Comentario sobre el artículo "Separación de variables en la ecuación cinemática $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\delta\vec{r}$ y su importancia" de los autores S. Díaz-Solórzano y L.A. Gonzalez-Díaz [Rev. Mex. Fís. 56, 141–143 (2010)]

S. Rojas*
Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Venezuela,
e-mail: srojas@usb.ve

Recibido el 23 de febrero de 2011; aceptado el 7 de junio de 2011

Se presenta un comentario señalando el uso errado de la idea de separación de variable en la deducción de una importante ecuación de la cinemática de partículas. Igualmente, acotamos la presencia de errores conceptuales en la utilización de tal ecuación.

Descriptores: Investigaciones en la enseñanza de la física; matemática en física; resolución de problemas en física; razonamiento cuantitativo.

We comment on a wrong application of the separation of variable idea as applied to derive an important equation of the cinematic of particles. We also point out conceptual errors on how the pointed equation should be applied.

Keywords: Physics education research; mathematics in physics; physics problem solving; quantitative reasoning.

PACS: 01.40.gb; 01.40.Ha; 01.40.Fk

Después de leer con atención el mencionado artículo [1], hemos considerado oportuno escribir el siguiente comentario en función de enfatizar algunas ideas que se han presentado en el mismo y también alertar sobre un procedimiento erróneo desde el punto de vista matemático para derivar una importante ecuación de la cinemática de partículas.

Comenzamos por enfatizar que el procedimiento que conduce a los autores a la Ec. (5) no solo es coherente y consistente desde el punto de vista matemático, sino que la ecuación obtenida es válida para cualquier dimensión, aunque en el artículo se aplica en dos dimensiones (detalles adicionales del procedimiento se encuentran en las Secs. 5.3 y 5.4 del conocido texto de Física Vol. 1 Mecánica por Alonso y Finn [2]).

El problema se presenta con el procedimiento empleado por los autores para derivar las dos primeras ecuaciones del sistema (3) del artículo. Para ello los autores desglosan la Ec. (5) en su representación (8) y aduciendo una separación de variables llegan a su Ec. (9) de donde, por un razonamiento circular (usando las condiciones iniciales que los llevaron a la Ec. (5)) deducen que la constante de separación en su Ec. (9) es cero, obteniendo así las dos primeras ecuaciones de su sistema (3).

Para evidenciar lo erróneo del procedimiento, podemos pensar en encontrar la solución de la ecuación:

$$(2x - x^2) = -(2y - y^2) \tag{1}$$

como la ecuación es separable (el lado derecho (izquierdo) es función únicamente de y (x)), entonces podemos concluir que las únicas soluciones a la ecuación propuesta, en lugar de ser un conjunto infinito, serían $x = 0$ ó $x = 2$ con $y = 0$ ó $y = 2$.

La razón básica de porqué el procedimiento presentado en el artículo es erróneo es que la Ec. (8) del artículo es una ecuación algebraica de segundo orden y como tal su solución debe encontrarse por los métodos del álgebra, que, hasta donde hemos podido revisar, no han generado una "separación de variables" para resolver estos sistemas.

Otra alternativa para demostrar que el principio de superposición no se aplica a la Ec. (8) para obtener el sistema (9) es sustituyendo $V_x = dx/dt$ y $V_y = dy/dt$ en la Ec. (8). Esta sustitución nos deja con una ecuación no lineal, en la que ambos lados dependen de la variable temporal t, haciendo evidente la imposibilidad de recurrir al método de separación de variables para resolverla (ver por ejemplo, Sec. 2.6 de [3]).

Ahora bien, un procedimiento correcto para obtener las primeras dos ecuaciones del sistema (3) en el artículo, es escribir el sistema (4) del artículo en componentes y eliminar por separado el tiempo de cada conjunto de ecuaciones que resulta para cada coordenada. La Ec. (5) en el artículo se obtiene luego sumando estas ecuaciones. Otra manera es tomar en consideración que, por ser la aceleración constante, los movimientos en cada dirección de coordenada evolucionan por separado teniendo en común la variable temporal t. Esta observación nos permite escribir, por ejemplo para el movimiento en la coordenada x,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dx} \tag{2}$$

de donde, con a_x constante, es inmediato el resultado buscado ($v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$). Razonando en forma similar podemos derivar la ecuación respectiva en las otras dos dimensiones. Una vez establecidas las primeras dos ecuaciones del sistema (3), la Ec. (8) se convierte en la identidad $0 = 0$.

Ahora bien, explorando el artículo con mayor cuidado se encuentra en el mismo un error de mayor importancia desde el punto de vista de la física.

Se trata del error conceptual que cometen los autores al utilizar la Ec. (5) del artículo en un sistema de coordenadas curvilíneo, en el intento de los autores de aplicar la separación de variables de esa ecuación en coordenadas polares y que se presenta en el artículo como la Ec. (10). En efecto, la Ec. (5) del artículo es válida solo cuando la aceleración es constante. Siendo la aceleración un vector, es conceptualmente incorrecto descomponer la Ec. (5) en coordenadas polares porque aunque la magnitud de la aceleración puede ser constante en algunas situaciones, su dirección no lo es (los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$ dependen de su posición espacial). Así, la Ec. (10) en el artículo es incorrecta por principios de deducción, representando un gravísimo error conceptual.

Finalizamos este comentario mencionando que el ejercicio propuesto puede ser empleado para ayudar a los estudiantes a practicar lo que han aprendido en sus cursos de cálculo, lo cual pueden hacer en sus cursos de Física, acentuando así sus habilidades en razonamiento cuantitativo [4–6].

∗. Actualmente de año Sabático en el The Physics Education Research Laboratory of The University of Maine, Orono, Maine, USA.

1. S. Díaz-Solórzano y L.A. Gonzalez-Díaz, “Separación de variables en la ecuación cinemática $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ y su importancia” *Rev. Mex. Fís.* **56**, 141–143 (2010).
2. Alonso, M. y Finn, E. (1970) Física, Vol. 1 Mecánica. Fondo Educativo Interamericano.
3. Arfken, G. (1985) Mathematical Methods for Physicist, 3rd. Ed., Academic Press.
4. S. Rojas, “ On the teaching and learning of physics problem solving,” *Rev. Mex. Fís. E* **56**, 22-28 (2010).
5. S. Rojas, “Repeated Problem Solving Revisited,” *Am. J. Phys.* **77**, 487-488 (2009).
6. S. Rojas, “On the need to enhance physical insight via mathematical reasoning,” *Rev. Mex. Fís. E* **54**, 75-80 (2008).