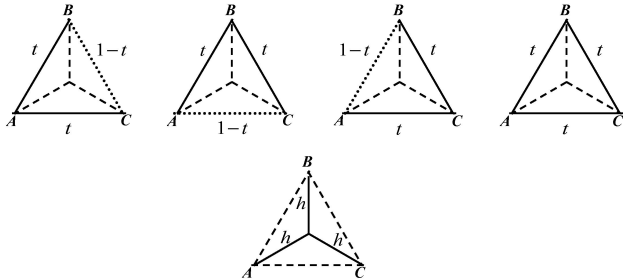


FIGURA 2. Configuraciones posibles en la red triangular de enlaces y su red dual, tal que el vértice A conecta B y C simultáneamente a través de los enlaces ocupados.

**1.1. Red simétrica triangular y hexagonal**

La red triangular se caracteriza por sus 6 vecinos más cercanos en sitios de la red y además por sus 10 vecinos más cercanos en enlaces. En cambio, la red hexagonal, posee 3 sitios más cercanos y 4 vecinos más cercanos de enlaces. Uniendo los centros geométricos de cada triángulo que conforma la red triangular, se determina una red hexagonal, en tanto, al unir los centros geométricos de los hexágonos de la red hexagonal, se encuentra una red triangular. Esto determina la dualidad en estas redes, como lo muestra la Fig 1a y 1b. En estas figuras, se ha representado con línea continua la red triangular (Fig. 1a) y hexagonal (Fig. 1b), con línea punteada los enlaces de primeros vecinos y con la línea segmentada la red dual. Los puntos negros representan sitios más cercanos en torno del sitio central. Una barra más gruesa representa el enlace al cual se refieren los enlaces más cercanos. La Fig. 1c, se denomina transformación triángulo - estrella y representa la dualidad en ambas redes y fue propuesta por Sykes y Essam en alusión a la transformación de Kennelly usada en circuitos estrella.

Para determinar el umbral de percolación de enlaces en la red triangular y al mismo tiempo de la red hexagonal, se utiliza la transformación triángulo - estrella y se analizan distintas configuraciones tal que exista conectividad entre dos o más puntos a través de sus enlaces. De esta forma, usando el siguiente criterio: “existe conectividad entre el punto A y los puntos B y C simultáneamente a través de uno o más enlaces” y definiendo como  $t(h)$  la probabilidad de que un enlace perteneciente a la red triangular simétrica (hexagonal simétrica) esté ocupado y  $1 - t$  ( $1 - h$ ) si está desocupado, respectivamente, se determina una probabilidad asociada a la conectividad usando este criterio. La Fig. 2, ilustra las dife-

rentes posibilidades de conexión en la red (parte superior) y su red dual (parte inferior) de acuerdo a este criterio.

En la parte superior de la Fig. 2 se representan para la red triangular las 4 configuraciones distintas que satisfacen el criterio mencionado arriba. Los enlaces ocupados se representan por líneas continuas y los desocupados mediante líneas discontinuas. Las líneas segmentadas representa la red dual. La función polinomial  $t^3 + 3t^2(1 - t)$  representa analíticamente las 4 configuraciones. Por otro lado, en la parte baja de la Fig. 2 muestra la única configuración posible para la red hexagonal que satisface el criterio mencionado arriba, verificándose que todos los enlaces en la red dual están ocupados. Esta configuración tiene asociado la función polinomial  $h^3$ . Como se trata del mismo criterio, ambas funciones polinomiales son iguales y además la dualidad entre las redes permite definir que  $h = (1 - t)$  [13]. Igualando las expresiones y resolviendo se establece una ecuación cúbica, que en la variable  $t$  es

$$t^3 - 3t + 1 = 0. \tag{1}$$

La resolución exacta de las ecuaciones cúbicas ya fue resuelta por las fórmulas de Cardano y puede demostrarse que esta ecuación en particular contiene tres raíces reales, en cuyo caso se tiene:

$$t_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{9} \sim 1.5432 \dots, \tag{2}$$

$$t_2 = 2 \cos \frac{8\pi}{9} \sim -1.8794 \dots, \tag{3}$$

$$t_3 = 2 \cos \frac{14\pi}{9} \sim 0.3473 \dots \tag{4}$$

De los tres valores anteriores, correspondiente a la solución de la ecuación cúbica, sólo  $t_3$  está en el intervalo que define la probabilidad  $t$ . Este punto crítico representa la conectividad mínima posible utilizando el criterio establecido en el párrafo anterior para la red triangular y su dual representada por la Fig. 2. Para valores menores de la probabilidad en comparación con el valor crítico no se satisface el criterio y para valores mayores a este valor, siempre se satisface. Este punto se denomina umbral de percolación de enlaces de la red triangular [13] y comúnmente se escribe en términos de la función seno como

$$t_3 = t_c = 2 \cos \frac{14\pi}{9} = 2 \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{18} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{18}. \tag{5}$$

Alternativamente, el umbral de percolación de enlaces para la red hexagonal es  $h_c = 1 - t_c$ , en cuyo caso resulta

$$h_c = 1 - 2 \sin \frac{\pi}{18} \tag{6}$$

**1.2. Red simétrica cuadrada**

Se aplica el criterio definido en la sección anterior a la red cuadrada de enlaces, considerando que su red dual es la misma. La Fig. 3 ilustra todas las posibilidades de conectar el

punto A con los puntos B y C simultáneamente a través de sus enlaces, correspondiente al criterio establecido anteriormente. Para ello, sea  $c$  la probabilidad de que un enlace esté ocupado y  $1 - c$  que esté desocupado en la red cuadrada de enlaces, entonces se encuentra que este criterio queda determinado por

$$c^2(1 - c)^2 + 4c^3(1 - c) + c^4. \tag{7}$$

Por otro lado, si se define  $c'$  ( $1 - c'$ ) como la probabilidad de que un enlace este ocupado (desocupado) en la red dual, respectivamente, entonces se obtiene que el criterio en la red dual está determinado por

$$c'^2(1 - c')^2 + 4c'^3(1 - c') + c'^4. \tag{8}$$

Considerando como antes la dualidad expresada a través de  $c' = 1 - c$  e igualando las expresiones y resolviendo, se llega a la ecuación cúbica  $(2c - 1)(2c^2 - 2c - 1) = 0$ . Las tres raíces reales determinan los valores críticos y sólo  $c_c = 1/2$  está en el rango que determina la probabilidad  $c$  y corresponde al umbral de percolación de la red cuadrada de enlaces.

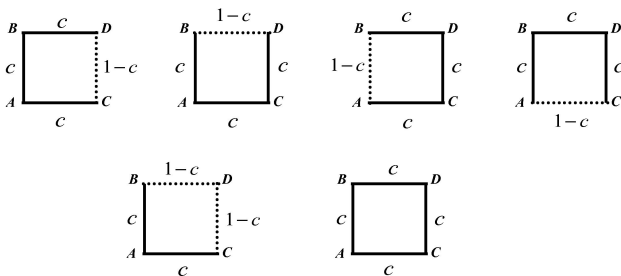


FIGURA 3. Configuraciones posibles en la red cuadrada de enlaces y su red dual, tal que el vértice A conecta B y C simultáneamente a través de los enlaces ocupados.

De esta manera, usando conectividades de los enlaces en la red triangular (y cuadrada) y considerando el concepto de red dual, se establece con exactitud el umbral de percolación asociada a cada geometría. Aunque estos resultados han sido publicados y mencionados, la manera explícita del cálculo del umbral de percolación de la red cuadrada es uno de los aportes de este trabajo el que ha sido determinado también por teoría de grafos [9]. La metodología propuesta es una forma alternativa de encontrar cada uno de estos puntos críticos.

**1.3. Transformaciones de una red asimétrica**

Consideremos ahora una red triangular (hexagonal) asimétrica (lados desiguales) determinada por la transformación triángulo - estrella como la ilustrada en la Fig. 4a. Se desea determinar una ecuación, tanto para la red triangular, como para la red hexagonal en función de sus enlaces respectivamente. Para ello, se utilizan dos criterios (uno de ellos mencionado anteriormente):

- I) El punto A, conecta B y C simultáneamente.
- II) El punto A, conecta a B y no a C.

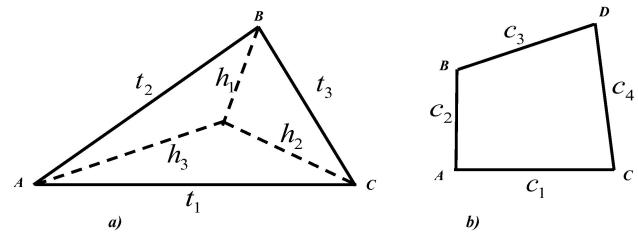


FIGURA 4. a) Transformación triángulo - estrella para una red triangular de enlaces asimétrica. b) Transformación para una red cuadrada asimétrica de enlaces.

Usando la metodología propuesta en la sección anterior, donde ahora  $t_i$  ( $h_i$ ), con  $i = 1, 2, 3$  representa un enlace ocupado para una red triangular (hexagonal) y considerando el criterio (I) sobre los enlaces de la red triangular y su dual, se encuentra que

$$h_1h_2h_3 \rightarrow t_1t_2(1 - t_3) + t_1t_3(1 - t_2) + t_2t_3(1 - t_1) + t_1t_2t_3. \tag{9}$$

Reordenando los términos, se tiene que

$$h_1h_2h_3 \rightarrow t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 - 2t_1t_2t_3. \tag{10}$$

Por otro lado, cuando se aplica el criterio (II), sólo existen dos configuraciones: una para la red triangular y otra para la red hexagonal. Para la red triangular, esta configuración se caracteriza por  $(1 - t_1)t_2t_3$ , en tanto para la red hexagonal por  $h_1h_2(1 - h_3)$ . De esta forma reemplazando la Ec. (10) se obtiene que

$$h_1h_2 \rightarrow t_3 + t_1t_2 - t_1t_2t_3. \tag{11}$$

La configuración anterior, usando el criterio (II), permite obtener otras dos condiciones por la simetría mostrada en la red dual, estableciéndose que:

$$h_1h_3 \rightarrow t_2 + t_1t_3 - t_1t_2t_3$$

$$h_2h_3 \rightarrow t_1 + t_2t_3 - t_1t_2t_3. \tag{12}$$

De acuerdo con las transformaciones anteriores y considerando que una red es dual de la otra, entonces  $t_i = 1 - h_i$ , de modo que reordenando términos se obtiene la ecuación para la red triangular asimétrica:

$$t_1t_2t_3 - t_1 - t_2 - t_3 + 1 = 0, \tag{13}$$

y para la red hexagonal asimétrica:

$$h_1h_2h_3 - h_1h_2 - h_1h_3 - h_2h_3 + 1 = 0. \tag{14}$$

Cuando los enlaces son iguales, (eventualmente presentan la misma interacción) en cada ecuación anterior, se recuperan las expresiones de la Sec. 1.1 para estas redes.

Al aplicar los criterios (I) y (II) en la Fig. 4b sobre los enlaces de la red cuadrada asimétrica, donde un enlace ocupado está representado por  $c_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$  en la red cuadrada

y  $c'_i$  en la red dual y considerando el criterio (I) se obtienen 6 configuraciones posibles caracterizadas por

$$\begin{aligned} &c_1c_2(1-c_3)(1-c_4) + (1-c_1)c_2c_3c_4 + c_1(1-c_2)c_3c_4 \\ &+ c_1c_2(1-c_3)c_4 + c_1c_2c_3(1-c_4) + c_1c_2c_3c_4 \\ &= -2c_1c_2c_3c_4 + c_2c_3c_4 + c_1c_3c_4 + c_1c_2. \end{aligned} \quad (15)$$

La ecuación anterior es equivalente en la red dual, pero en la probabilidad  $c'$ , de modo que considerando la propiedad de dualidad  $c'_i = 1 - c_i$  y luego igualando con la Ec. (15), se tiene que

$$\begin{aligned} &-2(1-c_1)(1-c_2)(1-c_3)(1-c_4) \\ &+ (1-c_2)(1-c_3)(1-c_4) + (1-c_1)(1-c_3)(1-c_4) \\ &+ (1-c_1)(1-c_2)2c_1c_2c_4 + 2c_1c_2c_3 - 2c_1c_2 - c_1c_3 \\ &- c_1c_4 - c_2c_3 - c_2c_4 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

En este caso, si los enlaces presentan la misma interacción  $c_i = c$  se obtiene la misma ecuación calculada en la Sec. (1.2) para la red cuadrada de enlaces simétricos. Ahora, se aplica el criterio (II), a la red cuadrada asimétrica, donde se obtienen 3 configuraciones posibles en la red y en la red dual y siguiendo el procedimiento aplicado para el criterio (I), se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} &-c_2c_3c_4 + c_1c_3c_4 + c_1c_2c_4 + c_1c_2c_3 - c_1c_2 \\ &- c_1c_4 - c_1c_3 + c_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

En este caso, cuando se impone la condición de enlaces iguales se obtiene la ecuación cúbica  $c(2c-1)(c-1) = 0$  que presenta un punto crítico en  $c_c = 0, 1/2, 1$ , donde sólo  $1/2$  está en el rango que corresponde al umbral de percolación de enlaces de la red cuadrada. Como se observa, las Ecs. (16) y (17) no son iguales, por lo tanto basta la aplicación de un criterio sobre la red cuadrada para determinar el umbral de percolación de enlaces. Esto se explica por el hecho que la red es dual de sí misma. En este sentido, se propone en el presente trabajo que cada enlace, par de enlaces, trío de enlaces o los cuatro enlaces de la red asimétrica cuadrada transforman con su dual, con lo que se obtienen la relaciones de transformación y ecuaciones asociadas:

$$c_1 \rightarrow c'_1 \implies -2c_1 + 1 = 0, \quad (18)$$

$$c_1c_2 \rightarrow c'_1c'_2 \implies -c_1 - c_2 + 1 = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} c_1c_2c_3 \rightarrow c'_1c'_2c'_3 \implies &-2c_1c_2c_3 + c_2c_3 + c_1c_3 \\ &+ c_1c_2 - c_1 - c_2 \\ &- c_3 + 1 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} c_1c_2c_3c_4 \rightarrow c'_1c'_2c'_3c'_4 \implies &-c_1c_2c_3 - c_1c_2c_4 - c_1c_3c_4 \\ &- c_2c_3c_4 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 \\ &+ c_2c_3 + c_2c_4 + c_3c_4 - c_1 \\ &- c_2 - c_3 - c_4 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Una forma de determinar si estas expresiones son correctas, consiste en determinar el umbral de percolación de la red cuadrada de la Sec. (1.2). Cuando se impone la condición de simetría  $c_i = c$  en las Ecs. (18-21), se tiene

$$\begin{aligned} -2c + 1 = 0 &\implies (2c - 1) = 0, \\ -c - c + 1 = 0 &\implies (2c - 1) = 0, \\ 2c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = 0 &\implies (2c - 1)(c^2 - c + 1) = 0, \\ 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0 &\implies (2c - 1)(2c^2 - 2c + 1) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

En cada una de ellas se obtiene un punto crítico en

$$c_c = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, cada una de las ecuaciones representadas en  $c'$ , cuando se realiza el cambio

$$c = 1 - c'$$

validando la propuesta original.

## 2. Resultados

La metodología desarrollada en la Sec. 1 se aplica ahora a la red de Kagomé para percolación de sitios y percolación de enlaces. Se ha escogido esta red dado que tiene simetría hexagonal, su red dual es la red de Dice y los valores del umbral de percolación son conocidos en ambos casos.

La Fig. 5a ilustra una red de Kagomé representada por líneas continuas. Se observa que la interacción entre sitios más cercanos es 4, representada por puntos negros, en cambio, la interacción entre enlaces a vecinos más cercanos es 6, representada por líneas punteadas. Finalmente, la red dual está representada por líneas segmentadas. La Fig. 5b ilustra una celda mínima con la cual se puede generar la red de Dice mediante una repetición en el plano. Se han identificado los enlaces internos (línea segmentada) como  $h_i$  y los pares de enlaces externos como  $(p_i, q_i)$  (línea continua), con  $i = 1, 2, 3$ . La Fig 5c ilustra una celda, cuya repetición en el plano genera la red de Kagomé. Se han identificado los enlaces internos y externos de una manera similar a la mostrada en la Fig. 1b.

El umbral de percolación de sitios de la red de Kagomé es conocida y es igual al umbral de percolación de enlaces de la red hexagonal Ec. (6). Para comprobar este resultado mediante la presente metodología, se utiliza la Fig. 5b. Para tal efecto, se relacionan los enlaces internos y externos de la celda mediante una transformación entre ellos. Esta transformación es equivalente a la transformación de la red triangular a la hexagonal. Para todos los cálculos realizados posteriormente se supone que la probabilidad de que un enlace esté ocupado es  $h_i, p_i$  o  $q_i$  y si está desocupado es su complemento  $1 - h_i, 1 - p_i, o 1 - q_i$ , respectivamente.

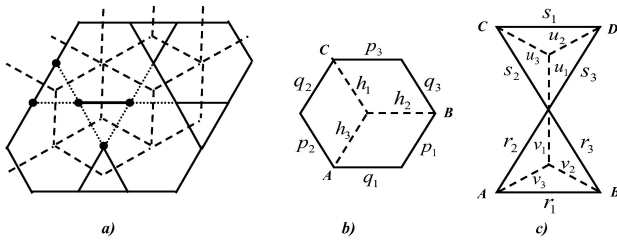


FIGURA 5. a) Red de Kagomé y su red dual, b) Celda hexagonal de la red de Dice c) Doble celda hexagonal de la red de Kagomé.

Al aplicar el criterio (I) en los enlaces internos de la Fig. 5b se requiere que todos los enlaces deban estar ocupados, en este caso la probabilidad total es  $h_1 h_2 h_3$ . La Fig. 6 representa las 10 configuraciones posibles cuando se aplica el criterio (I) a los enlaces externos de la Fig. 5b. Las líneas gruesas representan enlaces ocupados, y las líneas más delgadas enlaces desocupados. Sumando las probabilidades que representan cada configuración y realizando las simplificaciones se llega a la siguiente transformación:

$$h_1 h_2 h_3 \rightarrow p_1 p_2 q_1 q_2 + p_1 p_3 q_1 q_3 + p_2 p_3 q_2 q_3 - 2p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3 \quad (23)$$

Por otro lado, este mismo procedimiento se aplica considerando ahora el criterio (II). En el primer caso, esto es, considerando los enlaces internos de la Fig 5b, se obtiene la probabilidad  $h_2 h_3 (1 - h_1)$ . En el segundo caso, se debe analizar todas las posibles configuraciones en que los enlaces externos de la Fig. 5b satisfacen el criterio (II). Estas combinaciones están representadas en la Fig. 7. Los enlaces ocupados se ilustran con línea gruesa, en cambio los desocupados con una línea delgada.

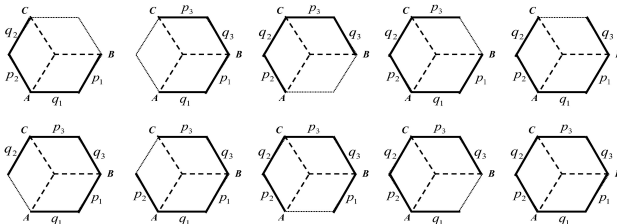


FIGURA 6. Conectividad en enlaces externos de la celda de la red de Dice aplicando el criterio (I): A conecta B y C simultáneamente.

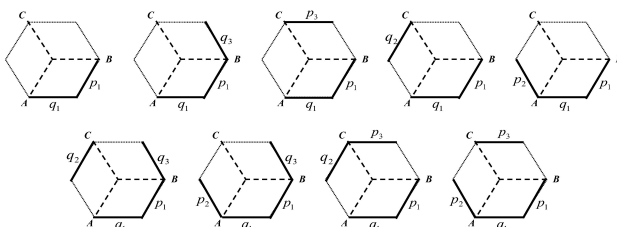


FIGURA 7. Conectividad en enlaces externos de la celda de la red de Dice aplicando el criterio (II): A conecta B, pero no C.

Así para las 9 configuraciones ilustradas en la Fig. 7 se obtiene la siguiente transformación:

$$h_2 h_3 - h_1 h_2 h_3 \rightarrow p_1 q_1 - p_1 p_2 q_1 q_2 - p_1 p_3 q_1 q_3 + p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3, \quad (24)$$

o en forma alternativa

$$h_2 h_3 \rightarrow p_1 q_1 + p_2 p_3 q_2 q_3 - p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3. \quad (25)$$

Otras dos transformaciones pueden obtenerse al utilizar el criterio (II), dado que puede preguntarse alternativamente que A conecte C y no B y luego que B conecte C y no A. Ellas están dadas por

$$h_1 h_3 \rightarrow p_2 q_2 + p_1 p_3 q_1 q_3 - p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3, \\ h_1 h_2 \rightarrow p_3 q_3 + p_1 p_2 q_1 q_2 - p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3. \quad (26)$$

Cuando se realiza el cambio de variables  $t_i = p_i q_i$  en las Ecs. (23)-(26) y se compara con las expresiones obtenidas para la transformación entre la red triangular y hexagonal dadas por las Ecs. (10)-(12) se observa una igualdad, esto significa que la percolación de sitios de la red de Kagomé transforma de acuerdo con la ecuación dada por (14), cuyo umbral de percolación es la Ec. (6) cuando existe simetría de sus enlaces.

Consideremos ahora la Fig. 5c para discutir la percolación de enlaces de la red de Kagomé. El desarrollo que se realiza a continuación fue propuesto por Scullard y Ziff [16], los cuales consideran el proceso inverso al utilizado en el cálculo anterior. Esto significa utilizar la simetría de la doble celda hexagonal y por lo tanto sus enlaces internos deben satisfacer la Ec. (14) escrita de la siguiente manera:

$$u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 - u_1 u_2 v_1 v_2 - u_1 u_3 v_1 v_3 - u_2 u_3 v_2 v_3 + 1 = 0. \quad (27)$$

Usando las transformaciones de los enlaces internos (a la manera hexagonal) a los enlaces externos, mediante las Ecs. (10)-(12), recordando que los  $u_i$  transforman a los  $s_i$  y los  $v_i$  a los  $r_i$  y realizando el álgebra correspondiente, se obtiene la expresión

$$r_1 r_2 r_3 s_1 s_2 s_3 - r_2 r_3 s_1 s_2 s_3 - r_1 r_3 s_1 s_2 s_3 - r_1 r_2 s_1 s_2 s_3 - r_1 r_2 r_3 s_2 s_3 - r_1 r_2 r_3 s_1 s_3 - r_1 r_2 r_3 s_1 s_2 + r_3 s_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_2 s_3 + r_1 s_1 s_2 s_3 + r_1 r_3 s_2 s_3 + r_1 r_2 s_2 s_3 + r_2 r_3 s_1 s_3 + r_1 r_2 s_1 s_3 + r_1 r_2 r_3 s_3 + r_2 r_3 s_1 s_2 + r_1 r_3 s_1 s_2 + r_1 r_2 r_3 s_1 + r_1 r_2 r_3 s_2 - r_1 s_2 s_3 - r_2 s_1 s_3 - r_1 r_2 s_3 - r_2 r_3 s_1 - r_3 s_1 s_2 - r_1 r_3 s_2 - r_2 s_2 - r_1 s_1 - r_3 s_3 + 1 = 0. \quad (28)$$

Considerando ahora que todos los enlaces son iguales a  $r_i = s_i = k$ , se obtiene la ecuación de grado seis, dada por  $k^6 - 6k^5 + 12k^4 - 6k^3 - 3k^2 + 1 = 0$ , cuya solución numérica genera un punto crítico dado por  $k_c = 0.5244297..$  el cual

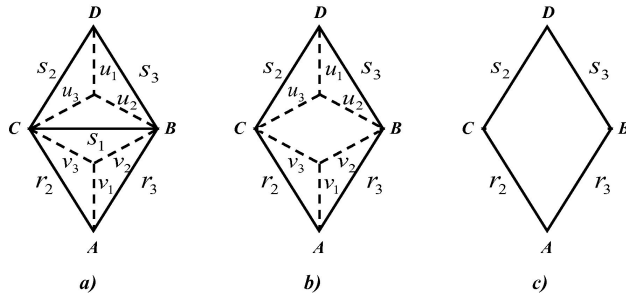


FIGURA 8. a) Red Martini A de enlaces. b) Red Martini A de sitios c) Red cuadrada asimétrica de enlaces.

corresponde al umbral de percolación de enlaces de la red de Kagomé. Dado que la red de enlaces de Dice es dual de la red de Kagomé, de acuerdo a la Fig. 5a, entonces el umbral de percolación de la red de enlaces de Dice es  $d_c = 1 - k_c$ . En la Ec. (28), y suponiendo ahora que el enlace  $r_1 = 0$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} & -r_2 r_3 s_1 s_2 s_3 + r_3 s_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_2 s_3 + r_2 r_3 s_1 s_3 \\ & + r_2 r_3 s_1 s_2 - r_2 s_1 s_3 - r_2 r_3 s_1 - r_3 s_1 s_2 - r_2 s_2 \\ & - r_3 s_3 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

En el caso particular en que los enlaces tengan la misma magnitud de interacción  $r_i = s_i = m$ , se obtiene una ecuación de grado cinco, dada por  $-m^5 + 4m^4 - 3m^3 - 2m^2 + 1 = 0$  que al resolverla numéricamente se obtiene un punto crítico determinado por  $m_c = 0.62545$ , correspondiente al umbral de percolación de enlaces de la red Martini A [15] (Fig. 8a). De la misma manera que antes, cuando se impone que  $s_1 = 0$  en la Ec. (29), se encuentra que

$$-r_2 s_2 - r_3 s_3 + 1 = 0. \quad (30)$$

En el caso particular que  $r_i = s_i = m'$  se determina una ecuación cuadrática dada por  $-2m'^2 + 1 = 0$ , cuyo punto crítico  $m'_c = 1/\sqrt{2}$ , corresponde al umbral de percolación de sitios de la red Martini A (Fig. 8b) [15,16].

Finalmente, con el objetivo de comprobar las transformaciones que dan lugar a la Ec. (21) para la red cuadrada asimétrica de la Fig. 8c, se tiene que los enlaces transforman como

$$s_2 s_3 r_2 r_3 \rightarrow (1 - s_2)(1 - s_3)(1 - r_2)(1 - r_3), \quad (31)$$

obteniéndose la ecuación para sus enlaces:

$$\begin{aligned} & -r_3 s_2 s_3 - r_2 s_2 s_3 - r_2 r_3 s_3 - r_2 r_3 s_2 + s_2 s_3 + r_3 s_3 \\ & + r_2 s_3 + r_3 s_2 + r_2 s_2 + r_2 r_3 - s_3 - s_2 \\ & - r_3 - r_2 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Reemplazando la Ec. (30) obtenida en la Ref. 15 en la Ec. (32), se encuentra:

$$\begin{aligned} & r_3 s_3^2 - r_3 s_2 s_3 - r_2 r_3 s_3 + r_3^2 s_3 + s_2 s_3 + r_2 s_3 + r_3 s_2 \\ & + r_2 r_3 - 2s_3 - s_2 - 2r_3 - r_2 + 2 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Cuando la interacción es la misma y los enlaces  $r_i = s_i = c$ , se obtiene la ecuación cuadrática  $(2c - 1)(c - 1) = 0$ , cuyo punto crítico es  $c_c = 1/2$ , correspondiente al umbral de percolación de enlaces de la red cuadrada, como se ha mencionado anteriormente en este trabajo. Este mismo procedimiento puede realizarse con las Ecs. (16) y (17) obteniéndose el mismo resultado.

### 3. Conclusiones

Se puede concluir de este trabajo, que la metodología mediante el estudio de conectividades para obtener los umbrales de percolación de redes duales es simple y exacto. Mediante transformaciones entre enlaces de redes asimétricas es posible establecer umbrales de percolación de redes planas en las cuales los enlaces no tienen la misma interacción. En el caso de la red cuadrada de enlaces, el umbral de percolación es 0.5, para la cual se han identificado al menos cuatro ecuaciones analíticas Ecs. (18)-(21) que dan cuenta de este punto crítico. Estas ecuaciones presentan una simetría respecto de la transformación  $c = 1 - c'$ , representando la dualidad de la red consigo misma y constituye uno de los aportes de este trabajo. Del mismo modo, se ha validado el umbral de percolación de la red de Kagomé de sitios. El uso de esta técnica permite estudios sobre otras redes arquimedianas y eventualmente en redes cúbicas, tanto de enlaces como sitios, cuyos puntos críticos pueden contrastarse con estudios numéricos o de celdas renormalizadas.

### Agradecimientos

El autor agradece a la Universidad de la Frontera a través del proyecto DIDUFRO DI 09-102 por el apoyo parcial en el desarrollo de este trabajo.

1. S.R. Broadbent y J.M. Hammersley, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957) 629.
2. J.W. Essam, *Rep. Prog. Phys.* **43** (1980) 834.
3. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Fran-

cis, London, 1985).

4. R.M. Ziff y M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 016129.
5. W. Lebrecht y J.F. Valdés, *Rev. Mex. Fís.* **55** (2009) 307.

6. E.T. Gawlinski y H. Eugene Stanley, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981) L291.
7. Youjin Deng y H.W.J. Blöte, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 016126.
8. M.E.J. Newman y R.M. Ziff, *Phys. Rev. E* **64** (2001) 016702.
9. H. Kesten, *Percolation Theory for Mathematicians* (Birkhauser, Boston, 1982).
10. M.Z. Bazant, *Physica A* **316**(2002) 29.
11. E.E. Vogel, W. Lebrecht y J.F. Valdés, *Physica A* **389** (2010) 1512.
12. F.W. Wu, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **12** (1979) L645.
13. M.F. Sykes y J.W. Essam *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1117.
14. B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns* (Freeman, New York, 1987).
15. C.R. Scullard y R.M. Ziff, *Phys. Rev. E* **73** (2006) 045102.
16. R.M. Ziff, *Phys. Rev. E* **73** (2006) 16134.