La fuerza normal: ¿una fuerza conservativa?

S. Díaz-Solórzano and L. González-Díaz
Centro de Investigaciones de Matemática y Física, Departamento de Matemáticas y Física,
Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela,
e-mail: srafael@ipc.upel.edu.ve; lagdelul@gmail.com

Recibido el 25 de octubre de 2010; aceptado el 29 de marzo de 2011

La fuerza normal es una fuerza de ligadura que surge del contacto entre un objeto y una superficie. Esta fuerza puede conservar la energía mecánica de un sistema o no. Se muestra que dicha fuerza es conservativa cuando la superficie no evoluciona en el tiempo, así como la rata a la cual varía la energía mecánica cuando la fuerza normal es no conservativa. Para esta última situación, se propone la función energía pseudo-potencial asociada a la fuerza normal con la finalidad de obtener la ecuación de movimiento del objeto sometido a dicha fuerza a partir de consideraciones energéticas.

Descriptores: Fuerza normal; energía mecánica y trabajo; energía pseudo-potencial.

The normal force is a constraint force that arises from the contact between an object and a surface. This force can preserve the mechanical energy of a system or not. It is shown that normal force is conservative when the surface does not evolve over time, as well as the rate to which the mechanical energy changes when the normal force is not conservative. For the latter situation, it is proposed the pseudo-potential energy function associated to normal force in order to obtain from energetic considerations the equation of movement of the object under the above mentioned force.

Keywords: Normal force; mechanical energy and word; pseudo-potential energy.

PACS: 01.55+b; 45.20.D-; 45.20dg; 45.20dh

1. Introducción

Los tópicos trabajo mecánico, energía potencial, energía mecánica y potencia mecánica son discutidos en cursos de física general y mecánica. En estos tópicos se considera el concepto de movimiento desde el punto de vista energético, con especial énfasis en la idea de que la energía mecánica es una visión integral de las ecuaciones que rigen el movimiento. El punto de vista en cuestión requiere que las fuerzas sean clasificadas en conservativas y no conservativas, además de describir las interacciones presentes a través de potenciales. En los cursos mencionados, sólo se determinan las energías potenciales asociadas a fuerzas conservativas. En cuanto a la fuerza normal, es poco lo que se discute respecto a si ésta es conservativa o no. En virtud de esto, mostramos en este trabajo las condiciones bajo las cuales la fuerza normal es conservativa.

La fuerza normal es un tipo de fuerza de ligadura, la cual restringe el movimiento de un cuerpo [1]. Cuando el movimiento de un cuerpo se encuentra condicionado a realizarse en ciertos lugares del espacio y de ciertas maneras, se dice que el movimiento está sujeto a restricciones, ligaduras o vínculos. Estas restricciones hacen que el cuerpo o los cuerpos que conforman el sistema no tengan libertad de moverse en todo el espacio; de hecho, no todas las coordenadas empleadas para describir el movimiento son independientes. La ecuación de una superficie o línea en la cual se mueve un cuerpo recibe el nombre de ligadura del sistema o vínculo del sistema, el cual es considerado como una restricción holónoma [2] que puede depender explícitamente del tiempo. La interacción de un cuerpo con la superficie o línea que lo sostiene es mediada por la fuerza normal, ésta es esencialmente de contacto y puede ser descrita a través del vínculo o ligadura [3], lo cual permite establecer el carácter conservativo o no de la fuerza normal.

En relación al contenido formativo existente, los textos básicos de física general [4] no discuten el carácter conservativo de la fuerza normal, pese a que en la mayoría de los problemas presentados en dichos textos se observa que la fuerza normal no transfiere energía mecánica a los cuerpos sobre los cuales actúa. En tales problemas, las superficies de contacto son estáticas, el trabajo debido a la fuerza normal es siempre nulo, lo cual conlleva a que ésta fuerza es conservativa. No obstante, los textos antes mencionados no consideran la energía potencial asociada a dicha fuerza cuando escriben la energía mecánica del sistema. Por otra parte, Keeports [5] considera situaciones, donde las superficies de contacto no son estacionarias, en las cuales la fuerza normal no es conservativa, ya que el trabajo realizado por dicha fuerza es no nulo. Dado que la fuerza normal es un tipo particular de fuerza de ligadura, algunos autores [3,6,7] consideran su aspecto dinámico en el marco de la formulación lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica para intentar aclarar el carácter conservativo o no de la fuerza normal. Sin embargo, José y Saletan [8] muestran, en el marco de la mecánica newtoniana, que una partícula sujeta a una fuerza de ligadura, como la normal, tiene una energía mecánica que se conserva cuando la superficie o línea que contiene a la partícula se encuentra fija; es decir, el vínculo holónomo es independiente del tiempo. Para ello, presenta el balance energético entre fuerzas provenientes de un potencial y la potencia disipada o suministrada por la fuerza de ligadura, sin considerar que la fuerza normal puede tener asociada una función potencial.

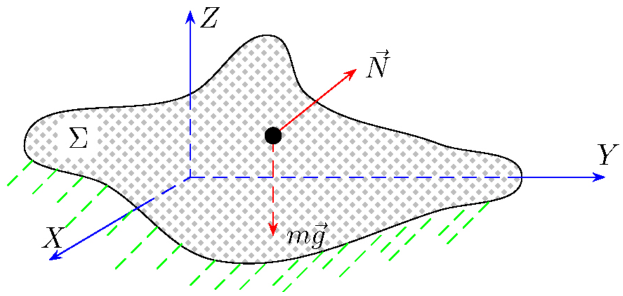

FIGURA 1. Movimiento de una partícula restringido a la superficie Σ en presencia de un campo gravitacional constante.

Es bien conocido que existen fuerzas que provienen de funciones potenciales [9]. Cuando estas funciones son dependientes únicamente de las coordenadas o posición se tiene que las fuerzas derivables de estas funciones potenciales son conservativas; tales funciones reciben el nombre de *energías potenciales*. En cambio, cuando dichas funciones potenciales dependen de la posición o de las coordenadas y adicionalmente del tiempo se tiene que las fuerzas derivables de estas funciones potenciales son no conservativas [8]; en este caso a tales funciones las denominaremos *energías pseudo-potenciales*, para enfatizar el hecho de que la fuerza asociada a dicha función potencial no conserva la energía mecánica, aun cuando proviene del gradiente de una función potencial. Para el logro del objetivo propuesto en este trabajo, mostraremos que la función pseudo-potencial asociado a la fuerza normal es proporcional al vínculo, siendo ésta no conservativa cuando el vínculo depende explícitamente del tiempo, lo cual ocurre cuando la superficie se mueve. La caracterización de la fuerza normal vía su función potencial tiene la ventaja de que la interacción entre los cuerpos y las superficies que los soportan puede ser considerada de manera simple en la energía mecánica del cuerpo que se estudia. Particularmente, analizaremos el caso de una partícula sujeta a una fuerza de ligadura en presencia de un campo gravitacional constante.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. 2, se presenta la energía pseudo-potencial asociada a la fuerza normal, mostrando a su vez, condiciones para las cuales esta fuerza se hace conservativa. En la Sec. 3, se obtienen las ecuaciones de movimiento de una partícula, sujeta a un campo gravitacional constante en contacto con una superficie, a partir de consideraciones energéticas, incorporando la función potencial asociada a la fuerza normal; adicionalmente se muestran dos situaciones físicas: una donde la fuerza normal es conservativa y otra donde la fuerza normal no lo es.

2. Energía pseudo-potencial y potencial asociado a la fuerza normal

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en presencia de un campo gravitacional constante $\vec{g}$ sobre una superficie Σ en movimiento, tal como se muestra en la Fig. 1. La superficie Σ es considerada una ligadura holónoma dependiente del tiempo (vínculo rehonómico [10]) de la forma $\phi(\vec{r},t)$. La función de vínculo $\phi(\vec{r},t)$ se anula sobre la trayectoria donde ocurre la dinámica; es decir,

$$\phi(\vec{r},t)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad \text{o brevemente} \quad \phi(\vec{r},t) \approx 0\,. \tag{1}$$

El símbolo de igualdad débil ($\approx$) es empleado para indicar que la función ha sido evaluada sobre aquellas trayectorias donde ocurre la dinámica, contenidas en Σ. El gradiente de este vínculo ($\vec{\nabla}\phi$) es un vector no nulo y perpendicular a la superficie [11] en cada instante de tiempo. Así, la fuerza que ejerce la superficie Σ al cuerpo es proporcional a este gradiente [3,7,8], lo cual permite escribir la fuerza normal en la forma

$$\vec{N}(\vec{r},t) \approx \lambda(\vec{r},t)\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t), \tag{2}$$

donde $\lambda(\vec{r},t)$ es el parámetro de proporcionalidad que recibe el nombre de multiplicador de Lagrange, el cual es usado para ajustar el sentido y la intensidad de la interacción, tales que sean compatibles con las ecuaciones de movimiento. La fuerza normal $\vec{N}$ puede ser escrita como el gradiente de la función escalar $\lambda\phi$ sobre la superficie Σ, donde ocurre la dinámica. En efecto,

$$\vec{\nabla}[\lambda(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)] = \phi(\vec{r},t)\vec{\nabla}\lambda(\vec{r},t) + \lambda(\vec{r},t)\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\,. \tag{3}$$

Al evaluar la expresión anterior en Σ e imponer (2), se obtiene

$$\vec{N}(\vec{r},t) \approx -\vec{\nabla}\left[-\lambda(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)\right], \tag{4}$$

observándose que la fuerza normal se obtiene a partir del gradiente de una función escalar que depende explícitamente del tiempo. Así, la función

$$U_{\vec{N}}(\vec{r},t) \overset{\text{def}}{=} -\lambda(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t) \tag{5}$$

recibe el nombre de *energía pseudo-potencial* asociada a la fuerza normal.

La justificación de que la fuerza normal pueda ser escrita como en (2) es dada por varios autores [3,7,8]. La razón esgrimida por José y Saletan [8], es que la ecuación de movimiento es incompatible por tener más incógnitas que ecuaciones; dificultad que resulta al no establecer que la fuerza normal tenga una dirección específica. Al aplicar la segunda ley de Newton a la partícula m mostrada en la Fíg. 1, se tiene

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\vec{\nabla}\phi + m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,. \tag{6}$$

Obsérvese que si no se impone (2) en la primera ecuación de (6), ésta presentaría seis incógnitas para un total de cuatro ecuaciones: tres que corresponden a las componentes de la ecuación de movimiento y una correspondiente al vínculo (1). Al fijar la dirección de la fuerza normal en el espacio se reduce el número de incógnitas a cuatro, lo cual hace que el conjunto de ecuaciones que surgen de la segunda ecuación de (6) sea compatible.

Para determinar la energía mecánica de la partícula basta multiplicar (6) escalarmente por la velocidad $\vec{v}$ de ésta, y luego reemplazar

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

para obtener

$$\lambda \left[\frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right] + m\vec{g} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right]. \quad (7)$$

La expresión (7) puede escribirse nuevamente como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 - m\vec{g}\cdot\vec{r} - \lambda\phi\right] = \phi\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{d\lambda}{dt}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[-\lambda\phi\right]. \quad (8)$$

El primer término que se encuentra dentro del corchete a la izquierda de la igualdad (8) es identificado como la energía cinética de la partícula. Los términos $-m\vec{g}\cdot\vec{r}$ y $-\lambda\phi$ corresponden a la energía potencial asociada a la fuerza gravitacional y la energía pseudo-potencial asociada a la fuerza normal, respectivamente. Tales energías son denotadas por $U_{\vec{N}} = -\lambda\phi$ y $U_{m\vec{g}} = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$. Así, la energía mecánica se escribe como

$$E = K + U_{m\vec{g}} + U_{\vec{N}} = \frac{1}{2}mv^2 - m\vec{g}\cdot\vec{r} - \lambda\phi. \quad (9)$$

De (9) y (8), se tiene que la potencia mecánica viene dada por

$$\frac{dE}{dt} = \phi\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{d\lambda}{dt}\right] + \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}. \quad (10)$$

Esta expresión sólo tiene sentido en la superficie Σ, ya que allí es donde ocurre la dinámica. Al imponer (1) en (10), se obtiene

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}. \quad (11)$$

Esta expresión corresponde a la tasa con que la energía mecánica es transferida como consecuencia de la interacción de la partícula con la superficie en movimiento. De (11), resulta claro que la energía mecánica del sistema no se conserva, ya que la superficie está en movimiento:

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}\left[-\lambda\phi\right] = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}\phi - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t} \approx -\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (12)$$

Esta consecuencia es independiente del hecho de que el multiplicador de Lagrange dependa explícitamente del tiempo. Lo cual nos permite afirmar que la fuerza normal es no conservativa. Generalizando este resultado, podemos afirmar que las fuerzas de ligaduras son no conservativas cuando los vínculos dependen explícitamente del tiempo. Otra manera de establecer el carácter no conservativo de la fuerza normal, es probar que dicha fuerza no es perpendicular a la trayectoria y, por lo tanto, la velocidad no es perpendicular a la fuerza normal; lo cual se desprende de la preservación del vínculo en el tiempo, es decir, $\dot{\phi} \approx 0$. Al calcular la derivada temporal de la energía potencial asociada a la fuerza normal resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big[\lambda\phi\Big] &= \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Big[\lambda\phi\Big] + \frac{\partial}{\partial t}\Big[\lambda\phi\Big], \\ \dot{\lambda}\phi + \lambda\dot{\phi} &= \vec{v}\cdot\Big[-\vec{\nabla}U_{\vec{N}}\Big] - \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13)$$

En la superficie Σ se tiene que $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$ y $\vec{N} = -\vec{\nabla}U_{\vec{N}}$; de esta manera, (13) toma la forma

$$\frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} \approx \vec{N}\cdot\vec{v}. \quad (14)$$

La no nulidad de la derivada respecto al tiempo de la energía pseudo-potencial muestra que la fuerza normal no es perpendicular a la velocidad. Esta situación pone de manifiesto la relación entre la naturaleza geométrica de la superficie y el carácter no conservativo de la fuerza normal. Desde el punto de vista físico, cuando la superficie adquiere movimiento existe una transferencia de energía mecánica que se contabiliza mediante el trabajo mecánico debido a la fuerza normal ejercida sobre la partícula, dicho trabajo viene dado por

$$W_{\vec{N}}^{[A,B;\mathcal{C}]} = \int_{\mathcal{C}} \vec{N}\cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{N}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}\,dt. \quad (15)$$

La expresión (12) establece que la energía mecánica se conserva siempre y cuando la función de vínculo dependa explícitamente de las coordenadas o posición, aun cuando el multiplicador dependa explícitamente del tiempo [12]. La conservación de la energía mecánica se logra cuando la superficie Σ no cambia con el tiempo, en dicho caso la fuerza normal es perpendicular a la trayectoria seguida por la partícula, de manera que la superficie no transfiere energía al cuerpo y el trabajo realizado por la fuerza normal es nulo,

$$W_{\vec{N}}^{[A,B;\mathcal{C}]} = \int_{\mathcal{C}} \vec{N}\cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{N}\cdot\vec{v}\,dt = 0. \quad (16)$$

3. Obtención de la ecuación de movimiento a partir de consideraciones energéticas

A partir de (11) se puede obtener la ecuación de movimiento de un sistema con ligadura holónoma desde consideraciones energéticas. Para ello, se considera en la energía mecánica del sistema las energías cinéticas de cada parte móvil que conforma el sistema así como las energías de interacción entre cada cuerpo con su entorno; en particular, una de estas interacciones puede ser debida al contacto con una superficie. Cuando el sistema mecánico está conformado por una partícula en contacto con una superficie y en presencia de un campo gravitacional constante, entonces la energía mecánica del sistema es dada por (9), siendo $U_{m\vec{g}}$ y $U_{\vec{N}}$ las energías asociadas a las interacciones entre la partícula con el campo gravitacional y la superficie, respectivamente. La inclusión de la energía pseudo-potencial (5) asociada a la fuerza de ligadura $\vec{N}$ hace que las coordenadas del vector posición $\vec{r}$ y el multiplicador

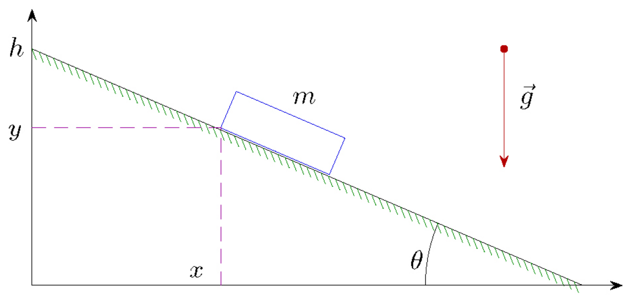

FIGURA 2. Bloque que desciende por un plano inclinado.

de Lagrange λ sean tratados como variables independientes [6,7]. Al derivar con respecto al tiempo la energía mecánica (9) y considerar (11) se obtiene

$$\vec{v}\cdot\left[m\vec{a}-m\vec{g}-\lambda\vec{\nabla}\phi\right]+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{d\lambda}{dt}\right]\phi=0\,. \quad (17)$$

Sobre la superficie del vínculo se observa que el segundo término de (17) se anula, quedando

$$\vec{v}\cdot\left[m\vec{a}-m\vec{g}-\lambda\vec{\nabla}\phi\right]=0. \quad (18)$$

Eligiendo λ apropiadamente de forma tal que las componentes de la velocidad sean independientes, se tiene que

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\lambda\vec{\nabla}\phi \quad \text{y} \quad \phi=0\,, \quad (19)$$

la cual es la ecuación de movimiento del sistema considerado.

A continuación examinaremos dos problemas académicos que usualmente son tratados en cursos de física general y mecánica: El primer problema presenta un vínculo holónomo independiente del tiempo (restricción esclerónoma [13]) y el segundo presenta un vínculo holónomo que depende explícitamente del tiempo (restricción rehonómica).

3.1. Problema académico con un vínculo esclerónomo

Un bloque de masa m desciende por un plano inclinado, de ángulo θ y altura h, debido a la presencia del campo gravitacional terrestre, tal como se muestra en la Fig. 2. El coeficiente de roce dinámico entre la superficie del plano y el bloque es μ. La función ϕ viene dada por la ecuación de la recta que describe a la superficie del plano inclinado. En coordenadas cartesianas, la ecuación de la recta toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= -\tan\theta x+h \quad \therefore \\ \phi(x,y) &= y+\tan\theta x-h\approx 0\,. \end{aligned} \quad (20)$$

En este caso el vínculo posee dimensiones de longitud, por lo que el multiplicador posee dimensiones de energía por unidad de longitud, es decir, dimensiones de fuerza. La energía mecánica del bloque en coordenadas cartesianas tiene la forma

$$E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+mgy-\lambda\left(y+\tan\theta x-h\right)\,, \quad (21)$$

donde v_x y v_y son las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas. Derivando la energía respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la derivada de la posición es la velocidad así como la derivada de la velocidad es la aceleración, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \left[ma_x-\lambda\tan\theta\right]v_x \\ &+\left[ma_y+mg-\lambda\right]v_y-\frac{d\lambda}{dt}\left[y+\tan\theta x-h\right]. \end{aligned} \quad (22)$$

La derivada de la energía mecánica respecto al tiempo es la potencia generada por la fuerza de roce,

$$\frac{dE}{dt}=\vec{f}_{roce}\cdot\vec{v}=-\mu|\lambda|v_x+\mu|\lambda|\tan\theta v_y\,. \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{f}_{roce} &= -\mu|\vec{N}|\widehat{e}_v=-\mu|\lambda|\,|\vec{\nabla}\phi|(\cos\theta\widehat{\imath}-\operatorname{sen}\theta\widehat{\jmath}) \\ &= -\mu|\lambda|\widehat{\imath}+\mu|\lambda|\tan\theta\widehat{\jmath}, \end{aligned} \quad (24)$$

Igualando (22) con (23) se tiene que

$$\begin{aligned} &\left[ma_x-\lambda\tan\theta+\mu|\lambda|\right]V_x \\ &+\left[ma_y+mg-\lambda-\mu|\lambda|\tan\theta\right]V_y-\phi\frac{d\lambda}{dt}=0\,. \end{aligned} \quad (25)$$

Como las velocidades v_x, v_y así como $d\lambda/dt$ son tratadas como variables independientes, entonces los coeficientes que multiplican a cada una de estos términos deben anularse, resultando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ma_x-\lambda\tan\theta+\mu|\lambda|=0\,, \\ ma_y+mg-\lambda-\mu|\lambda|\tan\theta=0\,, \\ \phi(x,y)=y+\tan\theta x-h=0\,. \end{cases} \quad (26)$$

Las cuales corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema. Las dos primeras ecuaciones de (26) son las componentes horizontal y vertical de la segunda ley de Newton, respectivamente, y la tercera ecuación de (26) es el vínculo holónomo. Este vínculo muestra que las coordenadas horizontal y vertical del movimiento no son independientes. Al derivar dos veces el vínculo se obtiene una relación entre las componentes horizontal y vertical del vector aceleración, la cual al sustituirse en (26) se obtiene

$$a_x=g(\operatorname{sen}\theta-\mu\cos\theta)\cos\theta\,, \quad (27a)$$

$$a_y=g(\operatorname{sen}\theta-\mu\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,, \quad (27b)$$

$$\lambda=mg\cos^2\theta\,. \quad (27c)$$

En virtud de las expresiones dadas en (27) se tiene que las normas del vector aceleración y la intensidad de la fuerza normal son

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=g|\operatorname{sen}\theta-\mu\cos\theta|\,, \quad (28a)$$

$$|\vec{N}|=|\lambda||\vec{\nabla}\phi|=mg\cos\theta\,. \quad (28b)$$

De (23) se concluye que la superficie no le transfiere energía al bloque que desciende por el plano inclinado, lo cual puede verse también de (16). El movimiento del bloque se debe a la transferencia de energía del campo gravitacional al bloque; parte de esta energía es disipada por el roce entre el bloque y la superficie del plano.

3.2. Problema académico con un vínculo rehonómico

Ahora consideramos que la superficie del plano inclinado de la Fig. 2 adquiere una aceleración $\vec{A}$ horizontal a la derecha del sistema coordenado. En dicho caso, la ecuación de vínculo toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= -\left(x - \tfrac{At^2}{2}\right)\tan\theta + h \\ &= -x\tan\theta + h + \tfrac{A\tan\theta t^2}{2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\therefore \quad \phi(x,y,t) = y + x\tan\theta - h - \tfrac{A\tan\theta t^2}{2} \approx 0$$

La energía mecánica (9) para el bloque en coordenadas cartesianas, viene dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy \\ &\quad - \lambda\left(y + x\tan\theta - h - \tfrac{A\tan\theta t^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Derivando respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \left[ma_x - \lambda\tan\theta\right]v_x + \left[ma_y + mg - \lambda\right]v_y \\ &\quad + \lambda A\tan\theta t - \frac{d\lambda}{dt}\left[y + \tan\theta x - h - \tfrac{A\tan\theta t^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

En este caso la única fuerza conservativa es la debida al campo gravitacional. No obstante, la fuerza normal tiene asociada una energía pseudo-potencial, por lo que disipa energía con una tasa dada por (11). En cambio, la potencia disipada por la fuerza de roce tiene la misma forma que en (23). Así, la potencia mecánica instantánea también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \vec{f}_{roce}\cdot\vec{v} + \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}, \\ \frac{dE}{dt} &= -\mu|\lambda|v_x + \mu|\lambda|\tan\theta v_y + \lambda A\tan\theta t - \phi\frac{\partial\lambda}{\partial t}. \end{aligned} \tag{32}$$

Igualando (31) con (32) y anulando los coeficientes que acompañan a las componentes del vector velocidad y las derivadas temporales del multiplicador de Lagrange λ, se obtiene

$$\begin{cases} ma_x - \lambda\tan\theta + \mu|\lambda| = 0, \\ ma_y + mg - \lambda - \mu|\lambda|\tan\theta = 0, \\ \phi(x,y,t) = y + \tan\theta x - h - \tfrac{A\tan\theta t^2}{2} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Luego, a partir de (33) se obtiene

$$a_x = (A\,\mathrm{sen}\,\theta + g\cos\theta)(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta), \tag{34a}$$

$$\begin{aligned} a_y &= [A(\cos\theta + \mu\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &\quad - g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)]\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{aligned} \tag{34b}$$

$$\lambda = m(A\,\mathrm{sen}\,\theta + g\cos\theta)\cos\theta. \tag{34c}$$

Las expresiones dadas en (34) coinciden con las dadas en (27) cuando se anula la aceleración del plano inclinado; es decir, $\vec{A} = \vec{0}\,(\mathrm{m/s^2})$. Además, se evidencia que la superficie le transfiere energía al bloque a una tasa

$$\frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} = m\left(A\,\mathrm{sen}^2\theta + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)At. \tag{35}$$

Y la cantidad de energía transferida por la superficie al bloque, cuando el plano se ha trasladado una distancia d a partir del reposo, es

$$W_{\vec{N}}^{[A,B;\mathcal{C}]} = \int_0^{t_d} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}dt = m\left(A\,\mathrm{sen}^2\theta + \tfrac{1}{2}g\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)d. \tag{36}$$

Resultado que se reproduce al calcular $\vec{N}\cdot\Delta\vec{r}$, donde $\Delta\vec{r}$ es el desplazamiento del bloque cuando el plano se ha desplazado una distancia horizontal d, a partir del reposo.

4. Discusión

La función energía potencial (5) asociada a la fuerza normal (2), media la interacción entre la partícula que está en contacto con la superficie que la soporta; siendo esta función nula sobre la trayectoria dinámica seguida por la partícula. El hecho de que $U_{\vec{N}} \approx 0$ es la razón por la cual no es considerada en los textos de física general y mecánica cuando se estudia el tópico de energía mecánica. Sin embargo, tal función potencial es relevante al determinar la ecuación de movimiento a partir de la energía mecánica, ya que su gradiente no es nulo; de hecho el gradiente de esta función potencial corresponde a la fuerza normal, tal como puede verificarse de (4).

Resulta claro que el multiplicador de Lagrange que aparece en (2) y en (5), ha sido introducido para ajustar el sentido y la intensidad de la fuerza normal compatible con las ecuaciones de movimiento. Por ello, puede suceder que λ dependa explícitamente del tiempo. En este caso la energía potencial (5) depende del tiempo y la fuerza normal sigue siendo conservativa, contrariamente a lo que se afirma de que las fuerzas que provienen de funciones potenciales que dependen explícitamente del tiempo son no conservativas. En tal sentido, el carácter conservativo o no de la fuerza normal recae en el hecho de que el vínculo dependa o no del tiempo en forma explícita. Lo cual pone de manifiesto la relación entre la naturaleza geométrica de la superficie con el carácter conservativo de la fuerza conservativa. Cuando la fuerza normal no es conservativa, es posible determinar la transferencia de energía debido a esta fuerza, mediante el trabajo mecánico realizado por la fuerza normal o mediante los cambios temporales de la energía pseudo-potencial asociada a dicha fuerza; es decir, la transferencia de energía debido a la fuerza normal se contabiliza mediante la expresión (15).

Es de mencionar que el criterio esgrimido por muchos autores de que una fuerza es conservativa si el rotacional de dicha fuerza se anula; es decir, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, no se aplica al caso de las fuerzas de ligaduras que provienen de pseudo-potenciales, ya que en dichos casos se sigue que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U_{\vec{N}} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \dot{E} = \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} \neq 0\,. \tag{37}$$

Por ello se ha considerado, en este artículo, que una fuerza es conservativa cuando ésta conserva la energía mecánica. En tal sentido, el criterio de que un campo de fuerza irrotacional es conservativo no es aplicable en general [14].

5. Conclusión

En el presente trabajo se ha mostrado que las siguientes afirmaciones son equivalentes: (I) La fuerza normal es conservativa cuando la superficie permanece estática, es decir, la función de vinculo no depende explícitamente del tiempo; (II) la fuerza normal es conservativa cuando ésta es perpendicular a la trayectoria, es decir, la fuerza normal que actúa sobre una partícula es perpendicular a la velocidad de ésta; (III) La fuerza normal es conservativa cuando el trabajo realizado por dicha fuerza es nulo a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula sobre la cual actúa dicha fuerza. En el caso de no cumplirse alguna de las tres afirmaciones antes mencionada, entonces la fuerza normal no será conservativa. La caracterización de la interacción entre una partícula y la superficie de contacto que la soporta, puede ser descrita a través de la función potencial (5), considerando a esta interacción de manera simple en la energía mecánica de la partícula.

1. A. French, *Mecánica Newtoniana* Ed. 1ra *Tomo 1* (Editorial Reverté, España, 1974).
2. Un vínculo holónomo es un vículo geométrico que no depende de las velocidades. Se escribe como $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, donde las N variables corresponden a los vectores posición de cada una de las partículas que conforman el sistema físico en consideración y la variable t representa el tiempo [15].
3. L.A. Pars, *A treatise on analytical dynamics* Ed. 1ra, (Heinemann, London, 1965); L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics* (McGraw-Hill, New York, 1970).
4. R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería* Vol. 1 (International Thomson, México, 2005); M. Alonso y E. Finn, *Física: Mecánica* Vol 1. (Fondo Educativo Interamericano, 1976).
5. D. Keeports, *Phys. Educ.* **41** (2006) 219.
6. T. Chow, *Classical mechanincs* (John Wiley & Sons, New York, 1995); H. Goldstein, *Classical Mechanincs* Ed. 2da, (Addison-Wesley Publishing Company, Philippines, 1980); J. Jr. Norwood, *Mecánica Clásica a nivel intermedio*, (Editorial Dossat, España, 1981); H.J.W. Müller-Kirsten, *Classical Mechanics and Relativity*, (World Scientific, Singapur, 2008).
7. J.R. Gaskill and M. Arenstein, *Amer. Jour. Phys* **37** (1969) 93.
8. J. José y E. Saletan, *Classical Dynamics: A contemporary approach* (Cambridge University Press, New York, 1998).
9. I.V. Savéliev, *Curso de fisica general: Mecánica y Fisica Molecular* Tomo 1 (Mir, Moscú, 1984).
10. Un vínculo rehónomo es un vínculo que depende explícitamente del tiempo [16].
11. L.A. Santaló, *Vectores y tensores con sus aplicaciones* Ed. 10ma, (Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina, 1976).
12. Una situación física en la cual el multiplicador depende del tiempo y el vínculo no, surge al considerar fuerzas externas dependientes del tiempo.
13. Un vínculo esclerónomo o estacionario es un vínculo que no depende explícitamente del tiempo [15].
14. S. Díaz-Solorzano y L. González-Díaz, en preparación.