

Efecto casimir en anti de Sitter 1 + 1

L.A. López y O. Pedraza

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Pachuca, 42184, México,
e-mails: lalopez@uaeh.edu.mx; omarp@uaeh.edu.mx

Recibido el 12 de enero de 2011; aceptado el 17 de febrero de 2011

En el presente trabajo se estudian los efectos de la curvatura en la fuerza de Casimir, considerando un fondo anti de Sitter en dos dimensiones. Empleando el tratamiento de la función de Green, se muestra de forma clara cómo se lleva a cabo dicho método. El resultado obtenido concuerda con el caso plano en el límite en el cual el radio de anti de Sitter es pequeño. De esta forma se pueden observar las correcciones debido a la curvatura en la fuerza de Casimir.

Descriptores: Efecto Casimir; función de Green.

In this paper we study the effects of curvature on the Casimir force, we consider an Anti de Sitter background in two dimensions. We use the Green's approaching and we show clearly how the method is carried out. The result obtained agrees with the plane case in the limit in which the Anti de Sitter radius is small, so we can see the corrections due to the curvature of the Casimir force.

Keywords: Casimir effect; Green function.

PACS: 04.20.±q; 04.62.+v; 02.30.Jr; 02.30.Gp

1. Introducción

Más de 60 años han pasado desde que H.B.G. Casimir publicó su artículo más citado [1], donde halló una explicación para la interacción de Van der Waals como una manifestación de la energía del punto cero de un campo cuántico. El efecto Casimir en su forma simple (como se aprecia en la Fig. 1) es la atracción de un par de placas conductoras neutras colocadas en forma paralela, debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío del campo electromagnético. Actualmente hay una gran cantidad de experimentos de alta precisión que han demostrado la existencia de la fuerza de Casimir para diferentes geometrías y muchos otros que se están llevando a cabo en la actualidad [2-6]. En el aspecto teórico han habido grandes progresos en la investigación de las divergencias que en él aparecen [6,7], así como en el estudio de diferentes geometrías [8], condiciones de frontera y espacios curvos [9-11]. De hecho, la fuerza de Casimir ha sido sugerida como una herramienta experimental para la investigación de nueva física más allá del modelo estándar [12].

La función de Green es una técnica o método empleada en la resolución de ecuaciones diferenciales inhomogéneas muy utilizada para resolver algunos problemas en distintos campos de la física, como por ejemplo en electromagnetismo, mecánica cuántica, física de partículas, entre otras. En el caso especial del efecto Casimir se ha convertido en uno de los métodos más utilizados para su tratamiento. Es por ello, que es interesante y educativo mostrar de forma detallada y explícita cómo aplicar el método de la función de Green para el efecto Casimir, considerando un caso específico.

En el presente trabajo se muestra la técnica de la función de Green para obtener la fuerza de Casimir, considerando un escenario anti de Sitter 1+1 dimensional, la cual es solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica nega-

tiva; y además está inspirado en los modelos de mundos brana [13,14]. Entre estos escenarios de mundos brana existen trabajos del efecto Casimir en espacios anti de Sitter [15,16]. Por supuesto, existen muchas técnicas para obtener la fuerza de Casimir, sin embargo, la intención particular en este trabajo es mostrar como emplear esta técnica.

2. Efecto Casimir entre dos placas de Dirichlet

El interés particular de considerar la métrica anti de Sitter 1+1 dimensional, es principalmente estudiar el efecto de la curvatura en la fuerza de Casimir en un modelo simple. Por supuesto, dicho modelo está inspirado en escenarios de mundos brana. La métrica de este escenario está dada por

$$ds^2 = e^{-2\kappa|y|} dt^2 - dy^2, \quad (1)$$

donde κ es el inverso del radio de anti de Sitter y determina el grado de curvatura de este espacio.

Consideremos un campo escalar sin masa en este escenario, el cual es dado por la acción

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (2)$$

donde g es el determinante de la métrica, $g^{\mu\nu}$ es la métrica de fondo (1) y $\mu, \nu = 0, 1$. Al realizar la variación de la acción, obtenemos la siguiente ecuación de campo:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (3)$$

donde Φ está sujeto a las condiciones de frontera de Dirichlet en $y = 0, a$, en las placas

$$\Phi(0) = \Phi(a) = 0. \quad (4)$$

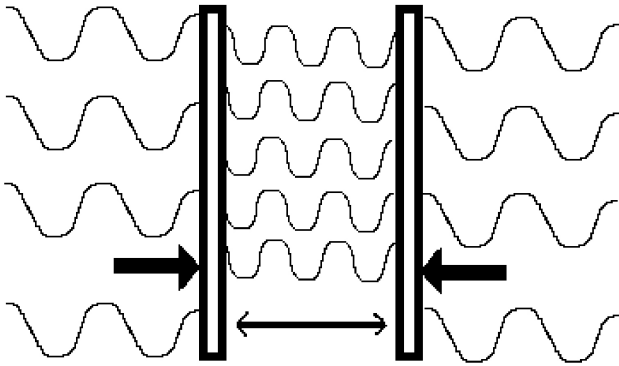


FIGURA 1. La figura representa la fuerza de Casimir de un campo electromagnético entre dos placas paralelas separadas por una distancia “a”. Las ondulaciones representan fluctuaciones de vacío, obviamente injustificable dentro de una descripción clásica del mismo.

Para continuar con el análisis de la fuerza de Casimir es necesario conocer la forma explícita de la función de Green. De la Ec. (3) se puede deducir la ecuación que satisface la función de Green

$$\mathcal{O}G(y, y', t, t') = -\frac{\delta(y - y')\delta(t - t')}{e^{-\kappa|y|}},$$

$$\mathcal{O} := \left(\partial_y^2 - \kappa \operatorname{sign}(y)\partial_y - e^{2\kappa|y|}\partial_t^2 \right), \quad (5)$$

donde

$$\operatorname{sign}(y) = \frac{y}{|y|},$$

es la función signo de y . De la geometría mostrada en la Fig. 1, introducimos la función de Green reducida $g(y, y')$ a través de la transformada de Fourier

$$G(y, y', t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(y, y', \omega). \quad (6)$$

Introduciendo la Ec. (6) en la Ec. (5), obtenemos

$$\mathcal{L}g(y, y', \omega) = -\delta(y - y'), \quad (7)$$

$$\mathcal{L} := e^{-\kappa|y|} \left(\partial_y^2 - \kappa \operatorname{sign}(y)\partial_y + e^{2\kappa|y|}\omega^2 \right). \quad (8)$$

Puede observarse que esta ecuación es invariante ante inversiones de y y por lo tanto es suficiente resolver la ecuación en la región $y > 0$, la cual está sujeta a las condiciones de frontera (4), es decir,

$$g(0, y', \omega) = g(a, y', \omega) = 0. \quad (9)$$

Para resolver (7), se emplea el método estándar de la discontinuidad [17]. El primer paso es dividir el intervalo $0 \leq y \leq a$, por un parámetro y' , donde etiquetamos a $g(y) = g_1(y)$ para $0 \leq y < y'$ y $g(y) = g_2(y)$ para $y' < y \leq a$ y además dichas funciones satisfacen la ecuación homogénea de Sturm-Liouville; esto es,

$$\mathcal{L}g_1(y) := 0, \quad 0 \leq y < y', \quad (10)$$

$$\mathcal{L}g_2(y) := 0, \quad y' < y \leq a. \quad (11)$$

Para $y = 0$, $g_1(y)$ satisface la condición de frontera impuesta a g , mientras que $g_2(y)$ satisface la condición de frontera asignada a g en $y = a$. Para este fin, es conveniente realizar el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{e^{\kappa y}}{\kappa},$$

y también redefiniendo la función

$$g = z^{\frac{1}{2}}\tilde{g}$$

y $\tilde{z} = \omega z$. El operador \mathcal{L} de la Ec. (8) toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\tilde{z}^2} \right] + \frac{1}{\tilde{z}}\partial_{\tilde{z}} + \partial_{\tilde{z}}^2. \quad (12)$$

De las Ecs. (10), (11) y (12), las soluciones genéricas para g_1 y g_2 son las funciones de Hankel de primera y segunda especie de orden 1/2. Así,

$$\tilde{g}_{1,2}(\tilde{z}, \omega) = A H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\tilde{z}) + B H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\tilde{z}). \quad (13)$$

La Ec. (13), debe satisfacer las condiciones de frontera $g(0, y') = g(a, y') = 0$, obteniendo así las siguientes relaciones:

$$g(y, y') = \begin{cases} A' e^{\frac{\kappa y}{2}} \left[\frac{H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa y}\right)}{H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)} - \frac{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa y}\right)}{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)} \right] \\ B' e^{\frac{\kappa y}{2}} \left[\frac{H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa y}\right)}{H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa a}\right)} - \frac{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa y}\right)}{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{\omega}{\kappa} e^{\kappa a}\right)} \right] \end{cases} \quad (14)$$

$$= \begin{cases} A \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y} - 1)\right], & 0 \leq y < y' \leq a, \\ B e^{\frac{\kappa a}{2}} \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y} - e^{\kappa a})\right], & 0 \leq y' < y \leq a. \end{cases} \quad (15)$$

La continuidad en $y = y'$ de la función de Green (14) requiere que se cumpla la relación

$$A \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - 1)\right] - B e^{\frac{\kappa a}{2}} \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - e^{\kappa a})\right] = 0. \quad (16)$$

Mientras la discontinuidad en la primera derivada para la función de Green, la Ec. (7) toma la forma

$$A \cos\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - 1)\right] - B e^{\frac{\kappa a}{2}} \cos\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - e^{\kappa a})\right] = -\frac{1}{\omega}. \quad (17)$$

De las Ecs. (16) y (17), se obtiene

$$A = -\frac{\sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - e^{\kappa a})\right]}{\omega \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa a} - 1)\right]}, \quad (18)$$

$$B = -\frac{\sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - 1)\right]}{\omega e^{\frac{\kappa a}{2}} \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa a} - 1)\right]}. \quad (19)$$

Sustituyendo los valores encontrados en la Ec. (15), podemos expresar a la función de Green reducida como

$$g(y, y', \omega) = -\frac{\sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y} - e^{\kappa a})\right] \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y'} - 1)\right]}{\omega \sin\left[\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa a} - 1)\right]}, \quad (20)$$

donde $y_>$ ($y_<$) es el valor mayor (menor) de y y y' . La función de Green está relacionada con el valor de expectación del vacío del campo, de acuerdo con

$$G(t, y, t', y') = i \langle \Phi(t, y) \Phi(t', y') \rangle. \quad (21)$$

Por supuesto se ha considerado un ordenamiento temporal en el valor de expectación. Para un campo escalar sin masa, el tensor de energía-momento es dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \Phi \partial_\lambda \Phi. \quad (22)$$

Ahora podemos calcular la fuerza de Casimir, con ayuda de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$f = \langle T_{yy} \rangle|_{y=a}. \quad (23)$$

Usando las Ecs. (21) y (22), el tensor de energía momento puede expresarse como

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \left[\partial_\mu \partial'_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial'_\lambda \right] \frac{1}{i} G(y, y') \Big|_{t=t', y=y'=a}, \quad (24)$$

donde la componente normal-normal del tensor de energía momento, toma la forma

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle &\sim \frac{1}{2i} \partial_{y'} \partial_y g(y, y') \Big|_{y=y'=a} \\ &\sim \frac{i}{2} e^{2\kappa a} \omega \cot \left[\frac{\omega}{\kappa} (e^{\kappa a} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, la fuerza de Casimir se expresa como

$$f = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{2} e^{2\kappa a} \omega \cot \left[\frac{\omega}{\kappa} (e^{\kappa a} - 1) \right]. \quad (26)$$

Esta fuerza corresponde a la fuerza ejercida desde el interior en la placa situada en $y = a$. Así, la fuerza neta sobre esta placa es la sustracción de la fuerza ejercida desde el interior y la fuerza ejercida desde el exterior de la placa situada en $y = a$ (por supuesto, el mismo cálculo se puede aplicar a la placa situada en $y = 0$). Para determinar la fuerza fuera de ella, por lo que se procede de forma análoga al caso de la función de Green entre placas. Para esta situación las condiciones de frontera que debe satisfacer la función de Green son: En las placas ($y = 0$ o $y = a$), la función de Green se anula, mientras que para $y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow -\infty$) debe satisfacer la condición de onda saliente (entrante) e^{iky} (e^{-iky}). Un cálculo similar a (20) proporciona la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} g_{ext}(y, y', \omega) &= \frac{1}{\omega} \sin \left[\frac{\omega}{\kappa} (e^{\kappa y} - e^{\kappa a}) \right] \\ &\times e^{i\left(\frac{\omega}{\kappa}(e^{\kappa y} - e^{\kappa a})\right)}. \end{aligned} \quad (27)$$

De forma similar a la Ec. (25), la componente normal-normal del tensor de energía-momento fuera de la placa colocada en $y = a$, toma el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_{ext} &\sim \frac{1}{2i} \partial_{y'} \partial_y g_{ext}(y, y') \Big|_{y=y'=a}, \\ &\sim \frac{\omega}{2} e^{2\kappa a}. \end{aligned} \quad (28)$$

Así, la fuerza neta sobre la placa en $y = a$ es

$$\begin{aligned} f &= \langle T_{zz} \rangle - \langle T_{zz} \rangle_{ext} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\frac{ie^{2\kappa a}}{2} \omega \cot \left[\frac{\omega}{\kappa} (e^{\kappa a} - 1) \right] - \frac{\omega e^{2\kappa a}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Para efectuar esta integral es conveniente realizar una rotación compleja en la frecuencia $\chi = i\omega$. Un simple cálculo proporciona

$$f = -2e^{2\kappa a} \int_0^\infty \frac{d\chi}{2\pi} \frac{\chi}{e^{\frac{\chi}{\kappa}(e^{\kappa a} - 1)} - 1}. \quad (30)$$

Realizando nuevamente el cambio de variable $\rho = \frac{\chi}{\kappa} (e^{\kappa a} - 1)$ y utilizando la siguiente expresión:

$$\int_0^\infty dy \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} = \Gamma(s)\zeta(s), \quad (31)$$

la fuerza de Casimir dada por (30) puede expresarse como

$$f = -\frac{\pi \kappa^2 e^{2\kappa a}}{24 (e^{\kappa a} - 1)^2} = -\frac{\pi}{24 a^2} F(\kappa a), \quad (32)$$

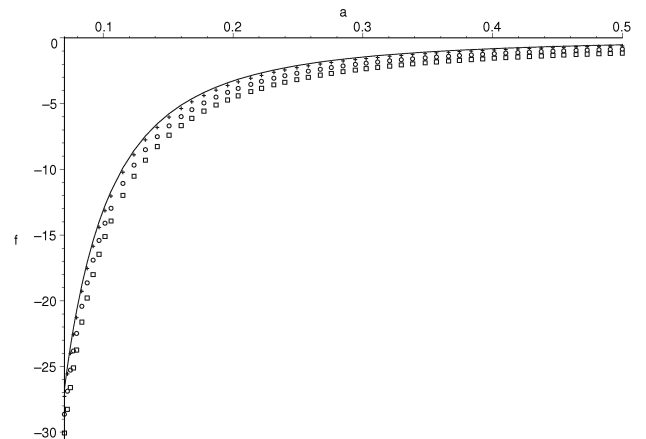


FIGURA 2. La gráfica muestra la fuerza de Casimir para un espacio plano y un espacio curvo. El eje horizontal representa la separación entre placas (a) y el eje vertical a la fuerza de Casimir (f) (donde $\hbar = c = 1$). La línea continua simboliza la fuerza de Casimir para el caso plano (34), mientras que las cruces representan la fuerza de Casimir para un espacio curvo (32) con $\kappa = 0.3$. Los cuadrados toman el valor de $\kappa = 1.7$ y los círculos toman el valor de $\kappa = 1$.

donde

$$F(\kappa a) = \frac{\kappa^2 a^2 e^{2\kappa a}}{(e^{\kappa a} - 1)^2}. \quad (33)$$

Para analizar este resultado es interesante poder compararlo con algún caso conocido. Particularmente en la métrica, si se considera el límite cuando el radio de anti de Sitter es muy pequeño, el espacio se vuelve completamente plano, por lo que la fuerza de Casimir debe tomar el siguiente valor:

$$f = -\frac{\pi}{24a^2}. \quad (34)$$

Desarrollando para argumentos pequeños ($\kappa a \ll 1$) a $F(\kappa a)$, tenemos

$$F(\kappa a) \approx 1 + \kappa a + \frac{5}{12}\kappa^2 a^2 + \dots, \quad (35)$$

e introduciendo (35) en (32), se obtiene

$$f \approx -\frac{\pi}{24a^2} \left(1 + \kappa a + \frac{5}{12}\kappa^2 a^2 + \dots \right), \quad (36)$$

donde se puede observar que a primer orden se recupera el caso plano (34), mientras que a órdenes superiores en κ se manifiesta el efecto de la curvatura. En la Fig. (2) se puede apreciar que a grandes valores de a el efecto de la curvatura no es tan notorio, mientras que a pequeños valores de a estos efectos sí se hacen presentes.

3. Conclusiones

La fuerza de Casimir obtenida en el escenario (1) es un ejemplo simple que permite mostrar de forma didáctica el tratamiento de la función de Green y además permite observar cómo los efectos de la curvatura modifican el efecto Casimir. Al tomar el límite en el cual la curvatura es pequeña $\kappa a \ll 1$, el espacio deja de ser curvo y se vuelve plano, lo cual se manifiesta también en la fuerza, debido a que en este límite se puede recuperar el caso plano (34). De forma gráfica, en (2) se aprecia que los efectos de la curvatura son más importantes a distancias muy cortas en la separación entre placas.

Para trabajos posteriores, sería interesante obtener la fuerza de Casimir empleando algún otro método como el de regularización dimensional o función zeta de Riemman para este mismo fondo. Lo relevante de dichos métodos es mostrar cómo aplicarlos o llevarlos a cabo y entender las diferencias que existen entre ellos.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la UAEH a través del convenio CONUPE 2010.

-
1. H.B.G. Casimir, *Indag. Math.* **10** (1948) 261.
 2. G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 1827.
 3. V.M. Mostepanenko, *J. Phys. Conf. Ser.* **161** (2009) 012003.
 4. G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Contemp. Phys.* **47** (2006) 131.
 5. K.A. Milton, *J. Phys., A* **37** (2004) R209.
 6. M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rept.* **353** 2001 1.
 7. A.A. Saharian. *The generalized Abel-Plana formula: Applications to Bessel functions and Casimir effect.* (2000).
 8. S.J. Rahi, T. Emig, R. L. Jaffe, and M. Kardar, *Phys. Rev., A* **78** (2008) 012104.
 9. A.A. Saharian and M.R. Setare, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 225009.
 10. E. Elizalde, A.A. Saharian, and T.A. Vardanyan, *Phys. Rev., D* **81** (2010) 124003.
 11. A.A. Saharian, *J. Phys. Conf. Ser.* **161** (2009) 012025.
 12. D.E. Krause and E. Fischbach, *Lect. Notes Phys.* **562** (2001) 292.
 13. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370.
 14. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.
 15. J.P. Norman, *Phys. Rev., D* **69** (2004) 125015.
 16. E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, and S. Ogushi, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 063515.
 17. G. Arfken and H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, London, 1995).