

# Radiación de Hawking

J. M<sup>a</sup> Fernández Cristóbal  
 RIES Jovellanos, Gijón, Asturias, España,  
 e-mail: jmariafc@educastur.princast.es

Recibido el 22 de junio de 2010; aceptado el 3 de septiembre de 2010

Con un enfoque fundamentalmente didáctico se pretende dar una amplia visión de la denominada radiación de Hawking de los agujeros negros, lo que implica una pequeña introducción a la cuantización en espacios curvos. Se señalan dos de los principales métodos de obtener el espectro de la radiación: el original, debido a Hawking, y el conocido por *efecto túnel*. Así mismo, se hace extensión del segundo mecanismo para la obtención de radiación en otro tipo de horizontes: concretamente para el horizonte aparente asociado a la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Se señala alguna objeción surgida recientemente a la derivación por este método y, finalmente, se hace una breve discusión sobre el método de Gibbons-Hawking

*Descriptores:* Cuantización en espacios curvos; radiación de Hawking; efecto túnel; horizonte aparente.

The aim of this article is to provide a general analysis of the so-called Hawking radiation in black holes from a didactic perspective, including a brief introduction to quantization in curved spacetime. Two main methods for obtaining the radiation spectrum are explained: the original one due to Hawking and the tunneling method. Also, it is shown how the second mechanism can be extended to obtain the radiation spectrum in a different kind of horizon, that associated to the Friedmann-Robertson-Walker metric. Finally, some recent objections to the derivation by the tunneling method are mentioned.

*Keywords:* Quantization on curved spacetime; Hawking radiation; tunneling method; apparent horizon.

PACS: 01.30.Bb; 04.70.Dy; 04.62+v

## 1. Introducción

En la Ref. 1 Bekenstein expresa la desazón que le producía la violación del segundo principio de la termodinámica que se verificaba en un experimento mental que el gran físico Wheeler, entonces su director de tesis, le expuso en 1971. Dicho experimento, grosso modo, puede establecerse de la siguiente forma:

Mezclemos una taza de te caliente con una de agua fría creando así entropía. Arrojemos la mezcla a un agujero negro y habremos hecho desaparecer, junto con la mezcla, la entropía creada puesto que no hay forma de verificar el cambio producido a partir de los tres parámetros (masa,  $M$ , carga,  $Q$ , y momento angular,  $J$ ) que, por el denominado *Teorema de Unicidad* (también conocido como el de *Ausencia de cabello*) [2,3] de Carter-Robinson, sabemos que definen todo agujero negro. La respuesta a su inquietud fue dada por Bekenstein asignando entropía propia a los agujeros negros. Pensó que la entropía de un agujero negro debía ser, en principio, una función de los observables  $M$ ,  $Q$  y  $J$  con las propiedades adecuadas entre las que debería figurar, naturalmente, que fuese una función no decreciente como sucede para la entropía de cualquier sistema físico aislado. En 1970, Christodoulou, Floyd y Penrose habían proporcionado fuertes indicaciones de que, al menos clásicamente, el área del *horizonte de un agujero negro* (la superficie que delinea los puntos de no retorno, traspasada la cual nada puede salir) no podía decrecer, pero fue finalmente Hawking [4] el que estableció de forma rigurosa el denominado *Teorema del área* que puede establecerse en los siguientes términos:

Si el tensor energía-impulso  $T_{\mu\nu}$  satisface la condición

*débil de energía*  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$  para todo  $v^\mu$  de tipo tiempo o nulo y asumiendo como cierta la conjetura de censura cósmica<sup>i</sup>, entonces el área del horizonte de sucesos de un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función no decreciente del tiempo.

Consecuentemente Bekenstein propuso que la entropía del agujero negro,  $S_{BH}$ , debería ser una función real, positiva y monótonamente creciente del área del horizonte,  $A$ . La elección más sencilla compatible con estas condiciones es sencillamente:

$$S_{BH} = C.A, \quad (1)$$

siendo  $C(> 0)$  una constante. De este modo quedaba resuelto el problema propuesto por Wheeler sin tener que asumir la violación del segundo principio de la termodinámica puesto que al caer la taza con la mezcla de te y agua aumentaría el área del agujero negro y consecuentemente, por (1), su entropía de forma que el sistema total que forman la taza con su contenido y el agujero negro tendría (siendo un proceso irreversible) un aumento de entropía. Pero había algo más: hallando la variación de la energía (= masa en unidades naturales,  $G = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ,  $k_B = 1$  que utilizaremos en este artículo, salvo indicación en contra) de un agujero negro y comparándola con la variación de energía de un sistema termodinámico llegó a la conclusión de que los agujeros negros deberían tener temperatura. En efecto, en su tesis doctoral [6] utilizando la, posteriormente denominada, *fórmula de Smarr*:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q, \quad (2)$$

donde  $\kappa$  es la denominada *gravedad superficial* del agujero negro,  $\Phi_H$  su potencial eléctrico superficial y  $\Omega_H$  su veloci-

dad angular y comparándola con la variación de energía de un sistema termodinámico dotado de una energía  $E$ , con un potencial  $\Phi$  y rotando a una velocidad angular  $\Omega$ ,

$$\delta E = T\delta S + \Omega\delta J + \Phi\delta Q, \tag{3}$$

se llega a la obvia conclusión de que los agujeros negros tienen una temperatura:

$$T_{BH} = C^{-1} \frac{\kappa}{8\pi}. \tag{4}$$

Esta conclusión (y en general lo que posteriormente se conoció como *Termodinámica de los Agujeros Negros*) no fue aceptada por, si no la mayoría, sí los más reputados físicos relativistas puesto que el hecho de que un agujero negro tuviese su propia temperatura y se comportase como un sistema termodinámico implicaba necesariamente que debería radiar para alcanzar el equilibrio termodinámico y se sabía que, si bien un agujero negro engullía cualquier cosa, nada podía escapar del mismo. A lo sumo, lo que estos físicos estaban dispuestos a aceptar era la mera analogía matemática de la entropía y la temperatura de un sistema termodinámico con el área y la gravedad superficial, respectivamente, de un agujero negro. Como señala Bekenstein en la Ref. 1, es curioso que el artículo “The Four Laws of Black Hole Mechanics” [7] escrito por Bardeen, Carter y Hawking contra esta interpretación termodinámica, sea citado frecuentemente como una de las piedras angulares de la termodinámica de los agujeros negros. Con respecto a este punto quizás sea conveniente citar el texto que aparece en la introducción del citado artículo [7]:

*“Of particular interest are the area  $A$  of the event horizon and the “surface gravity”  $\kappa$ , which appear together. These have strong analogies to entropy and temperature respectively. Pursuing this analogy we are led in Sec. 4 to formulate four laws of black hole mechanics which are similar to, but distinct from, the four laws of thermodynamics.”*

Y, por si quedase alguna duda, más adelante se dice:

*“It should however be emphasized that  $(\kappa/8\pi)$  and  $A$  are distinct from the temperature and entropy of the black hole.”*

Entre los que se opusieron de forma más decidida a las conclusiones de Bekenstein estaba, como ya se sugirió, Hawking. En septiembre de 1973, Hawking visita Moscú y allí coincide con Yakov B. Zel’dovich y su estudiante A. Starobinsky quienes están convencidos de que, si se tienen en cuenta aspectos cuánticos, los agujeros negros en rotación deben radiar hasta que se detiene su movimiento de rotación. Dada la reputación de Zel’dovich parece ser que los argumentos de éste convencieron a Hawking, si bien no le gustó demasiado el tratamiento matemático que Zel’dovich y Starobinsky hacían del tema [5,8]. A su vuelta a Cambridge, Hawking se propuso seguir su propio camino matemático y, ¡¡sorpresa!!, en un trabajo seminal [9] llegó a la conclusión de que los agujeros negros efectivamente radian aun después de haberse desprendido de su momento angular y lo hacen a un ritmo estacionario y con un espectro térmico; es decir, como lo haría un cuerpo caliente a una temperatura dada. Desde

entonces la radiación de un agujero negro se conoce como *radiación de Hawking* y ha sido obtenida de diversas maneras y por distintos métodos, algunos de los cuales han sido extendidos a otras métricas distintas de la de los agujeros negros como el universo de Friedman-Robertson-Walker (FRW). En este artículo se pretende abordar desde un punto de vista fundamentalmente didáctico, y con todo el rigor del que el autor sea capaz, los dos más aceptados métodos de obtención de la radiación de Hawking, subrayando las características más esenciales de cada uno de ellos. También se hará mención de cómo se aplicó alguno de los métodos para derivar la radiación en horizontes cosmológicos. Finaliza el artículo haciendo referencia a unos trabajos recientes que cuestionan la derivación conocida como de efecto túnel y haciendo un esbozo del método Gibbons-Hawking.

## 2. Cuantización en espacios curvos

El punto de partida de Hawking para derivar la radiación de los agujeros negros es semiclásico. Sabemos que los agujeros negros son una de las soluciones de las *ecuaciones de Einstein* (sin constante cosmológica):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Huérfanos de una teoría cuántica de la gravedad (esta situación aún persiste), Hawking incorporó el aspecto cuántico al miembro de la derecha de la ecuación suponiendo que el *tensor energía-impulso*  $T_{\mu\nu}$  es el valor esperado de vacío de algún operador  $\hat{T}_{\mu\nu}$  para los campos de radiación-materia. Los campos  $\varphi$  (escalares por simplicidad) verifican la *ecuación de Klein-Gordon*:

$$(g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - m^2)\varphi = 0 \tag{6}$$

que se deriva de la acción

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \varphi \nabla_{\nu} \varphi + m^2 \varphi^2),$$

donde  $g_{\mu\nu}(x)$  es la métrica del espacio-tiempo,  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y  $\nabla_{\mu}$  es la *derivada covariante* con

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu})\varphi. \tag{7}$$

Se trata, pues, de trabajar con campos cuánticos en un espacio-tiempo curvo. Y a la hora de cuantizar los mismos por el procedimiento estándar es donde surge el primer problema:

En un espacio-tiempo plano con una *métrica de Minkowski*:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  los campos cuánticos tienen una descomposición, en función de los operadores de aniquilación y de creación  $(a, a^{\dagger})$ , de la forma

$$\varphi(x) \approx \sum_k [f_k(x)a_k + f_k^*(x)a_k^{\dagger}] \tag{8}$$

siendo los denominados modos de frecuencia positiva,  $f_k(x)$ , y negativa,  $f_k^*(x)$ , soluciones de la Ec. (6). Para un espacio-tiempo curvo con una métrica dependiente del tiempo en general,  $g_{\mu\nu}(x)$ , se seguiría verificando la Ec. (6) pero no sería

posible una única descomposición de la forma (8) por cuanto las frecuencias positivas y negativas no tienen un significado invariante. Dado que las partículas son definidas como oscilaciones de frecuencia positiva de los campos con respecto al tiempo propio del observador, quiere esto decir que dos observadores distintos medirán un número distinto de partículas. Tendríamos, por tanto, diferentes construcciones del *espacio de Fock* basadas en diferentes nociones de frecuencia positiva que no son unitariamente equivalentes, puesto que en el caso de métrica curva no tenemos la invariancia bajo transformaciones de Poincaré que, junto a la covarianza general de la teoría bajo las mismas, que se verifica en el espacio-tiempo de Minkowski, implican que todos los observadores inerciales estén de acuerdo en el número de partículas contenidas en un campo cuántico que se encuentra en un estado dado y, en particular, estarán de acuerdo en lo que es el *vacío de Fock* entendido como el estado en el que el número de partículas es cero. Y esto es así debido a que las transformaciones de Poincaré dejan invariante el tiempo propio y por tanto el vacío. Siempre que se produzca la ruptura de tal invarianza, como sucede aun en espacios no curvos como, por ejemplo, en el denominado *efecto Schwinger*, donde un término de acoplo a un campo dependiente del tiempo es el causante de tal ruptura por violarse la invariancia bajo traslaciones del espacio-tiempo [10], tendremos una situación en la que dos observadores diferentes medirán distinto número de partículas contenidas en cualquier estado y en particular en el vacío que, por otra parte, en este caso no tiene porqué ser auto-estado del hamiltoniano<sup>ii</sup>. Al no haber en el espacio-tiempo curvo en general un parámetro similar al tiempo propio (invariante) tenemos otras dificultades añadidas como la siguiente: cualquier coordenada de tipo tiempo definida, quizás, sólo localmente es tan válida como cualquier otra para definir o medir las excitaciones (partículas) del campo o decidir si una cierta magnitud se conserva localmente o no pero tendremos serias dificultades a la hora de decidir si esa magnitud se conserva globalmente o no porque, abusando del lenguaje, podemos decir que en los espacios-tiempo curvos no hay, en general, un parámetro que sea una función global del tiempo. En estas condiciones, magnitudes como, por ejemplo, el vector energía-momento,  $P^\mu$ , pierden todo su significado físico. Sin embargo hay excepciones a este comportamiento en cierta clase de variedades espacio-temporales. Estas son las llamadas variedades *globalmente hiperbólicas* [16] que se caracterizan, a efectos de lo que nos interesa aquí, por poseer una familia de superficies de Cauchy  $\zeta_t$ <sup>iii</sup> que nos permite considerar la variedad como el producto

$$M = R \times \zeta_t$$

y, además, predecir lo que sucederá en  $M$  a partir de datos en  $\zeta_t$ . Podemos, en consecuencia, formular una teoría cuántica con buen comportamiento sobre toda la variedad globalmente hiperbólica,  $M$ , si podemos seguir el proceso usual de cuantización canónica sobre  $\zeta_t$ . Supongamos que este es realmente nuestro caso.

Para cuantizar el campo por el procedimiento canónico,

en primer lugar definimos el momento canónico en un tiempo fijo  $x^0$  asociado al campo  $\varphi(x)$  como

$$\begin{aligned} \pi(x^0, \vec{x}) &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\varphi(x^0, \vec{x}))} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu 0}\partial_\mu\varphi(x^0, \vec{x}) = \sqrt{\hbar}n^\mu\partial_\mu\varphi(x^0, \vec{x}), \end{aligned}$$

siendo  $L$  la densidad lagrangiana,  $n^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$ , un vector unidad normal a la superficie  $x^0=Cte$  y  $h$  el determinante de la métrica espacial inducida. A continuación exigimos que se verifiquen las *relaciones de conmutación canónicas a igual tiempo*<sup>iv</sup>:

$$[\hat{\varphi}(x^0, \vec{x}), \hat{\pi}(x^0, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (9)$$

También podemos exigir que las soluciones complejas de la Ec. (6)  $\{f_i(x)\}$  formen una base ortonormalizada con la norma dada por el denominado *producto interno de Klein-Gordon* definido por

$$\begin{aligned} \langle f_i(x) | f_j(x) \rangle &= \int_\zeta dS_\mu j^\mu \\ &= i \int_\zeta d^3\vec{x} \sqrt{-g}n^\mu f_i^* \overleftrightarrow{\nabla}_\mu f_j(x), \quad (10) \end{aligned}$$

siendo  $\zeta$  una determinada (en la que  $t$  toma un valor dado) superficie de Cauchy<sup>v</sup> y siendo la corriente,  $j^\mu$ , localmente conservada ( $\partial_\mu j^\mu = 0$ ), su integral

$$\int_\zeta d\vec{x} \sqrt{\hbar}n^\mu j_\mu$$

( $h$  es el determinante de la métrica inducida sobre  $\zeta$ ) será constante. Se verificarán entonces las siguientes relaciones:

$$\langle f_i | f_j \rangle = -\langle f_i^* | f_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle f_i^* | f_j \rangle = 0 \quad (11)$$

El campo puede entonces expresarse como

$$\varphi(x) \simeq \sum_i [f_i(x)a_i + f_i^*(x)a_i^\dagger], \quad (12)$$

siendo los operadores de creación y aniquilación definidos por

$$a_i = \langle f_i(x) | \varphi \rangle, \quad a_i^\dagger = -\langle f_i^*(x) | \varphi \rangle \quad (13)$$

Es evidente por otra parte que las relaciones (11) junto a la exigencia de que se verifique (9) conducen a las siguientes *relaciones de conmutación* para los operadores de creación y aniquilación:

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad [a_k, a_j^\dagger] = i\delta_{jk}. \quad (14)$$

El *vacío* es definido como el estado  $|0\rangle$  tal que

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \forall \quad i, \quad (15)$$

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1, \quad (16)$$

y a partir de él podemos definir el espacio de Fock

$$\{|0\rangle, a_i^\dagger |0\rangle, a_i^\dagger a_i^\dagger |0\rangle, a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle, \dots\}$$

que constituirá el *espacio de Hilbert* del sistema.

En un espacio-tiempo general no hay una elección preferida de las bases  $\{f_i(x)\}$ . Cualquier otra base  $\{u_i(x)\}$  puede ponerse como combinación lineal de la anterior de la forma

$$u_i(x) = \sum_j \{A_{ij} f_j(x) + B_{ij} f_j^*(x)\}, \quad (17)$$

donde los A y B son los denominados *coeficientes de Bogoliubov* y, debido a las condiciones de ortonormalidad y a la invertibilidad de ambas bases, estos deben verificar las relaciones [15,16]

$$AA^\dagger - BB^\dagger = 1, \quad (18)$$

$$AB^T - BA^T = 0, \quad (19)$$

$$A^\dagger A - B^T B^* = 1, \quad (20)$$

$$A^\dagger B - B^T A^* = 0. \quad (21)$$

Por tanto, el campo  $\varphi(x)$  puede expresarse en la nueva base como

$$\varphi(x) \approx \sum_i \{u_i(x) b_i + u_i^*(x) b_i^\dagger\}, \quad (22)$$

y donde los nuevos operadores de aniquilación y creación están relacionados con los anteriores mediante la denominada *transformación de Bogoliubov* (en notación matricial):

$$b = A^* a - B a^\dagger. \quad (23)$$

Dadas estas relaciones, los nuevos operadores de aniquilación y creación verifican las mismas relaciones de conmutación que los antiguos ( $[b_i, b_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$   $[b_i, b_j^\dagger] = i\delta_{ij}$ ).

Sin embargo obviamente su vacío ya no es el de aquellos. Es decir,  $b_k |0\rangle \neq 0$ . En definitiva lo que sucede es que, dado que los operadores de creación y aniquilación dependen, por definición, de la base elegida, como puede verse a partir de la Ec. (13), tenemos distintos vacíos y, además en este caso, no podemos hacer uso de las transformaciones de Poincaré (bajo la cual el vacío es invariante) como sucede en un espacio-tiempo de Minkowski. El observador cuyo tiempo propio es el asociado a la nueva base  $\{u_i\}$  contará para  $|0\rangle$  un número de partículas para cada modo k que viene dado por (haciendo uso de (23))

$$\langle N_k \rangle = (B^\dagger B)_{kk} \quad (24)$$

y el número total de partículas está dado por

$$\langle 0 | \sum_k b_k^\dagger b_k | 0 \rangle = Tr(B^\dagger B).$$

La pregunta que procede inmediatamente es: ¿qué criterio seguir para elegir la base más adecuada a nuestros propósitos? En un *espacio-tiempo estacionario*, que se define por poseer una familia continua de traslaciones temporales que

conservan la geometría del espacio-tiempo y generadas por el denominado *vector de Killing*,  $k$ , definido por la condición de que la *derivada de Lie* (a lo largo de dicho vector) de la métrica es nula:  $\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0^{vi}$  podemos elegir la base, (una base), por ejemplo la denominada  $\{u_i(x)\}$ , de acuerdo con el criterio de que los modos que la forman tengan frecuencia (energía) positiva con respecto al tiempo definido por el vector de Killing temporal,  $k^\mu$ . Es decir, que sean autofunciones del operador de Killing temporal:

$$k^\mu \partial_\mu u_i = -i\omega_i u_i \quad \text{con } \omega_i \geq 0 \quad (25)$$

Dada la conmutatividad de  $k = k^\mu \partial_\mu$  con  $\nabla^2$  y dado que  $\{u_i(x)\}$  es solución de la ecuación de Klein-Gordon,  $k u_i(x)$  también lo será. En este caso el estado de vacío,  $|\text{vac}\rangle$  (definido por  $b_j |\text{vac}\rangle = 0 \quad \forall j$ ), sí es autoestado del hamiltoniano y además es el estado de más baja energía (ver la nota ii).

### 3. Radiación de Hawking

Después de este preludeo matemático estamos en condiciones de derivar la radiación de Hawking. Evidentemente hay muchos textos, además del original [9], lógicamente, que pueden consultarse para estudiar la misma. Remito al lector a las citas Refs. 15 a la 18. Otras derivaciones, a partir de matrices densidad, pueden encontrarse en las Refs. 19 y 20.

El efecto Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero negro formado por colapso gravitacional. El proceso que da lugar a la misma puede considerarse que se produce de la siguiente forma:

En la inmediatez externa del horizonte de sucesos del agujero negro, debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío, se crean pares de partículas virtuales (partícula-antipartícula). La antipartícula con energía negativa, que se encuentra en una región clásicamente prohibida, puede, sin embargo, por efecto túnel, atravesar la barrera de potencial del horizonte de sucesos y caer al interior del agujero negro con una probabilidad que depende de la gravedad superficial  $\kappa$  definida por  $\kappa^2 = -(1/2) \nabla^\mu k^\nu \nabla_\mu k_\nu |_{hor}$ . Ésta es constante y es la magnitud que mide cuán rápidamente el vector de Killing,  $k^\mu$  (el generador de las traslaciones temporales), se vuelve de género espacio.

En el interior del agujero negro, el vector de Killing es de género espacio y la partícula virtual se convierte en una partícula real con un cuadrimomento de género tiempo. La otra componente del par no puede aniquilarse con su compañera y escapa al infinito constituyendo así el flujo de radiación observado en el infinito.

Podemos considerar el espacio-tiempo asociado al proceso como la unión de tres subespacios de la siguiente forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{in} \cup \mathcal{E}_{bh} \cup \mathcal{E}_{out}$  (ver Fig. 1), donde  $\mathcal{E}_{in}$  y  $\mathcal{E}_{out}$  son espacios-tiempo estacionarios (de hecho podemos considerarlos espacios de Minkowski en el infinito asintótico) asociados al exterior del agujero negro con vacíos respectivos  $|0_{in}\rangle$  y  $|0_{out}\rangle$  y  $\mathcal{E}_{bh}$  es un espacio-tiempo no estacionario correspondiente al interior del agujero negro. Cabría pensar

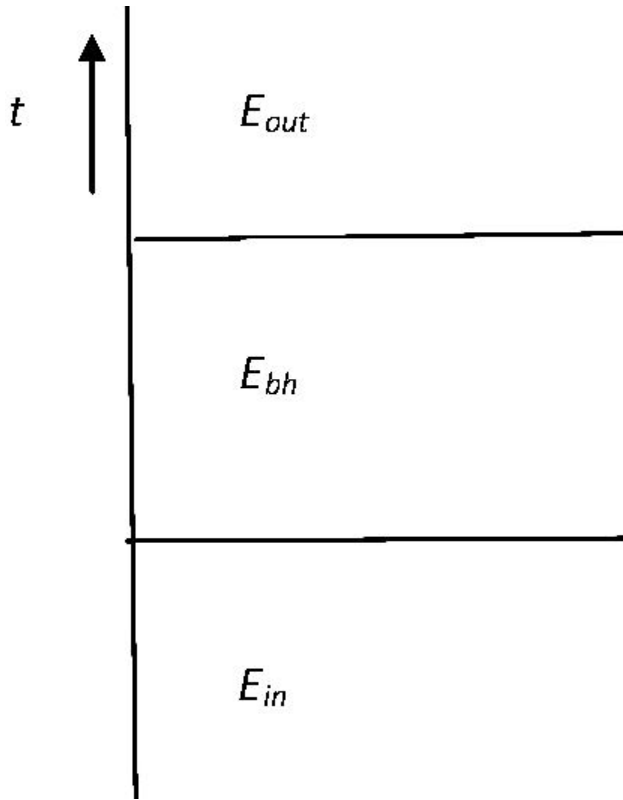


FIGURA 1.

que, puesto que en el infinito asintótico temporal antes y después de la formación del agujero negro ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) el espacio-tiempo es estacionario, el fenómeno de creación de partículas fuese un fenómeno transitorio que dura lo que tarda la estrella en convertirse en agujero negro y que además el mismo fuese un proceso dependiente de los detalles del colapso. Sin embargo, debido a la presencia del horizonte de sucesos y lo que esto implica en relación a la dilatación temporal, el fenómeno es de hecho permanente (al menos hasta que el agujero negro se evapora) y además es independiente de los detalles del colapso.

Supongamos que el agujero negro es de tipo Schwarzschild y que por tanto la métrica en el exterior del mismo es la correspondiente a un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (26)$$

Consideremos por simplicidad un campo escalar  $\varphi$  en esta métrica. Éste verificará la ecuación de Klein-Gordon (6):

$$\left[ -\frac{1}{f(r)}\partial_t^2 + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f(r)\partial_r) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta}\partial_\Omega^2 - m^2 \right] \varphi = 0, \quad (27)$$

siendo

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad \text{y} \\ \partial_\Omega^2 = \partial_\theta(\text{sen}\theta\partial_\theta) + \partial_\phi^2.$$

Sin embargo en la proximidad del *horizonte de sucesos*,  $r_H$ , (definido por la condición  $f(r_H) = 0$ ) podemos despreciar algunos términos y obtener una ecuación de ondas bidimensional que genera ondas planas en el plano  $(t, r^*)$  siendo  $r^*$  la denominada *coordenada radial de Reege-Wheeler* definida por  $dr^* = dr/f(r)$ . En efecto, la Ec. (27) puede expresarse en la forma

$$-\partial_t^2\varphi + \partial_{r^*}^2\varphi + f(r)\left[\frac{2}{r}\partial_{r^*}\varphi + \frac{\partial_\Omega^2}{r^2 \text{sen}\theta}\varphi - m^2\varphi\right] = 0, \quad (28)$$

y es claro entonces que, teniendo en cuenta que  $f(r_H) = 0$ , podemos despreciar los 3 últimos términos en la proximidad del horizonte de sucesos ( $r \rightarrow r_H$ ) y quedarnos con la ecuación

$$-\partial_t^2\varphi + \partial_{r^*}^2\varphi = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = 0, \quad (29)$$

cuya solución general es

$$\varphi = \Xi(u) + \Upsilon(v), \quad (30)$$

donde  $u = t - r^*$  y  $v = t + r^*$  son las llamadas *coordenadas radiales nulas saliente y entrante*, respectivamente, y con respecto a las cuales la métrica (26) pasa a ser de la forma

$$ds^2 = -f(r)dudv + r^2 d\Omega^2.$$

Es claro que para geodésicas radiales nulas ( $ds^2=0, d\Omega^2=0$ ) las coordenadas radiales nulas  $(u, v)$  son constantes.

Si escogemos que  $\varphi$  sea autofunción del vector de Killing  $\partial_t$  (es evidente que para este tipo de métricas  $(\partial g_{\mu\nu}/\partial t) = 0$ ) con frecuencia  $\omega$  positiva, como se comentó anteriormente, (Ec. (25)), podemos tomar

$$\varphi(t, r^*) = e^{-i\omega t} R(r^*), \quad (31)$$

y evidentemente de (29) se deduce

$$-\omega^2 R(r^*) = \frac{d^2 R(r^*)}{dr^{*2}}$$

cuya solución es

$$R(r^*) = e^{\pm i\omega r^*}, \quad (32)$$

con lo que obviamente las soluciones más generales de la Ec. (29) son

$$\varphi_\omega(u) = e^{-i\omega u}, \\ \varphi_\omega(v) = e^{-i\omega v}. \quad (33)$$

Es claro que las Ec. (29) pueden expresarse, respectivamente, de la forma

$$\begin{aligned} \partial_u \varphi_\omega(v) &= 0, \\ \partial_v \varphi_\omega(u) &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

las cuales expresan condiciones de chiralidad (holomorfía), por lo que suelen denotarse las soluciones con los superíndices L y R para las soluciones  $\varphi_\omega(v)$  y  $\varphi_\omega(u)$ , respectivamente [21] (Fig 2). La solución más general de la ecuación para el campo será de la forma (8) o (22) con  $f_i \doteq \varphi_\omega(v) = e^{-i\omega v}$  y  $u_i \doteq \varphi_\omega(u) = e^{-i\omega u}$ . Es decir,

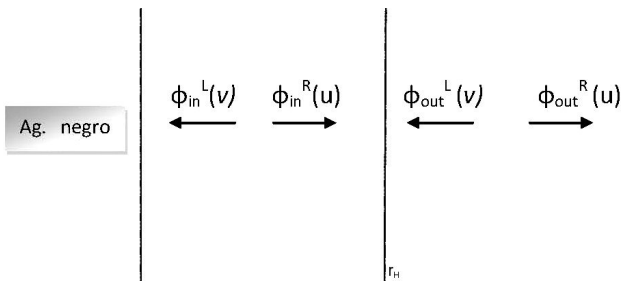


FIGURA 2.

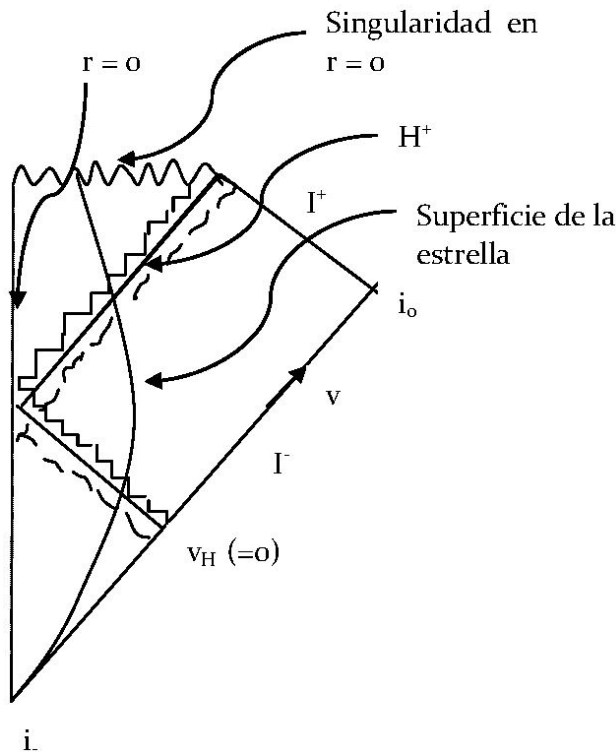


FIGURA 3. Trayectoria clásica o de fase estacionaria de un par producido en la vecindad del horizonte de sucesos de un agujero negro esféricamente simétrico producido por colapso gravitatorio de una estrella (diagrama de Carter-Penrose). Sólo el miembro que alcanza  $\Gamma^+$  se convierte en partícula real (línea ondulada discontinua). El compañero (línea quebrada) cae en la singularidad.

$$\varphi = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} [a_\omega e^{-i\omega v} + a_\omega^\dagger e^{i\omega v}] \quad (35)$$

o

$$\varphi = \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} [b_{\omega'} e^{-i\omega' u} + b_{\omega'}^\dagger e^{i\omega' u}]. \quad (36)$$

El mecanismo de la radiación podemos visualizarlo de la siguiente forma: en el pasado infinito nulo  $\mathfrak{S}^-(r \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty, v \text{ finito})$ , antes de que la estrella comience a colapsar, escogemos un vacío  $|0_{in}\rangle$  (que puede ser el de Minkowski, pues estamos trabajando con métricas asintóticamente planas). Fijamos la condición de contorno de que los modos que se propagan a partir de  $\mathfrak{S}^-$  sean de la forma  $e^{-i\omega v}$  (más bien paquetes de onda que sean combinación lineal de los mismos). Éstos se propagan y se dirigen hacia la estrella colapsante que supondremos ya ha devenido en agujero negro. Una parte del paquete de ondas será difundida por el campo gravitatorio del agujero negro y finalizará en  $\mathfrak{S}^-$  sin experimentar ningún cambio de frecuencia. La parte restante se propagará paralelamente al *horizonte de sucesos pasado* ( $\mathcal{H}^-$ ) (el contorno del futuro causal de  $\mathcal{I}^-$ ) definido por  $v_H (= 0 \text{ por comodidad})$  y será absorbida por el horizonte del agujero negro. La radiación de Hawking provendrá de estos modos que penetran en la estrella colapsante (agujero negro), pero no de todos ellos. Algunos modos serán adsorbidos por la singularidad y otros (los que se reflejan en  $r = 0$  en un tiempo finito de Schwarzschild  $v < 0$  adquiriendo una dependencia de  $u, \Phi_\omega(u)$ ) serán difundidos y alcanzarán  $\mathfrak{S}^+(r \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, u \text{ finito})$  (ver Fig. 3). Es esta parte la que produce los efectos de más interés. Supondremos que los modos de onda saliente  $\Phi_\omega(u)$  cumplen la condición de contorno

$$\Phi_\omega \xrightarrow{\mathfrak{S}^+} e^{-i\omega u}$$

Para calcular los coeficientes de Bogoliubov definidos por la Ec. (17) se necesita por tanto, digamos, emparejar los modos  $\Phi_\omega(u)$  (pero no todos: sólo los que finalmente alcanzan  $\mathfrak{S}^+$ ) con los  $e^{-i\omega v}$  y sólo en la proximidad del horizonte de sucesos. Puesto que sobre  $\mathfrak{S}^-$  las ondas de fase constante se acumularán rápidamente, próximas al horizonte de sucesos y para un observador sobre la estrella colapsante, deberían tener un gran desplazamiento al azul debido a que el tiempo que dura el proceso de colapso gravitatorio es mucho mayor que el de Schwarzschild, por lo que está plenamente justificada la aproximación de la óptica geométrica (pequeñas longitudes de onda). Con todos estos ingredientes los coeficientes de Bogoliubov que en una nueva notación son

$$A_{\omega\omega'} \doteq \tilde{\varphi}_\omega(\omega')$$

y

$$B_{\omega\omega'} \doteq \hat{\varphi}_\omega(\omega'),$$

siendo

$$\Phi_\omega(v) = \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} [\tilde{\varphi}_\omega(\omega') e^{-i\omega' v} + \hat{\varphi}_\omega(\omega') e^{i\omega' v}], \quad (37)$$

pueden calcularse tomando las transformadas de Fourier en las anteriores expresiones:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\omega(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega'v} \Phi_\omega(v), \\ \hat{\varphi}_\omega(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega'v} \Phi_\omega(v). \end{aligned} \quad (38)$$

Obtener la expresión de  $\Phi_\omega(v)$  próxima a  $\mathfrak{S}^-$  que se corresponde con  $\Phi_\omega(u)$  con las condiciones de contorno impuestas sobre esta última es un proceso algo tedioso que no abordaremos [9,11,15,-18].

El resultado es

$$\Phi_\omega(v) = \begin{cases} e^{\frac{i\omega}{\kappa} \log(-v)} & \text{si } v < 0, \\ 0 & \text{si } v > 0. \end{cases} \quad (39)$$

Así pues los coeficientes de Bogoliubov son

$$\begin{aligned} A_{\omega\omega'} &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi_\omega(v) e^{i\omega'v} = \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(-v)} \\ &\stackrel{v \rightarrow -v}{=} \int_0^{\infty} dv e^{-i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(v)} \end{aligned} \quad (40)$$

y

$$B_{\omega\omega'} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi_\omega(v) e^{-i\omega'v} = \int_0^{\infty} dv e^{i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(v)}. \quad (41)$$

Estos coeficientes verifican las siguientes propiedades:

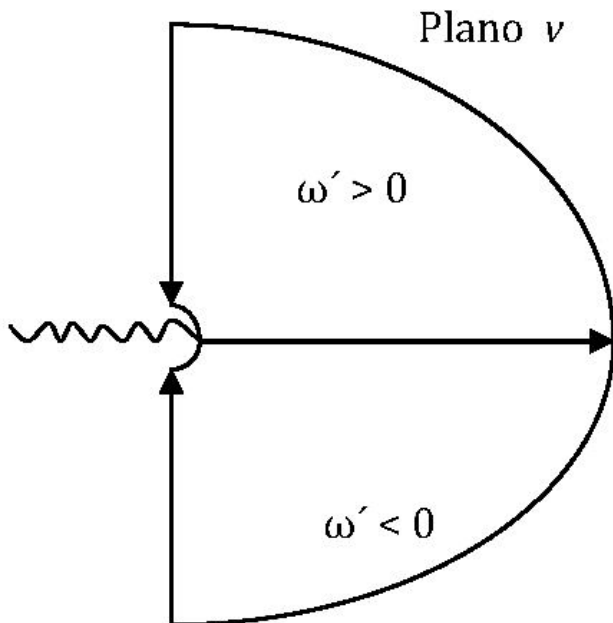


FIGURA 4.

$$B_{\omega\omega'} = A_{\omega(-\omega')}, \quad (42)$$

$$B_{\omega\omega'} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} A_{\omega\omega'}. \quad (43)$$

La primera propiedad es evidente a partir de las definiciones. Para demostrar la segunda podemos integrar sobre el plano complejo  $v$  a lo largo del contorno de la Fig. 4. Para  $\omega' > 0$  se verifica:

$$\begin{aligned} B_{\omega\omega'} &= \int_0^{\infty} dv e^{i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(v)} \\ &= - \int_{\infty}^0 (idx) e^{-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \log(ix)} \xrightarrow{x \rightarrow iv} \\ &= - \int_{\infty}^0 -dv e^{-i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(-v)} \\ &= - \int_0^{\infty} dv e^{-i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(ve^{i\pi})} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} A_{\omega\omega'} \end{aligned}$$

Estamos ya en condiciones de calcular, de acuerdo con la Ec. (24), el espectro de partículas que observaría un observador en el infinito asintótico plano. Éste puede calcularse a partir de las relaciones (18)-(21) y de la propiedad (43). Así haciendo uso de la propiedad (18) (consideramos, por simplicidad, espectro discreto):

$$\begin{aligned} \sum_{\omega''} A_{\omega\omega''} A_{\omega'\omega''}^* - B_{\omega\omega''} B_{\omega'\omega''}^* \\ = \delta_{\omega\omega'} \Rightarrow (e^{\frac{\pi}{\kappa}(\omega+\omega')} - 1) \sum_{\omega''} B_{\omega\omega''} B_{\omega'\omega''}^\dagger = \delta_{\omega\omega'} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\langle N_\omega \rangle = (BB^\dagger)_{\omega\omega} = (B^\dagger B)_{\omega\omega} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}. \quad (44)$$

Esta expresión nos da el número de partículas creadas en el modo de frecuencia  $\omega$  que ve el observador en el infinito lejano, supuesto que todas las partículas entrantes son capaces de atravesar el horizonte de sucesos y salir de nuevo (pero ya vimos que esto no es así) y ha sido obtenida para campos escalares (bosones). Pero parece muy claro que si sólo una fracción,  $\Gamma_\omega$ , verifica este proceso, entonces

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} \pm 1},$$

siendo el signo + el correspondiente para fermiones (neutrinos, etc). Esta expresión afirma que el agujero negro tiene un espectro de emisión térmica que se corresponde con una temperatura  $T = (\kappa/2\pi)$ . Para el agujero negro de Schwarzschild, con  $f(r) = 1 - (2M/r)$  y  $\kappa = (1/4M)$  (siendo  $M$  la masa del agujero negro) tenemos, obviamente,

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{1}{e^{8\pi\omega M} - 1}. \quad (45)$$

Puede demostrarse [9] que el espectro obtenido es independiente de la simetría esférica y puede generalizarse a agujeros negros cargados y/o en rotación. Para agujeros negros en rotación, por ejemplo, todo queda igual salvo que hay que reemplazar la frecuencia  $\omega$  por la carga conservada asociada al correspondiente Killing:  $\omega \rightarrow \omega - m\Omega_H$ , siendo  $\Omega_H$  la velocidad angular del horizonte del agujero negro y  $m$  la componente z del momento angular  $l$ .

#### 4. Efecto túnel

Preocupados por las consecuencias que la radiación de Hawking plantea en relación con el llamado *problema de la pérdida de información* (que no abordaremos aquí) cuando el agujero negro se ha evaporado [22], Parikh y Wilczek [23] basándose en la representación de la radiación de Hawking como un fenómeno de efecto túnel, ya vislumbrada por el propio Hawking como vimos en la sección anterior, propusieron una derivación semiclásica de la misma donde la condición de la conservación de la energía total- entendida tal como fue definida por Arnowit, Deser y Misner (ADM) para espacios asintóticamente planos como una integral superficial en el infinito donde  $(\partial/\partial t)$  es un Killing - juega un papel esencial: la masa del agujero negro puede variar pero no la energía total. Esto implica que el proceso de emisión no puede ser exactamente térmico, ya que un espectro de este tipo contiene un extremo de energías arbitrariamente altas y es evidente que un agujero negro aislado no puede radiar mayor energía que su propia masa. Por otra parte hay que señalar que en la derivación de Hawking hay implícita una hipótesis y es que se asume que la masa  $M$  del agujero negro se mantiene constante en el proceso y que la métrica no juega ningún papel dinámico. Pero es evidente que, aunque no tenemos una teoría cuántica de la gravedad que nos indique cómo evoluciona la métrica con la emisión de partículas, sí parece razonable pensar que, al radiar, el agujero negro pierda energía (masa) y si bien para los estadios iniciales es asumible la hipótesis de que la pérdida es muy baja ( $(dM/dt) \ll M$ ), esto ya es más cuestionable para las etapas finales de la evaporación. Éstas consideraciones, entre otras, les llevaron a considerar el agujero negro como un estado cuántico excitado metaestable y donde la geometría del espacio-tiempo juega un papel dinámico en el sentido de que es ésta la que impone la condición de conservación de la energía.

Para describir el proceso necesitaban salvar una primera dificultad técnica, cual era tener un sistema de coordenadas que se comportase bien en el horizonte de sucesos. Tal sistema es el llamado de Painlevé-Gullstrand y posee otra serie de buenas propiedades que más abajo esbozaremos. Definieron el *tiempo Painlevé* como

$$t_P = t + \chi(r), \quad \text{con} \quad \chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

siendo  $t$  la coordenada temporal ordinaria. Entonces la métri-

ca (26) pasa a tener la expresión

$$ds^2 = -f(r)dt_P^2 + 2f(r)\chi'(r)dt_P dr + dr^2 \times \left( \frac{1}{f(r)} - f(r)\chi'^2(r) \right) + r^2 d\Omega^2, \quad (46)$$

$$\chi'(r) = \frac{d\chi}{dr}$$

y se impone además la condición

$$\frac{1}{f(r)} - f(r)\chi'^2(r) = 1 \quad (47)$$

con lo cual la métrica queda (a partir de aquí  $t_P$  es simplemente  $t$  por comodidad de lenguaje)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + 2f(r)\chi'(r)dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (48)$$

Las coordenadas de Painlevé junto con la condición de contorno de  $\chi$  y la condición (47) tienen las siguientes características:

- Ninguna de las componentes de la métrica o sus inversas son singulares en el horizonte.
- Las “rodajas” de tiempo constante son planas en el espacio ( $ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ).
- El generador de  $t$  es un vector de Killing por ser  $\chi(r)$  dependiente de  $r$  únicamente.
- Un observador en el infinito no distingue entre  $t$  y  $t_P$  por la condición de contorno  $\chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ .

Para geodésicas radiales nulas (teniendo en cuenta la condición (47)) tenemos

$$\frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{1 - f(r)}, \quad (49)$$

correspondiendo el signo  $+(-)$  a las geodésicas salientes (entrantes).

La radiación de Hawking se entiende como un proceso túnel de una partícula (suponemos sin masa y que no tiene momento angular) de energía positiva  $\omega$  que cruza el horizonte desde una posición inicial  $r_i$  a una posición final  $r_f$  mientras la masa del agujero negro (en un agujero negro la masa y el radio del mismo están relacionados) desciende de  $M$  a  $M - \omega$ . Y es precisamente esta simple asunción de conservación de energía del sistema lo que salva una de las dificultades conceptuales vislumbrada en el proceso de Hawking: la existencia de la barrera de potencial. Tal barrera no preexiste. Es la propia partícula saliente la que, al provocar la contracción del horizonte, crea la propia barrera [24]. La acción clásica  $I$ , para la trayectoria de la partícula está dada por

$$I = \int_{r_i}^{r_f} dr p_r = \int_{r_i}^{r_f} dr \int_0^{p_r} dp'_r = \int_{r_i}^{r_f} dr \int_M^{M-\omega} \frac{dH}{\dot{r}}, \quad (50)$$



siendo  $p_r$  el momento radial de la partícula ( $p'_r$  es una variable muda, no confundir con una derivada) y donde se ha utilizado la ecuación de Hamilton-Jacobi ( $\dot{r} = (\partial H/\partial p_r)$  siendo  $\dot{r}$  la derivada temporal) para obtener la última igualdad.

Utilizando el cambio de variable  $H = M - \omega$  y utilizando la ecuación de la geodésica radial (49) para partículas salientes (+) se obtiene

$$\int_0^\omega \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{1 - f(r)}} (-d\omega'). \quad (51)$$

Teniendo en cuenta que  $r_i > r_H > r_f$  y que  $f(r_H) = 0$ , esta integral será compleja y asumiendo que la parte imaginaria de la acción puede ser atribuida completamente al residuo del polo, ésta puede calcularse fácilmente tomando  $r - r_H = \varepsilon e^{i\theta}$ . Por ejemplo, para el agujero negro de Schwarzschild con  $f(r) = 1 - (2(M - \omega)/r)$  la integral (51) quedaría para la parte imaginaria ( $\Im$ ) que es la única que nos interesa:

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega \int_{r_f}^{r_i} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r} \pm i\epsilon}} d\omega' \Big|_{r=\sigma^2} \\ & \int_0^\omega d\omega' \int_{\sigma_f}^{\sigma_i} d\sigma \frac{2\sigma^2}{\sigma - \sqrt{2(M-\omega') \pm i\epsilon}} \Rightarrow \Im_{\epsilon \rightarrow 0} \\ & \int_0^\omega d\omega' \int_0^\pi id\theta 2(\sigma_H + \varepsilon e^{i\theta})^2 \\ & = \int_0^\omega d\omega' 4\pi(M - \omega') = 4\pi\omega \left( M - \frac{\omega}{2} \right), \quad (52) \end{aligned}$$

siendo  $\sigma_H = \sqrt{2(M - \omega)}$ . Ésta es la parte que nos interesa porque está relacionada (el factor no es significativo físicamente) con la *tasa de emisión semiclásica* [25]:  $\Gamma \sim e^{-2\Im I}$ . En el caso que nos ocupa ésta es, obviamente,

$$\Gamma \sim e^{-8\pi(M\omega - \frac{\omega^2}{2})}. \quad (53)$$

Comparando esta expresión con la correspondiente obtenida por Hawking para el agujero negro de Schwarzschild, Ec. (45), vemos que físicamente difieren en el factor  $\approx e^{4\pi\omega^2}$  que aparta al espectro derivado por Parikh y Wilczek de la termalidad. La aparición de este término es consecuencia de la hipótesis de conservación de la energía total y está asociada por tanto a la autointeracción del campo gravitatorio que no se tenía en cuenta en la derivación de Hawking.

La técnica usada puede generalizarse a agujeros negros rotantes y cargados. La tasa de emisión para un agujero de carga Q emitiendo radiación sin carga es [23]

$$\Gamma \sim e^{-4\pi[2\omega(M - \frac{\omega}{2}) - (M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]}. \quad (54)$$

También existen generalizaciones para métricas más generales que las del tipo (26) como puede ser

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + (dr^2/g(r)) + r^2d\Omega^2$$

con  $f(r) \neq g(r)$  como se hace en la Ref. 26.

### 5. Radiación de Hawking en un universo de FRW

Parece claro que la existencia de un horizonte de sucesos en el agujero negro es esencial para la existencia de la radiación. Además, en el trabajo de Parikh y Wilczek, el horizonte de sucesos juega un papel dinámico aunque se trate con métricas estáticas. Parece lógico, por tanto, intentar ver si para otras métricas no estáticas o no estacionarias (es decir aquellas que no admiten un vector de Killing generador de una “energía”) donde exista un horizonte de sucesos, existe también radiación de tipo Hawking (térmica) o de distinto tipo. Aplicando el método Parikh-Wilczek, diversos autores [27-30] han demostrado que existe realmente una radiación asociada al *horizonte aparente* localmente definido en un universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), cuya métrica es dinámica (no estacionaria).

La métrica de FRW (la del modelo estándar del Universo) es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2 \right], \quad (55)$$

donde  $a(t)$  es el denominado factor de escala que determina el tamaño físico del universo y  $k = -1, 0, 1$  según se considere un universo abierto, plano o cerrado, respectivamente. Ésta es la métrica más general que satisface los principios de homogeneidad (invarianza bajo traslaciones) e isotropía (invarianza bajo rotaciones) del espacio (*Principio Cosmológico*). Debido a esto, existen una serie de isometrías que hacen que la parte puramente espacial sea un subespacio maximalmente simétrico (admite el mayor número de vectores de Killing).

Si se define  $\rho = a(t)r$ , entonces la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + \rho^2 d\Omega^2 \quad (56)$$

siendo el nuevo tensor métrico

$$h_{ab} = \text{dig}\left(-1, \frac{a^2}{1 - kr^2}\right)$$

y  $x^a = (t, r)$ . Es decir, dadas las condiciones de homogeneidad e isotropía del espacio, podemos describir la variedad 4-dimensional  $(\mathcal{M}, g)$  como el producto de dos espacios 2-dimensionales: uno con la métrica  $h_{ab}$  y otro con la métrica estándar de la esfera 2-dimensional de área  $4\pi\rho^2$  que está asociado a las simetrías del sistema. Así podemos poner  $(\mathcal{M}^4, g) = (Q^2, h) \otimes (S^2, \eta)$ . Se define el *horizonte aparente* como la superficie marginalmente atrapada con expansión

nula<sup>vii</sup>. El valor del radio del mismo, ( $\rho_A$ ), cumple la condición

$$h^{ab}\partial_a\rho\partial_b\rho = 0. \tag{57}$$

Por tanto,

$$-(\partial_t\rho)^2 + \frac{1 - kr^2}{a^2}(\partial_r\rho)^2 = 0 \implies \rho_A = \frac{a}{\sqrt{k + (Ha)^2}}, \tag{58}$$

donde  $H = (1/a)(da/dt)$  es el llamado *parámetro de Hubble*. Vemos que para un Universo plano ( $k=0$ ) el horizonte aparente coincide con el horizonte de Hubble,  $H^{-1}$ , es decir, con el horizonte cosmológico.

En función de las coordenadas  $(t, \rho)$  la métrica (56) resulta ser una métrica de tipo Painlevé-Gullstrand más adecuada, como sabemos, para el estudio del problema que nos ocupa:

$$ds^2 = -\frac{1 - (\frac{\rho}{\rho_A})^2}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} dt^2 - \frac{2H\rho}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} dt d\rho + \frac{d\rho^2}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} + \rho^2 d\Omega^2 \tag{59}$$

Se define el *vector de Kodama* sobre  $\mathcal{Q}$  como el dual de Hodge relativo a la métrica  $h$  del gradiente del radio areal  $\rho$  (que es considerado un campo escalar sobre el espacio normal bidimensional):

$$K^a = -\frac{1}{\sqrt{-\det(h_{ab})}}\epsilon^{ab}\nabla_b\rho, \tag{60}$$

donde a,b = 1,2 se refieren a las componentes del tensor métrico asociado a la métrica (59):

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{1 - (\frac{\rho}{\rho_A})^2}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} & -\frac{H\rho}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} \\ -\frac{H\rho}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} & \frac{1}{1 - k(\frac{\rho}{a})^2} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Por tanto, las componentes del vector de Kodama en función de las bases del espacio bidimensional normal a las esferas de simetría  $\rho$  son [31]

$$K^a = \left(\sqrt{1 - k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}, 0\right) \implies K^2 = h_{ab}K^aK^b = -\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_A}\right)^2\right). \tag{62}$$

Puede generalizarse el vector de Kodama a toda la variedad  $(\mathcal{M}, g)$  definiendo  $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{ab}(dx)_\mu^a(dx)_\nu^b$ . Así utilizaremos como vector de Kodama

$$K^\mu = \left(\sqrt{1 - k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}, \vec{0}\right).$$

Este vector tiene interesantes propiedades que le hacen muy similar al vector de Killing. De hecho el vector de Kodama

define un flujo preferido de tiempo y en este sentido es una generalización del vector de Killing que define un flujo de tiempo para métricas estáticas. Las propiedades del vector de Kodama más importantes son las siguientes:

- Según (62), el vector de Kodama es de género tiempo, nulo o espacio según sea  $\rho < \rho_A$ ,  $\rho = \rho_A$  y  $\rho > \rho_A$ , respectivamente. En el primer caso, el signo - en la definición (60) asegura que  $K^\mu$  está dirigido hacia el futuro.
- $K$  es tangente a las superficies  $\rho$  ( $\rho = \text{Cte}$ ). Es decir,  $K^\mu\nabla_\mu\rho = 0$ .
- $K^\mu$  es una corriente localmente conservada. Es decir,  $\nabla_\mu K^\mu = 0$ . La correspondiente carga conservada (teor. de Noether) es

$$\int_\sigma K^\mu d\sigma_\mu = \frac{4}{3}\pi\rho^3$$

- La densidad energía-momento a lo largo del vector de Kodama definida como  $j^\mu = T^\mu_\nu K^\nu$ , siendo  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento, también es una corriente conservada. Es decir,  $\nabla_\mu j^\mu = 0$ . La correspondiente carga conservada es

$$\int_\sigma j^\mu d\sigma_\mu$$

que es la energía total de la materia más el campo gravitacional.

- Como puede verse a partir de (62), en el espacio asintóticamente plano ( $a \rightarrow \infty, \rho = \text{constante}$ ) el vector de Kodama coincide con el vector de Killing.

$$K = K^\mu\partial_\mu = \sqrt{1 - k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \partial_t$$

(vector de Killing).

- Cuando el vector de Kodama es nulo aparece un *horizonte atrapado* (una hipersuperficie plegada por superficies marginales) exactamente igual que aparece un horizonte de Killing cuando el vector de killing se anula.

Al considerar partículas escalares, éstas han de verificar la *ecuación de Klein -Gordon* (6), siendo  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y  $g_{\mu\nu}$  la métrica (59) de FRW. En la aproximación WKB (de la óptica geométrica) el campo cuántico asociado a la partícula puede considerarse de la forma  $\phi(t, \rho) = e^{-\frac{i}{\hbar}I(t, \rho)}$ , donde  $I$  es la acción para la trayectoria clásica de la partícula. Con

el campo siendo de esta forma, en el *límite clásico* ( $\hbar \rightarrow 0$ ), la ecuación de Klein-Gordon se convierte en la *ecuación de Hamilton-Jacobi*:

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu I \partial_\nu I + m^2 = 0. \quad (63)$$

Podemos definir la energía y el momento radial asociados al vector de Kodama como

$$\omega = -K^\mu \partial_\mu I = -\sqrt{1 - k \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \partial_t I, \quad k_\rho = \partial_\rho I. \quad (64)$$

Así, la acción queda (de forma análoga a lo que sucedía en métricas no dinámicas):

$$I = - \int dt \frac{\omega}{\sqrt{1 - k \left(\frac{\rho}{a}\right)^2}} + \int d\rho k_\rho. \quad (65)$$

Sustituyendo esta expresión en (63), la ecuación de Hamilton-Jacobi queda

$$-\frac{\omega^2}{1 - k \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} + \frac{2H\rho\omega}{\sqrt{1 - k \left(\frac{\rho}{a}\right)^2}} k_\rho + \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_A}\right)^2\right) k_\rho^2 + m^2 = 0 \quad (66)$$

Esta ecuación de 2º grado en  $k_\rho$  tiene dos posibles soluciones correspondientes a modos entrantes o salientes (signo + y -, respectivamente, en la raíz). Dado que el observador está dentro del horizonte aparente ( $\rho < \rho_A$ , donde el vector de Kodama es de tipo tiempo) debemos considerar los modos entrantes (y, consecuentemente, escoger el signo - en la raíz). Escogiendo partículas de masa 0 (puede verse que el resultado que nos interesa no depende de  $m$  [27]) y aplicando la Ec. (50) del método de Parikh-Wilzcek obtenemos para la parte imaginaria de la acción clásica, que está integramente asociada al segundo término de la expresión (66) puesto que la contribución imaginaria proviene del polo en el horizonte aparente  $\rho_A$ :

$$\Im I = -\omega \Im \int d\rho \times \frac{H\rho + \sqrt{(H\rho)^2 + 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_A}\right)^2}}{\sqrt{1 - k \left(\frac{\rho}{\rho_A}\right)^2} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_A}\right)^2\right)} = \pi\omega\rho_A. \quad (67)$$

Así pues, la tasa de emisión será

$$\Gamma \simeq e^{-2\Im I} = e^{-2\pi\omega\rho_A}. \quad (68)$$

Por tanto, el observador que está dentro del horizonte aparente (el llamado observador de Kodama) verá un flujo de partículas con un espectro térmico de temperatura  $T = ((1/2)\pi\rho_A)$  cuando las partículas atraviesan hacia el interior del horizonte aparente. Esto es completamente análogo a lo que sucede para la radiación de Hawking en la derivación propuesta por Parikh y Wilzcek.

## 6. ¿Realmente efecto túnel?

Para finalizar este esbozo sobre la radiación de Hawking haremos referencia a algunas voces críticas con el método de Parikh-Wilzcek. Como vimos, la derivación de la radiación de Hawking propuesta por Parikh y Wilzcek se basa en la hipótesis de que la acción de la partícula que atraviesa el horizonte del agujero negro tiene una parte imaginaria que proviene del plano complejo de la coordenada  $r$  a lo largo del semicírculo infinitesimal sobre el horizonte de sucesos  $r_H$ . Recientemente ha sido cuestionado que la acción pueda tener una componente imaginaria, [33,34], y además esta objeción no depende de las coordenadas utilizadas. El argumento fundamental es que en el espacio-tiempo del agujero negro la variable temporal  $t$  adquiere una parte imaginaria dentro del horizonte de sucesos que cancelaría la parte imaginaria proveniente del momento. Intentemos ver los argumentos de los discrepantes.

Obviamente ha de verificarse la ecuación para las geodésicas radiales [15]:

$$p_r = m g_{rr} \frac{dr}{ds} = \frac{m}{f(r)} \sqrt{\epsilon^2 - V_{eff}}, \quad (69)$$

siendo  $\epsilon$  la energía por unidad de masa de la partícula (es decir  $\epsilon = \frac{\omega}{m}$ ) y  $V_{eff}$  el denominado *potencial efectivo* que, para un agujero esféricamente simétrico, sin carga y no rotante es simplemente  $V_{eff} = f(r)$  con lo cual queda, para el agujero negro de Schwarzschild con  $f(r) = 1 - (r_H/r)$ :

$$p_r(r) = \frac{dI(r)}{dr} = \frac{\sqrt{(\omega^2 - m^2)r^2 + m^2 r r_H}}{r - r_H} \quad (70)$$

Vemos que si  $m=0$  ésta se reduce a la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\left(\frac{dW(r)}{dr} = \frac{\omega}{f(r)}\right)$$

obtenida para la aproximación WKB, en el límite semiclassical ( $\hbar \rightarrow 0$ ) y para  $m=0$  a partir de la acción [19]:

$$I = -\omega t + W(r). \quad (71)$$

En términos de la interpretación de Parikh y Wilzcek el proceso de radiación quedaría establecido de la siguiente forma: como puede apreciarse a partir de la expresión (70), la partícula no puede propagarse clásicamente entre dentro y fuera del horizonte del agujero a causa de la barrera de potencial que se manifiesta como un polo en el momento para  $r = r_H$ . Sin embargo, cuánticamente es posible atravesar la barrera por efecto túnel y unir las trayectorias interior y exterior al horizonte en el plano complejo  $r$  rodeando la singularidad asociada a  $r_H$ . Esto añade una parte imaginaria a la acción (ver Ec. (52)) que se interpreta como la responsable

del proceso túnel de dentro a fuera del horizonte. Sin embargo, si se hace una aproximación en la Ec. (70) para  $r \rightarrow r_H$  (teniendo en cuenta (71)) tendremos

$$W(r) \xrightarrow{r \rightarrow r_H} \omega r_H \ln \frac{r - r_H}{r_H}, \quad (72)$$

y dado que la ecuación para las trayectorias próximas al horizonte viene establecida por la condición

$$\frac{dI}{d\omega} = Cte(C)$$

se deduce que ha de verificarse la ecuación

$$-t + r_H \ln(r - r_H/r_H) = C$$

y sustituyendo en (71) obtendríamos que la acción es

$$\begin{aligned} I &= -\omega t + \omega r_H \ln \frac{r - r_H}{r_H} \\ &= \omega \left( -t + r_H \ln \frac{r - r_H}{r_H} \right) = \omega C. \end{aligned} \quad (73)$$

Es decir, la acción no adquiriría una parte imaginaria y por tanto no ha lugar el efecto túnel. Vemos en definitiva que la puesta en cuestión del método de Parikh-Wilczek se basa en el “olvido” de la parte temporal de la acción  $-\omega t$  y de su contribución igual y de signo contrario a la parte imaginaria de la parte radial  $W(r) = \int dr p_r$  (ver Ec. (50)) con lo que la contribución neta para la parte imaginaria de la acción total (71) es nula.

## 7. Acerca de otras derivaciones de la radiación de Hawking

Como se señala en el “abstract”, el propósito de este artículo es fundamentalmente dar una amplia visión de la denominada radiación de Hawking de los agujeros negros y señalar dos de las principales derivaciones de la misma: la original debida a Hawking y la conocida como efecto túnel. Este último método ha sido en la última década muy utilizado para obtener el espectro de radiación en horizontes dinámicos (tipo FRW), de ahí la dedicación que se dedica al mismo. Pero naturalmente “amplitud” no es sinónimo de “completitud” y en este sentido no debe quedar en el lector (sobre todo en el no especialista en el tema) la impresión de que las únicas derivaciones de la radiación de Hawking se agotan en las aquí relatadas. Existen otros métodos.

El método más interesante posiblemente sea el de *integrales de camino* (“path integrals”) [35-37] aplicado por Gibbons y Hawking en el contexto de la aproximación a la gravedad cuántica euclídea para la obtención de la entropía de un agujero negro de Kerr-Newman y de una métrica de De Sitter. Dadas la relevancia y aceptación que tiene, aunque ajeno al propósito de este artículo, haremos un pequeño esbozo del mismo aplicándole al agujero negro de Schwarzschild:

El punto central del mismo estriba en la relación que hay entre la función de partición  $Z$  de un conjunto canónico termodinámico formado por un campo  $\phi$  (cualquier campo: de materia, gravitatorio, etc) a una temperatura dada  $T_e = (1/\beta)$  ( $k_B = 1$  en unidades naturales) y la integral de camino que expresa la amplitud de probabilidad de transición (en la representación de Heisenberg)  $\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle$ :

$$Z \doteq Tr e^{-\beta H} = \int D\phi e^{-I_E(\phi)}, \quad (74)$$

donde la integral ha de realizarse sobre todos los campos que son periódicos de periodo  $\beta$  en el tiempo imaginario y que cumplan las condiciones de contorno  $\phi(t_1) = \phi_1$   $\phi(t_2) = \phi_2$  y donde la acción  $I_E$  es la acción clásica euclídea obtenida haciendo una rotación de Wick  $t \rightarrow i\tau$  y cuyo término dominante será el que proviene de las soluciones que hacen extrema la acción. Suponiendo que sólo tenemos un campo gravitatorio  $g$ , la acción viene dada por la acción de Einstein-Hilbert más un término de frontera que sirve para normalizar la misma y que es necesario introducir para obtener una acción que dependa sólo de las primeras derivadas de la métrica ( $R$  contiene términos que son lineales en la derivada segunda de la métrica):

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Xi} d^4x R \sqrt{-g} + \int_{\partial\Xi} d\vec{x} (K - K_0) \sqrt{-h}, \quad (75)$$

donde  $K - K_0$  es la diferencia de la traza de la segunda forma fundamental de  $\partial\Xi$  en la métrica  $g$  y en la métrica  $\eta$  y  $h$  es la métrica inducida sobre el contorno (o frontera)  $\partial\Xi$ .

Para la métrica de Schwarzschild euclidiana,

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) d\tau^2 \\ &+ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (76)$$

podemos emplear las coordenadas de Kruskal-Szekeres  $(T, X, \theta, \varphi)$  con el fin de evitar la singularidad de la métrica en  $r = 2M$ : las coordenadas temporal y radial  $(\tau, r)$  verifican las siguientes relaciones con las coordenadas  $(T, X)$ :

$$X^2 - T^2 = \left( 1 - \frac{r}{2M} \right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (77)$$

y

$$\frac{X + T}{X - T} = e^{-\frac{i\tau}{2M}}, \quad (78)$$

con lo cual la métrica (76) pasa a ser

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dX^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (79)$$

(Para el lector exigente hacemos la advertencia de no confundir  $(1 - (2M/r))$  que aparece en la métrica con  $(1 - (r/2M))$  que aparece en la igualdad (77)). Podemos tomar  $\mathcal{T} = iT$ , con lo cual la métrica (79) pasa a ser

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (d\mathcal{T}^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (80)$$

y la relación (78) pasa a ser

$$\frac{X - iT}{X + iT} = e^{-2i\alpha} = e^{-\frac{i\pi}{2M}}, \quad (81)$$

donde  $\alpha = \arctg(T/X) \in [0, 2\pi]$ . Por tanto  $\tau$  debe ser una coordenada periódica de período  $\beta = 8\pi M$ , con lo cual quiere decirse que el agujero negro de Schwarzschild debe tener una temperatura

$$T_e = \frac{1}{8\pi M}$$

que es la que se obtuvo precisamente mediante el método original de Hawking (ver Ec. (45)).

Puede calcularse por otro lado el valor de la acción (75) para el agujero de Schwarzschild y el resultado es [38]:

$$4\pi M^2 = \frac{\beta^2}{16\pi}.$$

Ya que la entropía de un sistema termodinámico viene dada por la expresión

$$S \approx - \left( \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - 1 \right) \ln Z \approx \left( \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - 1 \right) I_E,$$

se deduce que en este caso  $S = 4\pi M^2$ . Puesto que para el agujero negro de Schwarzschild el área del horizonte de sucesos (área del agujero negro) es  $A = 4\pi r_H^2 = 16\pi M^2$  se deduce la relación entre la entropía y el área de un agujero negro :

$$S = \frac{A}{4}. \quad (82)$$

Naturalmente este método puede, como es lógico, aplicarse a cualquier métrica y por tanto es aplicable a horizontes cosmológicos (tipo FRW).

- 
- i.* La conjetura de Censura Cósmica se debe a Penrose y plantea fundamentalmente la prohibición de singularidades desnudas cuando un objeto implosiona. Sobre la aceptación o no de esta conjetura, curiosas apuestas incluídas, entre la comunidad de los físicos, y en general sobre el desarrollo histórico de la física de los agujeros negros, ver la Ref. 5.
  - ii.* En general, el vacío suele definirse como el estado de mínima energía, pero en el caso de que el hamiltoniano del sistema no se conserve en el tiempo no tiene mucho sentido hablar de energía. Esta sería realmente la situación en que nos encontramos generalmente en un espacio-tiempo curvo siempre que la métrica no sea estática o estacionaria [11].
  - iii.* Una superficie de Cauchy para un conjunto abierto  $M$  es, fundamentalmente, una hipersuperficie de género espacio o nula que corta a cualquier curva de género tiempo en  $M$  una y sólo una vez.
  - iv.* Hago explícita la condición de operadores del campo y su momento conjugado. En adelante daré esto por entendido y eliminaré el sombrero.
  - v.* Puede demostrarse [15,16] que el producto escalar (10) no depende de la superficie de Cauchy elegida.
  - vi.* Lo que esto implica fundamentalmente es que siempre puede elegirse una coordenada  $\xi$  (en muchos casos es simplemente la coordenada  $x^0 = t$ ) que verifica la condición  $(\partial/\partial\xi)g_{\mu\nu} = 0$ . El parámetro  $\xi$  juega el papel de parámetro temporal ( $\xi^2 \rightarrow -1$ ) con respecto al cual decidir qué magnitud se conserva, pues por el teorema de Noether las transformaciones generadas por el vector de Killing llevan asociadas cargas constantes. A lo largo de las curvas integrales de  $k$  puede especificarse de forma natural el parámetro temporal  $\xi$  siendo  $k = (\partial/\partial\xi)$ . Para el lector exigente en el rigor de éste y otros conceptos pueden consultarse numerosos libros y apuntes de geometría diferencial y/o de relatividad general. Uno de ellos es la ref [12]. Para la mayoría de definiciones y resultados no demostrados a los que haga referencia el artículo pueden consultarse en las Refs. 13 a la 16. Especialmente para cuantización en espacios curvos puede consultarse la referencia clásica 13.
  - vii.* Una superficie atrapada es, fundamentalmente, una superficie 2-dimensional de género espacio compacta sin fronteras con la propiedad de que todas las geodésicas nulas que la interceptan ortogonalmente convergen inicialmente en ella. Para una definición rigurosa de este y otros conceptos como superficies marginales, horizontes atrapados, etc puede consultarse en la Ref. 32.
  - 1. J.D. Bekenstein, *The Limits of Information* gr-qc/0009019.
  - 2. B. Carter, *Phys.Rev.Lett.* **26** (1971) 331.
  - 3. D.C. Robinson, *Phys.Rev.Lett.* **34** (1975) 905.
  - 4. S.W. Hawking, *Commun. math. Phys.* **25** (1972) 152.
  - 5. K.S. Torne, *Agujeros negros y tiempo curvo* (Ed. Crítica, 1995).
  - 6. J. Bekenstein, (Ph.D. Thesis. Princeton University, 1972).
  - 7. J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking, *Commun. math. Phys.* **31** (1973) 161.
  - 8. S.W. Hawking, *Historia del tiempo* (Ed., Crítica, 1988).
  - 9. S.W. Hawking, *Commun. math. Phys.* **43** (1975) 199.
  - 10. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
  - 11. T. Jacobson, *Introduction to Quantum Fields in Curved Space-time and the Hawking Effect* gr-qc/0803048.
  - 12. S.M. Carroll, *Lectures notes on General Relativity* gr-qc/9712019.
  - 13. N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields theory in curved space*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
  - 14. R.M. Wald, *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics*. (Chicago Univ. Press, Chicago, USA, 1994).
  - 15. P.K. Townsend, *Black Holes*. Lectures notes gr-qc/9707012.
  - 16. Garay and J. Luis, *Notas de Física de agujeros negros*. U.C.M.
  - 17. R. Brout, S. Massar, and R. Parentani, *A Primer for Black Hoke Quantum Physics* gr-qc/07104345.

18. J. Traschen, *An introduction to Black Hoke Evaporation*. gr-qc/0010055.
19. R. Banerjee and B.R. Majhi, *Hawking black body spectrum from tunneling mechanism* hep-th/ 09030250.
20. K. Umetsu, *Hawking radiation from Kerr-Newman black hole and tunneling echanism* hep-th/ 09071420.
21. R. Banerjee and B.R. Majhi, *Phy. Rev. D* **79** (2009) hep-th/ 08120497.
22. M.K. Parikh, *Energy conservation and Hawking radiation* hep-th/ 0402166.
23. M.K. Parikh and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5042 hep-th/ 9907001.
24. M.K. Parikh, *A Secret Tunnel through the horizont* hep-th/ 0405160.
25. E. Keski-Vakkuri, P. Kraus, *Phys. Rev. D.* **54** (1996) hep-th/ 9604151.
26. E.C. Vagenas, *Phys. Lett. B* **559** (2003) hep-th/ 0209185.
27. R.G. Cai, Cao, L.M., Y.P. Hu, *Hawking radiation of apparent horizon in a FRW Universe*. **hep-th/ 08091554**.
28. R. Di Criscienzo, S.A. Hayward, N. Nadalini, L. Vanzo, and S. Zerbini, *Hamilton-Jacobi Tunneling Method for Dynamical Horizons in different coordinate gauges* **gr-qc/ 09061725**
29. Ke-Xia Jiang, San-Min Ke, Dan-Tao Peng, and Jun Feng, *Hawking radiation as tunneling and the unified first law of thermodynamics at the apparent horizon in the FRW Universe* hep-th/ 08123006.
30. Thao-Zhu, Ji-Rong Ren, and D. Singleton, *Hawking-like radiation as tunneling the apparent horizon in a FRW Universe*. **hep-th/ 09022542**.
31. H. Kodama, *Prog.Theor.Phys.* **63** (1980) 1217.
32. S.A. Hayward, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 1938 gr-qc/ 9408002.
33. M. Pizzi, *The time factor in the semiclassical approach to the Hawking radiation* hep-th/ 09044572.
34. V.A. Belinski, *On the tunneling through the black hole horizon* hep-th/ 09103934.
35. J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 2188.
36. G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
37. G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2738.
38. T. Ortín, *Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas* hep-th/ 0405005.