Materia oscura escalar compleja (parte I): la versión hidrodinámica

M.A. Rodríguez-Meza[a], A. Hernández-Almada[b] y T. Matos[b]
[a]*Departamento de Física, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, Apartado Postal 18-1027, México D.F. 11801, México, e-mail: marioalberto.rodriguez@inin.gob.mx*
[b]*Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Apartado Postal 14-740, 07000 Mexico City, Mexico.*

Recibido el 28 de julio de 2011; aceptado el 5 de marzo de 2012

En este trabajo utilizamos las ecuaciones hidrodinámicas de Euler para modelar halos de materia oscura escalar compleja en el Universo, las cuales adquieren la forma de un sistema Schrödinger-Poisson en el límite Newtoniano. Mediante la transformación de Madelung, dicho sistema adopta la forma de la dinámica de un fluido, en donde interviene un potencial de auto-interacción y un potencial tipo cuántico que depende no linealmente de la densidad del fluido. En este marco teórico se hace un análisis de inestabilidad de Jeans, el cual sirve para determinar el tamaño mínimo para que el sistema sea estable, es decir, para que perturbaciones del campo escalar formen estructuras.

Descriptores: Campos escalares; materia oscura; modelo de fluido; inestabilidad de Jeans.

In this work we use the Euler hydrodynamic equations of fluids to study a model of galactic halos minimally coupled to a complex scalar field, which in the Newtonian limit they become the Schrödinger-Poisson system. Applying a Madelung transformation, this system of equations takes the form of hydrodynamics equations, where there are a self-interacting potential and a kind of quantum potential that depends non-linearly on the density of the fluid. In this theoretical framework we analyze the Jeans' instability, which is useful for finding the scale length of perturbations of the scalar field that will form structures. In other words, perturbations of the scalar field with lengths less than this threshold length, can not lead to the formation of galactic structures.

Keywords: Scalar fields; dark matter; fluid model; Jeans' instability.

PACS: 95.35.+d; 95.30.Lz; 95.30.Sf; 8.62.Gq; 98.80.Jk; 04.25.Nx

1. Introducción

En las últimas décadas se ha vivido una revolución en el conocimiento humano debido a la aparición de dos nuevos problemas fundamentales en la cosmología moderna, ambos relacionados con la formación de estructura en el Universo. El primero es una componente necesaria para la formación de estructura, es decir, para la formación de galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Este primer ingrediente es al menos el $23\,\%$ de la materia del cosmos y es generalmente llamada *materia oscura*[i]. La segunda componente es una componente que acelera el Universo constantemente. Esta última se le conoce como *energía oscura* y corresponde al $73\,\%$ de la materia del Universo y la tercera, que tan sólo representa el $4\,\%$, corresponde a la materia bariónica contenida en el modelo estándar [1-3]. Desde la aparición de estos dos primeros ingredientes, una gran cantidad de científicos se han concentrado en analizar decenas de hipótesis sobre su posible naturaleza y origen, sin embargo, los resultados no son del todo satisfactorios y el misterio hasta ahora continúa.

Una diferencia sustancial entre la materia oscura y la energía oscura es que la primera es gravitacionalmente atractiva mientras que la segunda es repulsiva, lo cual es verdaderamente extraño. En el marco del modelo estándar, no se conoce ninguna partícula elemental con propiedades tales que produzcan efectos gravitacionales repulsivos. Por lo tanto las preguntas más importantes a resolver son ¿Qué son estas componentes oscuras que dominan en el Universo? ¿Cuál es la naturaleza de estas componentes? Existen varias hipótesis que quieren dar una respuesta a estas interrogantes, la propuesta más popular es que la materia oscura es una clase de partícula supersimétrica llamada WIMP, por su siglas en inglés "Weakly Interacting Massive Particle". Para la energía oscura, el candidato más popular es sin duda la constante cosmológica, denotada por Λ. Sin embargo, ninguno de estos candidatos están exentos de problemas. Por ejemplo los WIMP's siempre se comportan como polvo en la galaxia, por lo que no hay un mecanismo real que impida que se formen halos de galaxias de cualquier tamaño y no hay nada que impida su colapso gravitacional. Es decir, la predicción del modelo ΛCDM en la formación de estructura es que los halos de materia oscura crecen jerárquicamente, por acreción y fusión de sistemas más pequeños a cada vez más grandes. Una consecuencia de esto es que la Vía Láctea actualmente debería estar rodeada por miles de pequeños subhalos, en aparente contradicción con los satélites luminosos pequeños que han sido detectados alrededor de la Vía Láctea hasta ahora. A este problema se le conoce como *problema de los satélites faltantes* [4-6]. Por otro lado la constante cosmológica es simplemente un parámetro que la teoría puede permitir pero que no está determinado. Mide la densidad de energía del espacio vacío. Pero para lograr obtener una expansión acelerada del Universo en nuestros días, se requiere que la constante cosmológica sea del orden 10^{-47} GeV^4. Si calculamos la densidad de energía del vacío, calculada como la suma de energías de punto cero de un campo cuántico de cierta masa, obtenemos que la razón de la densidad del vacío que la teoría estándar de partículas da a la densidad observada es del orden 10^{121}. Si usamos supersimetría se puede reducir esta razón en 60 órdenes de magnitud, lo que sigue siendo insuficiente [7].

1.1. Materia oscura fría

Los WIMP's son el prototipo para el modelo de materia oscura fría (CDM por sus siglas en inglés) [8]. Sus predicciones se encuentran en concordancia con las observaciones a grandes escalas ($\sim$ Mpc)^{ii}, y logra explicar diversas propiedades de las galaxias y cúmulos de galaxias. Sin embargo, a pesar de los grandes éxitos de CDM, éste presenta discrepancia a escalas menores ($\sim$ kpc). Una de ellas consiste en que los perfiles de densidad predichos por CDM son demasiado densos en el centro de las galaxias. En contraste, observaciones muy precisas muestran que las galaxias, sobre todo las enanas o las de muy bajo brillo, tienen densidades más bien con un perfil plano o casi plano. A este problema se le conoce en la literatura como el *problema de los halos picudos* [5,6].

El problema de la subestructura y el de los halos picudos se consideran fundamentales para entender la formación de estructura en el Universo [5,6]. Incluso si el modelo CDM tiene éxito, resolver estos problemas será de crucial importancia para este paradigma. Además, recientemente han surgido otras observaciones que también pueden ser un problema para el paradigma de la materia oscura fría. Éste afirma que la estructura se formó de una manera jerárquica, es decir que la estructura surgió de pequeñas semillas de excesos de densidad de materia oscura, se cree que de masas como la de la Tierra y del tamaño del sistema solar. Estas semillas se fusionan por su propia gravitación, pero al ser el Universo primitivo tan denso, las semillas chocan con otras a su alrededor y muchas veces se fusionan con otras para formar halos más grandes. Estos halos mayores continúan chocando con otros hasta formar los halos que ahora conocemos. En este paradigma, las galaxias más grandes se forman por la fusión gravitacional de otras más pequeñas. Sin embargo, han surgido varias observaciones que podrían contravenir estas hipótesis. Las primeras observaciones consisten en el análisis de cientos de galaxias [9], en donde se encuentra que seis de las características de las galaxias, como son brillo superficial, masa, tamaño del halo, etc. están correlacionadas, es decir, si se conoce una de éstas se pueden deducir las otras propiedades restantes. Esta observación no puede ser explicada con el modelo jerárquico, pues no hay manera de obtener galaxias con características tan semejantes como las que se observan, después de una serie de choques y fusiones de halos de forma prácticamente aleatoria. Es mucha casualidad que dos galaxias del mismo tamaño sean tan semejantes, después de que ambas tuvieron un historial de choques y fusiones que podrían ser completamente distinto. Con la hipótesis del modelo jerárquico estas semejanzas son muy difíciles de explicar. Más aun, recientemente se encontró que la fuerza de gravedad de la materia oscura de todas las galaxias a un radio determinado es la misma para todas las galaxias [10], una semejanza universal difícil de explicar con el modelo jerárquico.

La segunda observación que parece contravenir el modelo jerárquico consiste en que al examinar galaxias con los nuevos telescopios gigantes de reciente construcción, según el modelo jerárquico, las galaxias más grandes tardaron mayor tiempo en formarse. Por otro lado, simulaciones numéricas [11] demuestran con gran detalle el tamaño de las galaxias que se formaron en cada etapa del Universo. Al hacer una comparación de estas simulaciones con algunas galaxias formadas en tiempos correspondientes a $z = 1.3$, en Ref. 11 encuentran una gran discrepancia entre lo observado y lo predicho. Esta observación apunta al hecho de que las galaxias se formaron más temprano a lo predicho por la hipótesis de la materia oscura fría.

La tercera observación es sobre la dispersión de velocidades de galaxias a corrimientos al rojo muy grande, por ejemplo, $z = 2.186$, es decir galaxias muy viejas. Muchas de estas galaxias son muy compactas y con masas estelares similares a las galaxias elípticas de hoy día pero con tamaños más pequeños. En la Ref. 12 se analizó una de estas galaxias y se encontró que la dispersión de velocidades es muy alta, 500^{+165}_{-95} km s^{-1}, lo que es consistente con lo compacto y masivo de la galaxia. La relación inferida entre el tamaño, r_e, la masa dinámica, $M_{\rm din}$, y la dispersión de velocidades, σ_v, es $\sigma_v^2 \propto M_{\rm din}/r_e$. Es decir, la dispersión de las velocidades del gas y de las estrellas de estas galaxias indican que las galaxias elípticas ya tenían la masa que actualmente tienen, pero ya estaban más concentradas y pequeñas. Las galaxias parecen haberse formado muy temprano, y estas observaciones sobre la dispersión de velocidades indican que eran más compactas. Si estas observaciones se confirman, indicarían una fuerte contradicción con el modelo de materia oscura fría. De cualquier forma, si se descubre alguna partícula supersimétrica que pueda servir de sostén a la materia oscura fría, este modelo deberá resolver todas estas anomalías existentes con las observaciones.

1.2. Materia oscura escalar

Para darle vuelta a estas fallas en el modelo de materia oscura fría han surgido algunas alternativas, entre las que se encuentra la hipótesis de materia oscura escalar [13-15]. Esta teoría tiene algunas características muy interesantes que podrían resolver algunas anomalías de la materia oscura fría. A pesar de que la hipótesis de la materia oscura escalar es casi idéntica al modelo de materia oscura fría a escalas cosmológicas, tiene fuertes diferencias a escalas galácticas. La idea de este modelo es la siguiente. En un principio existía un campo escalar con una masa muy ligera del orden de $m_\phi \sim 10^{-22}$ eV, esparcido homogéneamente en el Universo. Después de la inflación del Universo, este campo escalar se condensó a diferentes escalas y de alguna manera inició un colapso gravitacional. Aquí surge la primera diferencia sustancial con el modelo de materia oscura fría. Debido a que las semillas de los halos de las galaxias se formaron por condensación, estos halos se esperan de todos los tamaños. Las fluctuaciones primordiales inician el proceso de colapso gravitacional de estos halos en un tiempo muy temprano y por eso vamos a ver halos bien formados en tiempos anteriores a los predichos por la materia oscura fría. Este esquema es sólo hipotético, uno de los objetivos de este proyecto es ver si este es el caso. Se espera entonces que el campo escalar evolucione. Ya sabemos que en la época de fluctuaciones lineales este campo se comporta exactamente como materia oscura fría [16], pero el colapsarse y formar halos de galaxias es un proceso muy diferente al paradigma en boga. Este estudio ya se ha elaborado para un halo esférico [14,17,18] la idea es llevar a cabo un estudio numérico completo, que nos pueda dar una guía para ver si este modelo es correcto o debemos modificarlo.

En este trabajo reformulamos el modelo de materia oscura escalar para estudiar halos de materia oscura de galaxias. Para este caso, se sabe que la dinámica tanto del campo escalar como de la geometría del espacio-tiempo se describen bien en el límite newtoniano y al sistema resultante se le conoce como *Schrödinger-Poisson* [14]. Algunos estudios de este sistema los podemos encontrar en Refs. 14, 17 y 19. Sin embargo, uno de los inconvenientes de resolver la ecuación de Schrödinger reside en su naturaleza de tipo parabólico, lo cual la hace complicada de resolver numéricamente. Esta complicación consiste en que se necesitan métodos implícitos para tener estabilidad numérica. Por ello, proponemos hacer uso de la transformación de Madelung [20] para expresar nuestro sistema en una forma hidrodinámica, en la cual están presentes un potencial de auto-interacción y un potencial tipo cuántico[iii] que es no lineal en la densidad. Esta representación es de tipo hiperbólico, y es posible implementar métodos numéricos explícitos en forma de leyes de conservación, lo cual no es tan costoso computacionalmente como los implícitos. Otra alternativa es usar la técnica de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH por sus siglas en inglés), que fue diseñada para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Otra ventaja de esta representación, es que podemos obtener de manera sencilla un criterio en que el sistema Schrödinger-Poisson es estable.

Con estos objetivos en mente, dividimos este trabajo como sigue. En la Sec. 2 se deduce el sistema Schrödinger-Poisson a partir de un modelo de materia oscura escalar. En la Sec. 3 expresamos dicho sistema en su formulación hidrodinámica usando la transformación de Madelung. En la Sec. 4 hacemos el estudio del análisis de inestabilidad de Jeans, el cual nos da un criterio para ver bajo qué condiciones el sistema Schrödinger-Poisson es inestable. Después se dan las conclusiones donde se resumen las principales aportaciones de este trabajo.

2. Aproximación de campo débil de las ecuaciones de Einstein

La hipótesis que vamos a estudiar es que la materia oscura es un campo escalar complejo gobernado por la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0\,, \tag{1}$$

y la respectiva ecuación para ϕ^*, que se obtiene al calcular el complejo conjugado de (1). Aquí $\hbar$ es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz y m es la masa del campo escalar. Una manera de obtener la ecuación de Klein-Gordon la podemos ver en Refs. 21 y 22.

Dado que en relatividad general, al campo gravitacional se le asocia con la curvatura del espacio-tiempo, entonces campos gravitacionales débiles corresponderán a espacios-tiempos aproximadamente planos. En tal caso consideremos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2}$$

con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ la métrica de Minkowski. Donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, que la descomponemos como una métrica plana más una perturbación. Aquí estamos en la libertad de poner una norma para $\bar{h}^{\mu\nu}$. Si pedimos que

$$\partial_\nu \partial^\nu \xi^\mu = \partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu} \tag{3}$$

lo cual es una ecuación de onda para ξ^μ con fuente $\partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu}$, obtenemos que

$$\partial_\nu \bar{h}'^{\nu\mu} = 0\,. \tag{4}$$

Tomando esta norma, las ecuaciones de Einstein quedan

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\beta\nu} = -\kappa T_{\beta\nu}\,, \tag{5}$$

donde $T_{\beta\nu}$ es el tensor de energía-momento y $\partial_\alpha\partial^\alpha$ es el operador D'Alambertiano en el espacio plano, es decir, es el operador que aparece en la ecuación de una onda. Estas son las ecuaciones de campo para un campo gravitacional débil en su forma estándar. A esta expresión se le conoce como *límite de campo débil*.

Una aplicación particularmente importante de la aproximación de campo débil es el límite newtoniano de la relatividad general. Este límite no sólo corresponde a campos débiles sino también a pequeñas velocidades de las fuentes, en donde se satisface que $T^{00} \gg T^{ij}$ [23]. En tal caso podemos considerar sólo la componente $\bar{h}^{00}$ e ignorar los demás términos [24]. Para un análisis detallado de la aproximación newtoniana de las ecuaciones de Einstein véase [25], la cual es la referencia de donde nos basaremos para presentar los siguientes resultados. Las ecuaciones de campo se reducen entonces a

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G}{c^2} m^2 \phi\phi^*\,, \tag{6}$$

donde hemos tomado

$$\kappa = 32\pi G/c^4 \quad \text{y} \quad T_{00} \approx \frac{1}{2} m^2 c^2 \phi\phi^*.$$

Además, para velocidades pequeñas, la derivada temporal, en el operador D'Alambertiano, es más pequeña que las derivadas espaciales, así que la ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G}{c^2} m^2 \phi\phi^*\,, \tag{7}$$

donde el operador ∇^2 es el Laplaciano 3-dimensional. Comparando este resultado con la ecuación de campo de Newton $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$ concluimos que en este límite $\bar{h}^{00} = -4U/c^2$ y $\bar{h}^{i0} = \bar{h}^{ij} = 0$ (para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$) y $m^2\phi\phi^*$ corresponde a la fuente. Regresando a la definición de $\bar{h}_{\alpha\beta}$ en términos de $h_{\alpha\beta}$, tenemos que $h^{00} = h^{ii} = -2U/c^2$. La expresión final del límite newtoniano de las ecuaciones de Einstein la presentaremos en (13) debido que aún nos falta ver cómo se reduce ϕ en este límite y lo mostraremos en la siguiente sección.

La métrica del espacio-tiempo en la aproximación newtoniana es

$$ds^2 = -(c^2 + 2U)dt^2 + (1 - 2U/c^2)d\vec{r} \cdot d\vec{r}\,, \tag{8}$$

donde $d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Cabe mencionar que el parámetro que tomaremos para hacer la expasión en serie es la cantidad adimensional $U/c^2 \ll 1$, lo cual es la aproximación a campo débil.

2.1. La ecuación de tipo Schrödinger

En esta sección haremos la aproximación newtoniana de la ecuación de Klein-Gordon dando lugar a una ecuación tipo Schrödinger. Por simplicidad tomemos en los cálculos de esta sección $c = \hbar = 1$ y retomaremos las unidades originales del resultado bajo ciertos cambios que abajo daremos. Sustituyendo (8) en (1)

$$\begin{aligned} g^{00}\partial_0\partial_0\phi + g^{ii}\partial_i\partial_i\phi - m^2\phi = \\ -(1+2U)^{-1}\partial_t^2\phi + (1-2U)^{-1}\nabla^2\phi - m^2\phi \approx \\ (1-2U)\partial_t^2\phi - (1+2U)\nabla^2\phi + m^2\phi = 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Para hacer de manera correcta el límite newtoniano de la ecuación de Klein-Gordon tomemos[iv] [21]

$$\phi = \psi(\vec{x}, t)e^{-imt}\,. \tag{10}$$

Sustituyendo en (9) y teniendo en cuenta que $U \ll 1$, obtenemos

$$-\frac{1}{2m}\ddot{\psi} + i\dot{\psi} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi - mU\psi = 0 \tag{11}$$

donde $\ddot{\psi} = \partial_t^2\psi$ y $\dot{\psi} = \partial_t\psi$. Para un campo que varía lentamente en el tiempo se tiene que $\ddot{\psi} \approx 0$, por lo que

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + mU\psi\,, \tag{12}$$

la cual es una ecuación que tiene la forma de la ecuación de Schrödinger y por ende la llamaremos *ecuación de tipo Schrödinger*. Además, hemos regresado a las unidades originales haciendo $m \to mc^2/\hbar$, $\nabla^2 \to c^2\nabla^2$ y $U \to U/c^2$.

La razón del por qué se dice que la Ec. (12) es de tipo Schrödinger y no la ecuación de Schrödinger que describe la mecánica cuántica es muy simple, la naturaleza del campo ϕ en (1) es clásico y por lo tanto también lo es ψ. Sin embargo, los métodos de solución que se usan para resolver la ecuación de Schrödinger pueden ser aplicados aquí.

Usando (10) las ecuaciones de campo de Einstein (7) se reducen a la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho\,, \tag{13}$$

siendo U el potencial gravitacional debido al campo escalar con fuente $\rho = m^2\psi\psi^*$. Al conjunto acoplado dado por (12) y (13) se le conoce en la literatura como *sistema Schrödinger-Poisson*. Algunos estudios de este sistema los podemos ver en las Refs. 14, 17 y 19.

3. Modelo hidrodinámico Modelo hidrodinámico del sistema Schrödinger-Poisson

Tomando como motivación la formulación hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger que rige la mecánica cuántica debida a Madelung [20], posteriormente ampliada por Bohm [26], expresaremos (12) en una representación de tipo hidrodinámico. En esta formulación de Madelung, la ecuación de Schrödinger, la cual es una ecuación diferencial lineal y compleja, se reemplaza por una densidad de probabilidad y su campo de velocidades.

3.1. Versión hidrodinámica de la ecuación de tipo Schrödinger

Aplicando la transformación de Madelung [20]

$$\psi = R(\vec{r}, t)e^{iS(\vec{r}, t)}\,, \tag{14}$$

donde R y S son funciones reales, en (12) y después de algo de álgebra se obtiene una ecuación compleja donde la parte imaginaria está dada por

$$\hbar\partial_t R = -2\frac{\hbar^2}{2m}\nabla S \cdot \nabla R - \frac{\hbar^2}{2m}R\nabla^2 S\,, \tag{15}$$

y la correspondiente parte real es

$$-\hbar R\partial_t S = mUR - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R + \frac{\hbar^2}{2m}R(\nabla S)^2\,. \tag{16}$$

Es conveniente definir las siguientes variables de campo

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla S\,, \tag{17}$$

$$\rho = m^2 R^2\,. \tag{18}$$

Ahora, multiplicando (15) por R y usando la identidad $2R\nabla S \cdot \nabla R = \nabla \cdot (R^2\nabla S) - R^2\nabla^2 S$ y las definiciones (17) y (18) obtenemos la ecuación de continuidad

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0\,, \tag{19}$$

siendo ρ una densidad y $\rho\vec{v}$ un flujo de la densidad ρ que entra o sale de una región. Ahora dividiendo por R y luego aplicando el gradiente a la Ec. (16) y usando la identidad

$\nabla(\nabla S \cdot \nabla S) = 2(\nabla S \cdot \nabla)\nabla S$ y las definiciones (17) y (18) obtenemos

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla \left(U - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) . \qquad (20)$$

Las Ecs. (19) y (20) son la *formulación hidrodinámica* de la ecuación de campo de tipo Schrödinger. Estas ecuaciones indican que la evolución temporal del campo $\psi(\vec{r}, t)$ es equivalente al flujo de un "fluido" de densidad $\rho(\vec{r}, t)$ cuyas partículas de masa m, se mueven con una velocidad $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sujetos a una fuerza derivada de un potencial externo $U(\vec{r}, t)$ más una fuerza adicional debido al potencial cuántico[v] $Q(\vec{r}, t)$, el cual depende de la densidad del fluido [20,27,28] y lo definimos como

$$Q(\vec{r}, t) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} . \qquad (21)$$

Es justo el potencial cuántico el que hace la diferencia entre un sistema hidrodinámico clásico y el sistema cuántico que estamos estudiando. La Ec. (20) es justo la de Burgers si despreciamos este pontencial tomando el límite clásico $\hbar \to 0$. Observemos que S es la fase de la función de onda ψ, la cual es univaluada, es decir, de (14) es inmediato ver que S es una función periódica tal que en todo punto $S(p') = S(p) + 2\pi n$, y por lo tanto,

$$\oint m\vec{v} \cdot d\vec{r} = \hbar \oint \nabla S \cdot d\vec{r} = \hbar \int_p^{p'} dS = 2\pi\hbar n \, , \qquad (22)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ para toda trajectoria "cerrada". Esto implica que el sistema hidrodinámico tiene vórtices, algo que ya es conocido y observado en condensados de Bose-Einstein en el laboratorio (ver por ejemplo [29]). Este resultado es una *condición de compatibilidad* entre la versión hidrodinámica (19) y (20) y la ecuación de tipo Schrödinger, esto es, una solución $(\rho, \vec{v})$ le corresponde una ψ bien definida y de manera unívoca.

No obstante que el fluido descrito por el sistema (20) es irrotacional debido a que la velocidad es un gradiente, el "fluido" descrito por (19) y (20) tiene una diferencia esencial respecto a un fluido ordinario: si en la Ec. (22) hacemos la aproximación de que a lo largo de la trayectoria de integración usamos la magnitud promedio de $\vec{v}$ a lo largo de la trayectoria, tenemos que en un movimiento rotacional, la magnitud de $\vec{v}$ decrece cuando la distancia al centro crece, y viceversa. Esto es debido a la condición de compatibilidad (22) (ver [29]). Más detalles y discusión sobre estos puntos pueden ser consultados en Ref. 30 y 31.

3.2. Hidrodinámica: Schrödinger-Poisson

La dinámica del campo escalar se convierte en un sistema hidrodinámico, constituido por ecuaciones semejantes a las que describen a un fluido no viscoso. El conjunto Schrödinger-Poisson en esta formulación es

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad (23)$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla \left(U - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) \qquad (24)$$

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho \, . \qquad (25)$$

Este sistema representa la dinámica de un "fluido" auto interactuante en equilibrio con un potencial tipo cuántico. Haciendo una analogía estructural de las ecuaciones nos damos cuenta que no tenemos un término de presión como en los fluidos normales, sino que tenemos un término que depende de la densidad, por lo que es razonable pensar que estamos tratando con una "ecuación de estado" barotrópica. En la literatura cuando la presión $p = 0$ se dice que el sistema es polvo, y aunque no es muy realista, es buena aproximación en algunos casos especiales. Así es como se modela la materia oscura en el modelo ΛCDM.

Sin embargo, dado que la fuerza de tipo cuántico es opuesta a la fuerza de auto-interacción, podemos pensar que es debido a una presión efectiva del fluido y expresarla como

$$-\nabla Q = \frac{1}{\rho} \nabla p_q(\rho) = \frac{\hbar^2}{4m^2 \rho} \nabla(\nabla^2 \ln \rho) \, , \qquad (26)$$

donde $p_q \neq 0$ es una presión efectiva.

4. Ecuaciones hidrodinámicas en el regimen lineal e inestabilidad de Jeans

En esta sección estudiamos la estabilidad del sistema Schrödinger-Poisson en el régimen lineal en su forma hidrodinámica. Este análisis está basado en el estudio de la inestabilidad de Jeans para el colapso gravitacional de un gas protoestelar (más detalles pueden ser consultados en Ref. 32).

James Jeans demostró que en un fluido homogéneo e isotrópico se pueden generar pequeñas fluctuaciones en la densidad y en la velocidad [33]. Sus cálculos fueron hechos en el contexto de un fluido estático. En particular mostró que las fluctuaciones de densidad pueden crecer en el tiempo si los gradientes de presión que ocurren en esa región donde está la fluctuación de densidad son menores que a la auto-interacción gravitacional. No es sorprendente que tal efecto exista ya que la gravedad es una fuerza atractiva, si las fuerzas de presión son más pequeñas que las gravitatorias, una región con mayor densidad que la de fondo atrae materia de sus alrededores y llega a ser más densa. Mientras más densa es la región, más materia atraerá, resultando en el colapso de una fluctuación de la densidad y generando un objeto ligado gravitacionalmente. El criterio para ver cuando puede ocurrir este colapso o no es calculando la longitud de Jeans del fluido y lo explicamos enseguida.

Antes de calcular la longitud de Jeans con el suficiente detalle matemático, hagamos un cálculo de orden de magnitud para ver su significado físico. Consideremos que en un instante dado hay una fluctuación esférica de radio λ, homogénea, densidad positiva $\rho_1 > 0$ y masa M situado en un medio de densidad media ρ_0. Las fluctuaciones crecerán si la fuerza de auto-interacción por unidad de masa, F_g, excede la fuerza opuesta por unidad de masa que surge de la presión F_p

$$F_g \approx \frac{GM}{\lambda^2} \approx G\rho\lambda > F_p \approx \frac{p}{\rho\lambda} \approx \frac{v_s^2}{\lambda}\,, \tag{27}$$

donde v_s es la velocidad del sonido. Esta relación implica que la fluctuación crece si $\lambda > v_s(G\rho)^{-1/2}$. Esto establece la existencia de la longitud de Jeans $\lambda_J \approx v_s(G\rho)^{-1/2}$.

4.1. Ecuaciones hidrodinámicas linealizadas

Para hacer el estudio de la inestabilidad de Jeans es necesario linealizar el sistema hidrodinámico (23)–(25). Este sistema de ecuaciones admite la solución estática con $\rho = \rho_0$, $\vec{v} = 0$ y $\nabla U = 0$. Sin embargo, si $\rho \neq 0$, el potencial gravitacional debería variar espacialmente, es decir, una distribución homogénea de ρ estática puede ser inestable ante perturbaciones y puede estar globalmente expandiéndose o contrayéndose [23]. La incompatibilidad de un Universo estático con el principio cosmológico en gravedad newtoniana se da también en el universo estático de Einstein. De cualquier modo, cuando consideramos un universo en expansión los resultados de Jeans no cambian cualitativamente. Para ver esto busquemos una solución al sistema hidrodinámico (23)–(25) que representa una pequeña perturbación a la solución estática

$$\rho \approx \rho_0 + \epsilon\rho_1\,, \quad \vec{v} \approx \epsilon\vec{v}_1\,, \quad U \approx U_0 + \epsilon U_1\,, \tag{28}$$

donde las variables de perturbación ρ_1, $\vec{v}_1$ y U_1 son funciones del espacio y tiempo y $\epsilon \ll 1$. Sustituyendo (28) en (23)–(25) y tomando los términos a primer orden de ϵ obtenemos el respectivo conjunto linealizado

$$\partial_t\rho_1 + \rho_0\nabla\cdot\vec{v}_1 = 0\,, \tag{29}$$

$$\partial_t\vec{v}_1 = -\nabla U_1 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla\left[\nabla^2(\rho_1/\rho_0)\right]\,, \tag{30}$$

$$\nabla^2 U_1 = 4\pi G\rho_1\,. \tag{31}$$

Estudiemos las soluciones del sistema linealizado (29)-(31) buscando soluciones en la forma de ondas planas

$$\delta u_i = \delta_{i0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}\,, \tag{32}$$

donde las perturbaciones δu_i con $i = 1,2,3$ corresponden a ρ_1, $\vec{v}_1$ y U_1, y las amplitudes δ_{i0} las denotaremos por D para la densidad, $\vec{V}$ para la velocidad y por $\mathcal{U}$ para el potencial gravitacional. El vector $\vec{r}$ es el vector posición, $\vec{k}$ es el vector de onda y ω es la frecuencia angular de oscilación, el cual en general es un número complejo. Usando (32) en (29)-(31) y definiendo $\delta_0 \equiv D/\rho_0$ obtenemos

$$\omega\delta_0 + \vec{k}\cdot\vec{V} = 0 \tag{33}$$

$$\omega\vec{V} + \mathcal{U}\vec{k} + \frac{\hbar^2}{4m^2}\delta_0 k^2\vec{k} = 0\,, \tag{34}$$

$$k^2\mathcal{U} + 4\pi G\rho_0\delta_0 = 0\,. \tag{35}$$

Brevemente consideremos las soluciones con $\omega = 0$, es decir, las que no dependen del tiempo. Es evidente de (33), que el vector de onda $\vec{k}$ es perpendicular a la velocidad $\vec{v}_1$. Juntando estas expresiones obtenemos

$$k = \left(\frac{16\pi G\rho_0 m^2}{\hbar^2}\right)^{1/4}\,. \tag{36}$$

Ahora tratemos las soluciones dependientes del tiempo, $\omega \neq 0$. Derivemos (29) respecto a t y considerando que $\vec{v}_1$ es una función tal que $\partial_t\nabla\cdot\vec{v}_1 = \nabla\cdot(\partial_t\vec{v}_1)$, y luego sustituimos las expresiones (30) y (31) para obtener

$$\partial_t^2\rho_1 - 4\pi G\rho_0\rho_1 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla^2\nabla^2\rho_1 = 0\,. \tag{37}$$

Sustituyendo (32) en (37) se llega a una "relación de dispersión"

$$\omega^2 = \frac{\hbar^2}{4m^2}k^4 - 4\pi G\rho_0\,. \tag{38}$$

Es importante señalar que la Ec. (37) no es una ecuación de onda.

Esta relación de dispersión es análoga a la que encontró Jeans [33,34], siendo la diferencia que la forma del potencial cuántico hace que la magnitud del vector de onda tenga exponente 4. Para soluciones estables, pedimos que $\omega > 0$, lo cual implica

$$k > k_J \equiv \left(\frac{16\pi G\rho_0 m^2}{\hbar^2}\right)^{1/4}\,, \tag{39}$$

donde definimos el vector de onda de Jeans k_J. En base a este resultado la longitud de onda de Jeans, $\lambda_J = 2\pi/k_J$, está dada por

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi^3\hbar^2}{G\rho_0 m^2}\right)^{1/4}\,. \tag{40}$$

Entonces para longitudes de onda mayores que la longitud de onda de Jeans tenemos que la perturbación crece exponencialmente. En base a la definición de la longitud de Jeans, reescribimos la relación de dispersión como

$$\omega = \pm\frac{\hbar}{2m}k^2\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^4\right]^{1/2}\,. \tag{41}$$

Recordemos que la velocidad del sonido en la teoría de Jeans se define como $v_s^2 \equiv \partial p/\partial\rho$. Por analogía en nuestro caso definimos una cantidad que llamaremos la velocidad cuántica del sonido o velocidad de grupo[vi] como

$$\tilde{v}_s \equiv \frac{\hbar}{m}k\,. \tag{42}$$

De (32), (33)-(35) y (42) obtenemos

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \delta_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)}\,, \tag{43}$$

$$\vec{v}_1 = \mp\frac{1}{2}\frac{\vec{k}}{k}\tilde{v}_s\delta_0\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^4\right]^{1/2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)}\,, \tag{44}$$

$$U_1 = -\delta_0\frac{1}{4}\tilde{v}_s^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^4 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)}\,. \tag{45}$$

Cuando $\lambda > \lambda_J$ la frecuencia ω es imaginaria

$$\omega = \pm i(4\pi G\rho_0)^{1/2}\left[1-\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^4\right]^{1/2}. \tag{46}$$

En este caso las expresiones anteriores quedan

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \delta_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t}, \tag{47}$$

$$\vec{v}_1 = \mp i\frac{\vec{k}}{k^2}\delta_0(4\pi G\rho_0)^{1/2}\left[1-\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^4\right]^{1/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t}, \tag{48}$$

$$U_1 = -\frac{1}{4}\delta_0\tilde{v}_s^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^4 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t}. \tag{49}$$

las cuales representan una solución de ondas estacionarias, cuyas amplitudes crecen en el tiempo para el caso $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}+|\omega|t}$. La escala de tiempo característico para la evolución de esta amplitud se define como

$$\tau \equiv |\omega|^{-1} = (4\pi G\rho_0)^{-1/2}\left[1-\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^4\right]^{-1/2}. \tag{50}$$

Para escalas $\lambda \gg \lambda_J$, el tiempo característico τ coincide con el tiempo de colapso de caída libre[vii], dado por τ_{ff}=$(4\pi G\rho_0)^{-1/2}$, pero cuando $\lambda \longrightarrow \lambda_J$, este tiempo diverge.

Se define la masa de Jeans como la masa contenida en una esfera de radio $\lambda_J/2$ y densidad media ρ_0, esto es

$$M_J = \frac{1}{6}\pi\rho_0\left(\frac{\pi^3\hbar^2}{G\rho_0 m^2}\right)^{3/4}. \tag{51}$$

La masa de Jeans es la masa mínima de la perturbación para que ésta aumente con el tiempo.

Un estudio de la inestabilidad de Jeans tanto en el contexto cosmológico como el local referente al modelo de axiones para materia oscura se encuentra en Ref. 35. En este trabajo se menciona que en el régimen lineal, los condensados de Bose-Einstein de axiones y CDM son indistinguibles para todas las escalas de interés observacional. Sin embargo en el régimen no lineal de formación de estructura, estas dos teorías difieren en el potencial cuántico.

4.2. Estimación de la masa del campo escalar

Despejando la masa del campo escalar de la Ec. (40) obtenemos

$$m = \left(\frac{\pi^3\hbar^2}{G\rho_0\lambda_J^4}\right)^{1/2}, \tag{52}$$

Hagamos un cálculo de orden de magnitud para la masa del campo escalar, vamos a utilizar

$$\hbar \sim 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \rightarrow \hbar^2 \sim 10^{-68}\,\mathrm{J^2\cdot s^2}, \tag{53}$$

$$G \sim 10^{-11}\,\mathrm{m^3/Kg\cdot s^2} \tag{54}$$

Según la teoría de formación de estructura estándar, un valor de la longitud de Jeans λ_J puede ser fijado para la época en que la radiación y la materia son iguales teniendo un factor de escala $a \simeq 1/3200$. En este tiempo, $\rho \simeq 3\times10^{10}$ $\mathrm{M_\odot} a^{-3}/\mathrm{Mpc}^3$ [36], y la longitud de Jeans $\sim \mathcal{O}(10^2)$ pc [37]. Aquí $\mathrm{M_\odot} = 1.9891\times10^{30}$ Kg es la masa del Sol. Entonces tomando la densidad $\rho_0 \sim 10^{-14}$ $\mathrm{Kg/m^3}$ y $\lambda_J \sim 10^2$ pc tenemos

$$m \sim 10^{-57}\ \mathrm{Kg} \tag{55}$$

o en unidades de $\mathrm{eV/c^2}$ obtenemos

$$m \sim 10^{-22}\ \mathrm{eV/c^2}. \tag{56}$$

Por lo tanto, con el cálculo de la estabilidad de Jeans, necesitamos que la masa del campo escalar sea $\sim 10^{-22}$ $\mathrm{eV/c^2}$, lo cual es un resultado obtenido en Refs. 38 y 39. De la definición de la masa de Jeans obtenemos

$$M_J \sim 10^{10}\ \mathrm{M_\odot}. \tag{57}$$

5. Conclusiones

En este trabajo hemos revisado el modelo de materia oscura escalar para describir halos de materia oscura. A partir de la acción de Einstein-Hilbert acoplado con un campo escalar complejo se hizo la aproximación de campo débil y luego se calculó el límite para campos que varían lentamente en el tiempo conocido como límite newtoniano. El sistema resultante se conoce como *sistema Schrödinger-Poisson*. Luego, mediante la transformación de Madelung, la ecuación de Schrödinger, ecuación lineal y compleja, se convierte en un sistema no lineal que describe la dinámica de campos reales, una densidad y su campo de velocidades: *formulación hidrodinámica*. Cabe mencionar que dicha transformación no altera la ecuación de Poisson.

En el contexto hidrodinámico, aparece de manera clara un potencial de tipo cuántico el cual genera una fuerza opuesta a la fuerza gravitacional. Entonces mediante un estudio de la inestabilidad de Jeans se obtuvo un criterio para que una perturbación de la densidad colapse y estas fuerzas se equilibren. Bajo esta condición y valores adecuados se calculó la masa del campo escalar.

Por otro lado, la dinámica de las variables de campo es de naturaleza hiperbólica lo cual es de suma importancia para la implementación de esquemas en forma de leyes de conservación usando método explícitos de diferencias finitas, los cuales se piensan usar en futuros trabajos. Además, dada la similitud con las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos usar las técnicas que han sido diseñadas para resolverlas como el método de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH). Este último método es muy interesante porque no requiere la implementación de condiciones a la frontera (numéricas). Este trabajo está en curso y será reportado en un futuro.

El sistema Schrödinger-Poisson con simetría esférica, se ha estudiado en el contexto de estrellas de bosones y condensados de Bose-Einstein, sin embargo no en la versión hidrodinámica. Las soluciones numéricas con dicha simetría se abordarán en trabajos futuros dado que su solución representa un trabajo complejo.

i. Se dice oscura porque sólo interacciona gravitacionalmente con la materia ordinaria referida en la literatura como la materia bariónica.

ii. 1 pársec (pc) $\approx$3.26 años luz

iii. En la representación hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger, el único término donde aparece la constante de Planck es en el potencial cuántico y por ello su nombre. Cabe mencionar que por la analogía de las ecuaciones a lo largo del trabajo a dicho término lo llamaremos potencial de tipo cuántico.

iv. Una alternativa para realizar la aproximación newtoniana de la ecuación de Klein-Gordon se puede ver en la Ref. 25.

v. En analogía a la representación hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger, el potencial Q lo llamaremos potencial cuántico.

vi. Esta cantidad tiene unidades de velocidad, pero no es en realidad una velocidad, es sólo una manera de llamarla. La velocidad de grupo se define como $v_g \equiv \partial\omega/\partial k$ y nos describe la velocidad de una perturbación física. Si $\lambda \ll \lambda_J$ entonces $\tilde{v}_s$ si coincide con la expresión formal de velocidad de grupo. Debemos señalar que $\tilde{v}_s$ al tener unidades de velocidad es una velocidad de referencia o típica en el sistema y su correspondencia con velocidad de sonido o de grupo debe tomarse con reserva.

vii. El tiempo de colapso libre es el tiempo necesario para que un sistema colapse bajo su propia atracción gravitacional en ausencia de fuerzas opuestas.

1. G. Hinshaw *et al*., *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 225.
2. J. Dunkley *et al*., *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 306.
3. E. Komatsu *et al*., *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 18.
4. A.S. Font, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **417** (2011) 1260.
5. A. Klypin *et al*., *Astrophys. J.* **522** (1999) 82.
6. B. Moore *et al*., *Astrophys. J.* **524** (1999) L19.
7. D. Sapone, *Int. J. Mod. Phys.* **25** (2010) 5253. arXiv:astro-ph/1006.5694v2.
8. G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J Rees, *Nature* **311** (1984) 517.
9. M.J. Disney *et al*., *Nature* **455** (2008) 1082.
10. G. Gentile, B. G. Famaey, H. Zhao, and P. Salucci, *Nature* **461** (2009) 627.
11. C. A. Collins *et. al*., *Nature* **458** (2009) 603.
12. P. G. van Dokkum, M. Kriek, and M. Franx, *Nature* **460** (2009) 717.
13. F. Guzmán and T. Matos, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) L9. arXiv:gr-qc/9810028.
14. F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 024023. arXiv:astro-ph/0303440.
15. T. Matos, ArXiv: 0909.3634 (2010).
16. T. Matos and L. A. Ureña-López, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 063506. arXiv:astro-ph/0006024.
17. F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 124033. arXiv:gr-qc/0404014.
18. F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, *Astrophys. J.* **645** (2006) 814. arXiv:astro-ph/0603613
19. A. Bernal and F. S. Guzmán, Phys. Rev. D **74** (2006) 063504. arXiv:astro-ph/0608523.
20. E. Madelung, *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 322.
21. W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*. (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
22. L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, second edition. (Cambridge University Press, Cambrigde, UK, 1996).
23. S. Weinberg, *Gravtiation and Cosmology*. (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972).
24. M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, first edition. (Oxford University Press, Oxford, UK, 2008).
25. A. Bernal, *Estudio Dinámico de Campos Escalares Autogravitantes*. (Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN, 2007).
26. D. Bohm, *Phys. Rev.* **85** (1952) 166.
27. J. H. Weiner and A. Askar, *J. Chem. Phys.* **54** (1971) 3534.
28. J. H. Weiner and A. Askar, *J. Chem. Phys.* **54** (1971) 1108.
29. C.J. Pethick & H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
30. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*. (Oxford University Press, Oxford, 2003).
31. H.E. Wilhelm, *Phys. Rev. D* **1** (1970) 2278.
32. P.H. Chavanis, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 043531. arXiv: 1103.2050.
33. J. H. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*. (Cambridge University Press, Cambrigde, UK, 1929).
34. E.W. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*. (Addison-Wesley, New York, 1990).
35. P. Sikivie and Q. Yang. *Phisical Review Letters* **103** (2009) 111301. arXiv:0901.1106.
36. D.N. Spergel *et al*., *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377.
37. M.P. Silverman and R.L. Mallett, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 633.
38. T. Matos *et. al.*, ArXiv: astro-ph/0102419v2 (2002).
39. Jae-Weon Lee and Sooil Lim, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **01** (2010) 007.