

Caracterización de la regla de colisión de Huygens-Newton mediante una cantidad vectorial invariante Galileo

S. Díaz-Solórzano^{a,c} y L.A. González-Díaz^b

^aDepartamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas,
Edo. Miranda 89000, Venezuela.

^bCentro de Física IVIC. 21827, Caracas 1020A, Venezuela.

^cCentro de Investigaciones de Matemática y Física, Departamento de Matemáticas y Física,
Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela,
e-mail: srafael@ipc.upel.edu.ve, lgonzale@ivic.gob.ve

Recibido el 1 de agosto de 2011; aceptado el 29 de mayo de 2012

Haciendo uso de una cantidad vectorial, la cual denominamos vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$, replanteamos la regla de colisión de Huygens-Newton. El vector de colisión contiene información sobre el proceso de interacción y de la dispersión de las partículas, además de ser invariante y covariante Galileo. En términos del vector de colisión, queda explícito el sentido geométrico y energético de la regla de colisión de Huygens-Newton.

Descriptores: Colisión inelástica; regla de colisión; vector de colisión.

We restate the collision rule Huygens - Newton in terms of a vector quantity we call the collision vector $\vec{A}(\epsilon)$. The collision vector is invariant and covariant Galileo. It contains information about the process of interaction and scattering of the particles. The geometric and energetic sense of the collision rule Huygens-Newton in terms of the collision vector is shown.

Keywords: Inelastic collision; collision rule; collision vector.

PACS: 01.55+b; 45.20df; 45.20dh; 45.50.Tn

1. Introducción

El tratamiento clásico de colisiones se encuentra normalmente discutido en los textos básicos de física [1], donde se presta mayor atención a las colisiones elásticas e inelásticas en una y dos dimensiones, dejando a un lado el análisis de colisiones en situaciones intermedias, las cuales denominaremos *colisiones semi-elásticas*. En tales situaciones resulta muy útil el uso de la regla de colisión de Huygens-Newton, la cual toma en cuenta el balance energético y la transferencia de momento lineal durante la colisión. La regla en cuestión es poco considerada en los textos básicos de física. Algunos autores [2,6] la emplean en situaciones unidimensionales; otros [4,5,7] la usan para analizar las colisiones semi-elásticas bidimensionales. En estas situaciones se hace uso de coordenadas para descomponer las cantidades vectoriales involucradas en el proceso de colisión. Aunque este enfoque es utilizado también en colisiones elásticas, es posible encontrar en la literatura [6,8,9] otros enfoques que no hacen uso de tal descomposición. Dicha regla puede ser reformulada en términos de la cantidad vectorial $\vec{A}(\epsilon)$, que denominaremos *vector de colisión*, la cual contiene información referente al proceso de interacción y al de dispersión de las partículas después del choque. El vector de colisión, además de ser explícitamente invariante y covariante Galileo, tiene la ventaja de que facilita el cálculo de las velocidades después de la colisión. En tal sentido, planteamos una caracterización alternativa para las colisiones semi-elásticas haciendo uso del vector $\vec{A}(\epsilon)$, la cual no requiere de la descomposición en coordenadas para la obtención de las velocidades después de la colisión.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. 2 se plantea la regla de colisión de Huygens-Newton en términos del vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$; en la Sec. 3 se replantea el problema de la colisión entre dos partículas o cuerpos en términos del vector $\vec{A}(\epsilon)$, probando a su vez que dicho vector es proporcional al vector de colisión para un choque elástico, encontrado por Díaz y González en Ref. 6. Adicionalmente, se obtiene la cantidad Q en términos del vector de colisión y de otras cantidades que son invariantes Galileanas. Finalmente, en la Sec. 4, se presentan algunos ejemplos académicos que ilustran la utilidad didáctica de esta caracterización alternativa de las colisiones.

2. Regla de colisión de Huygens-Newton y el vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$

Durante el proceso de colisión entre dos cuerpos, cuyas superficies están en contacto, surge una interacción mediada por una fuerza impulsiva \vec{N} , la cual resulta interna al sistema físico conformado por ambos cuerpos, así la reacción $-\vec{N}$ actuará sobre uno de los cuerpos. Esta fuerza puede ser considerada normal a las superficies de contacto cuando los cuerpos no sufren deformación después de la colisión, de manera que la orientación de la fuerza impulsiva permanece inalterada durante el proceso de colisión; esto se conoce con el nombre de colisión rígida [10]. En esta situación la intensidad de la interacción durante el proceso de colisión (la norma del vector \vec{N}) aumenta rápidamente desde el instante de tiempo t_1 , cuando inicia el contacto, hasta alcanzar un valor máximo en un tiempo t_c posterior a t_1 . En el instante

t_c , los cuerpos se mueven con igual velocidad \vec{v} y comienza el proceso de restitución. A partir del instante de tiempo t_c , la norma del vector \vec{N} comienza a disminuir hasta que los cuerpos se separan por completo en el instante t_2 , posterior a t_c . El proceso dado en el intervalo de tiempo $t_2 - t_c$ se ve interrumpido para el caso de una colisión completamente inelástica, donde ambos cuerpos se mueven con la misma velocidad después de dicha colisión. En cambio, en una colisión completamente elástica se da el proceso de restitución sin pérdida de la energía cinética del sistema conformado por ambos cuerpos. El caso intermedio surge cuando la fuerza \vec{N} y su reacción realizan un trabajo que no se compensa entre sí durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ mientras ocurre el contacto; manifestándose la pérdida de energía cinética en forma de calor o sonido.

Sean m_1 y m_2 las masas de los cuerpos que colisionan entre sí, los cuales adquieren velocidades \vec{V}_1 y \vec{V}_2 , respectivamente, en el instante t_1 . Los impulsos de cada cuerpo durante el lapso de tiempo $t_c - t_1$ vienen dados por

$$\vec{I}_{10} = \int_{t_1}^{t_c} \vec{N}(t) dt = m_1(\vec{v} - \vec{V}_1) \tag{1a}$$

$$\vec{I}_{20} = - \int_{t_1}^{t_c} \vec{N}(t) dt = m_2(\vec{v} - \vec{V}_2), \tag{1b}$$

respectivamente. Siendo \vec{v} la velocidad adquirida por ambos cuerpos en el instante t_c . De las expresiones mostradas en (1) observamos que $\vec{I}_{20} = -\vec{I}_{10}$. Usando esta igualdad se obtiene que la cantidad \vec{v} corresponde a la velocidad del centro de masa del sistema en el instante t_c , con dicha correspondencia se logra eliminar la velocidad \vec{v} en (1a), obteniéndose la siguiente expresión

$$\vec{I}_{10} = -\mu(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad \text{donde} \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Sean \vec{U}_1 y \vec{U}_2 las velocidades de los cuerpos de masa m_1 y m_2 , respectivamente, en el instante t_2 . Procediendo de manera similar para obtener el impulso del cuerpo de masa m_1 durante el lapso de tiempo $t_2 - t_c$, se tiene que

$$\vec{I}_{1f} = -\mu(\vec{U}_2 - \vec{U}_1). \tag{3}$$

Cuando la dirección de la fuerza de contacto \vec{N} permanece inalterada durante la colisión, resulta claro que la dirección de los impulsos de cada cuerpo a lo largo de \vec{N} permanece constante. Por tal razón, la transferencia de momento lineal sobre la dirección de la fuerza de contacto se preserva en una colisión rígida, lo cual conduce a que la proyección del impulso durante el proceso de la deformación (\vec{I}_{10}) en la dirección de \vec{N} sea antiparalela a la proyección del impulso durante el proceso de restitución (\vec{I}_{1f}) en la dirección de la fuerza de contacto \vec{N} ; es decir,

$$\vec{I}_{1f} \cdot \hat{n} = -\epsilon \vec{I}_{10} \cdot \hat{n} \tag{4}$$

donde, en una colisión rígida, el versor asociado a la interacción viene dado por

$$\hat{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{N}(t)}{|\vec{N}(t)|}. \tag{5}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (4) se llega a

$$(\vec{U}_2 - \vec{U}_1) \cdot \hat{n} = -\epsilon(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \hat{n}. \tag{6}$$

La constante de proporcionalidad ϵ en (4) es considerada positiva y recibe el nombre de *coeficiente de restitución*, algunas veces es llamada *coeficiente de elasticidad*. Éste depende de las propiedades del material que componen los cuerpos colisionantes, de sus masas, formas y velocidades relativas [10,11]. La expresión (6) recibe el nombre de *regla de colisión de Huygens-Newton* [3-5,10]. Esta regla puede ser reformulada en términos de una cantidad vectorial que denominaremos *vector de colisión*, y será denotada como $\vec{A}(\epsilon)$. En tal sentido, (6) puede ser escrita como

$$\vec{A}(\epsilon) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{A}(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{U}_1 - \vec{U}_2 + \epsilon(\vec{V}_1 - \vec{V}_2). \tag{7}$$

Dicho vector es invariante y covariante Galileo, debido a que éste se construye a partir de la combinación lineal de la diferencia entre las velocidades de los cuerpos antes y después de la colisión. Siendo los coeficientes de esta combinación lineal ϵ y la unidad, respectivamente. Además, se exige que el coeficiente de restitución sea un escalar ante el grupo de Galileo, tal como ocurre con las masas de los cuerpos. Esto puede verse al considerar un marco de referencia K' que se mueve respecto al sistema laboratorio K con velocidad \vec{V} , de manera que las velocidades de los cuerpos de masa m_1 y m_2 antes y después de la colisión respecto al sistema K' son, respectivamente,

$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}, \tag{8a}$$

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}, \tag{8b}$$

$$\vec{U}'_1 = \vec{U}_1 - \vec{V}, \tag{8c}$$

$$\vec{U}'_2 = \vec{U}_2 - \vec{V}. \tag{8d}$$

Al sustituir (8) en (7) se llega a la expresión

$$\vec{A}(\epsilon) = \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 + \epsilon(\vec{V}'_1 - \vec{V}'_2) \equiv \vec{A}'(\epsilon'),$$

cuya covarianza queda garantizada si $\epsilon = \epsilon'$; es decir, cuando el coeficiente de restitución transforme como un escalar ante el grupo de Galileo.

La colisión entre dos cuerpos puede clasificarse según la transferencia de energía cinética, la cual depende del valor que tome el coeficiente de restitución. Cuando $\epsilon = 1$ se dice que la colisión es elástica, conservándose la energía cinética del sistema. Cuando $\epsilon = 0$ la colisión es inelástica o plástica, en dicho caso la transferencia de energía cinética del sistema al entorno es máxima. Estos números corresponden a la cota superior e inferior del coeficiente de restitución, respectivamente. En una situación intermedia, se tiene que $0 < \epsilon < 1$.

2.1. Regla de colisión para choques elásticos

Al considerar la conservación de la energía cinética de dos cuerpos de masa m_1 y m_2 antes y después de la colisión, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{V}_1^2 + m\vec{V}_2^2 &= \vec{U}_1^2 + m\vec{U}_2^2, \\ (\vec{V}_1 - \vec{U}_1) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{U}_1) &= m(\vec{U}_2 - \vec{V}_2) \cdot (\vec{U}_2 + \vec{V}_2), \end{aligned} \quad (9)$$

donde se ha definido la *masa relativa* como $m \stackrel{\text{def}}{=} m_2/m_1$. El término $\vec{V}_1 - \vec{U}_1$ que aparece en (9) puede ser reemplazado por $m(\vec{U}_2 - \vec{V}_2)$, en virtud de la conservación del momento lineal, resultando

$$(\vec{U}_2 - \vec{U}_1) \cdot \hat{n}_e = -(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \hat{n}_e. \quad (10)$$

Donde el versor \hat{n}_e , asociado a la dirección de la interacción en una colisión elástica, viene dado por

$$\hat{n}_e = \frac{\vec{U}_2 - \vec{V}_2}{|\vec{U}_2 - \vec{V}_2|} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{|\Delta\vec{p}_2|} = \frac{\vec{N}(t)}{|\vec{N}(t)|} \equiv \hat{n}, \quad (11)$$

el cual coincide con el versor indicado en (5). Para establecer la última igualdad de (11) se ha considerado que \vec{N} es la fuerza de contacto que actúa sobre el cuerpo de masa m_2 , y adicionalmente la condición de choque rígido. Comparando (10) con (6) queda claro que el coeficiente de restitución para una colisión completamente elástica es igual a la unidad.

2.2. Regla de colisión para choques inelásticos o plásticos

En una colisión inelástica o plástica los cuerpos que colisionan quedarán “unidos” después del choque, entendiéndose por ello que los cuerpos se mueven con la misma velocidad. En tal sentido, se cumple la condición $\vec{U}_1 = \vec{U}_2$, lo cual conduce a que (6) tome la siguiente forma

$$-\epsilon \hat{n} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = 0. \quad (12)$$

La igualdad dada en (12) es válida para cualquier dirección \hat{n} y velocidades \vec{V}_1 y \vec{V}_2 que puedan tener los cuerpos antes de colisionar, concluyéndose que $\epsilon = 0$. En otras palabras, la condición indicada en (12) establece que en una colisión inelástica la velocidad relativa $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ no es ortogonal a la dirección de la interacción asociada al contacto \hat{n} . En esta situación, se observa que el vector de colisión para choque inelásticos o plásticos es idénticamente nulo; es decir, $\vec{A}(0) = \vec{0}$.

3. Replanteando el problema de colisión

El problema de colisión consiste en determinar las velocidades de las partículas después de un choque, y con dicha información se puede obtener la energía cinética transferida debido al proceso de interacción durante la colisión. Para determinar las velocidades de un choque elástico se requieren

tanto la conservación del momento lineal como la conservación de la energía cinética. En cambio, para un choque inelástico el problema se centra en resolver únicamente la conservación del momento lineal, ya que después de la colisión todas las partículas se mueven con la misma velocidad. No obstante, para las colisiones semi-elásticas las velocidades son obtenidas al resolver de manera simultánea la conservación de la cantidad de movimiento y la regla de colisión de Huygens-Newton, esta última puede ser sustituida por el vector de colisión. En tal sentido, el problema de hallar las velocidades después de una colisión entre dos cuerpos se resuelve partiendo del siguiente sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{cases} \vec{U}_1 + m\vec{U}_2 = \vec{V}_1 + m\vec{V}_2, \\ \vec{U}_1 - \vec{U}_2 = \vec{A}(\epsilon) - \epsilon(\vec{V}_1 - \vec{V}_2). \end{cases} \quad (13)$$

La primera ecuación de (13) es justamente la conservación de la cantidad de movimiento, y la segunda corresponde a la definición del vector de colisión expresada en (7). Las velocidades que se obtienen de resolver (13) son

$$\vec{U}_1 = \frac{1 - \epsilon m}{1 + m} \vec{V}_1 + \frac{(1 + \epsilon)m}{1 + m} \vec{V}_2 + \frac{m}{1 + m} \vec{A}(\epsilon), \quad (14a)$$

$$\vec{U}_2 = \frac{\epsilon + 1}{1 + m} \vec{V}_1 + \frac{m - \epsilon}{1 + m} \vec{V}_2 - \frac{1}{1 + m} \vec{A}(\epsilon). \quad (14b)$$

Por otra parte, la velocidad del centro de masa antes de la colisión viene dada por

$$\vec{V}_{\text{CM}} = \frac{1}{1 + m} \vec{V}_1 + \frac{m}{1 + m} \vec{V}_2. \quad (15)$$

Con esta igualdad las expresiones mostradas en (14) pueden ser llevadas a la siguiente forma

$$\vec{U}_1 = (1 + \epsilon) \vec{V}_{\text{CM}} - \epsilon \vec{V}_1 + \frac{\mu}{m_1} \vec{A}(\epsilon), \quad (16a)$$

$$\vec{U}_2 = (1 + \epsilon) \vec{V}_{\text{CM}} - \epsilon \vec{V}_2 - \frac{\mu}{m_2} \vec{A}(\epsilon), \quad (16b)$$

donde μ se encuentra definido en (2) y corresponde a la *masa reducida* del sistema formado por los dos cuerpos. Las expresiones indicadas en (16) exhiben claramente el carácter covariante, ya que al sustituir las transformaciones indicadas en (8), junto a la transformación de Galileo para la velocidad del centro de masa, $\vec{V}'_{\text{CM}} = \vec{V}_{\text{CM}} - \vec{V}$ en (16), se llega a la misma forma funcional que tiene (16) pero con las cantidades medidas en el marco de referencia K' .

3.1. Construcción del vector de colisión para la condición de choques rígidos

La forma concreta del vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$ depende de la ley de interacción entre los cuerpos y de la dispersión de los mismos. Para determinar dicho vector bajo la condición de choques rígidos, nos limitaremos a la búsqueda de un “*potencial de calibre*” \vec{B} consistente con la regla de colisión de

Huygens-Newton (7), cuando el versor \hat{n} se encuentra orientado a lo largo de la transferencia de momentum del cuerpo de masa m_2 ; es decir, dicho versor queda determinado por la expresión (11). La construcción del vector $\vec{A}(\epsilon)$ en términos de \vec{B} , compatible con (7), viene dada por la proyección del potencial de calibre sobre la dirección asociada a la interacción de contacto durante la colisión; esto es,

$$\vec{A}(\epsilon) = [\mathbb{1} - \hat{n}\hat{n}](\vec{B}) = \vec{B} - (\vec{B} \cdot \hat{n})\hat{n}. \quad (17)$$

Donde $\hat{n}\hat{n}$ corresponde al operador que proyecta en la dirección del versor \hat{n} ; es decir, $\hat{n}\hat{n}(\vec{B}) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{B})$. Y el símbolo $\mathbb{1}$ representa al operador identidad, el cual verifica la propiedad $\mathbb{1}(\vec{B}) = \vec{B}$. De manera que el término contenido dentro del paréntesis de (17) es un operador que proyecta en la dirección perpendicular al versor \hat{n} . Por otra parte, dicho versor puede ser reemplazado por el indicado en (11). Esto presupone que el contacto entre las superficies de los cuerpos que colisionan ocurra en un punto, y que la fuerza de interacción debido al contacto es perpendicular a dichas superficies. Por consiguiente, la regla de colisión (7) puede ser escrita de la siguiente manera

$$\vec{A}(\epsilon) \cdot (\vec{U}_2 - \vec{V}_2) = 0. \quad (18)$$

Sustituyendo (14b) en (18), se obtiene

$$\vec{A}(\epsilon) \cdot [(\epsilon + 1)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) - \vec{A}(\epsilon)] = 0. \quad (19)$$

Reemplazando, dentro del corchete de (19), al vector $\vec{A}(\epsilon)$ dado en (17), y considerando la regla de colisión de Huygens-Newton (7), resulta

$$\vec{A}(\epsilon) \cdot [(\epsilon + 1)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) - \vec{B}] = 0. \quad (20)$$

La solución más general de (20) es

$$\vec{B} = (\epsilon + 1)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) + \lambda\hat{n}, \quad (21)$$

siendo λ una constante arbitraria que llamaremos *calibre*, de manera que el vector \vec{B} es dependiente del calibre que se fije. La independencia del calibre λ para el vector de colisión se evidencia al sustituir (21) en (17), de lo que resulta

$$\vec{A}(\epsilon) = (\epsilon + 1)[(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) - (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \hat{n}\hat{n}], \quad (22)$$

el cual no depende del valor que se escoja para λ . La expresión (21) contiene todos los casos posible que resultan de resolver (20): (I) El vector de colisión es idénticamente nulo; es decir, $\vec{A}(\epsilon) = \vec{0}, \forall \epsilon$, lo cual ocurre en colisiones unidimensionales, así como en una colisión inelástica o plástica, cuando $\epsilon = 0$. En esta situación, se tiene que

$$\hat{n} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|}. \quad (23)$$

(II) El término dentro del corchete en (20) se anula cuando se elige $\lambda = 0$ en (21).

3.2. Conservación de la energía en choques rígidos

La ley de conservación de la energía para una colisión entre dos cuerpos bajo la condición de choques rígidos se establece al agregar un término energético que compense la energía liberada o absorbida por el sistema debida al proceso de interacción en la colisión. A dicho término lo denotaremos con la letra Q , así

$$K_0 \stackrel{\text{def}}{=} K_f + Q \quad \therefore \quad Q = K_0 - K_f. \quad (24)$$

En otras palabras, la cantidad Q mide la transferencia de energía cinética absorbida o liberada por el sistema debido al proceso de colisión. Cuando Q es positivo (negativo) el choque es *endoérgico* (*exoérgico*) y a mayor Q más inelástico será el choque. En una colisión semi-elástica e inelástica la energía cinética se transforma parcial o totalmente, respectivamente, en energía interna; la cual es liberada (absorbida) por el sistema cuando el choque es endoérgico (exoérgico) [3,8]. El objetivo de esta sección es calcular la cantidad (24) y demostrar que el tipo de colisiones tratadas en este trabajo son endoérgicas. Para ello se determinará la energía cinética después de la colisión usando las expresiones indicadas en (14) ó (16),

$$K_f = \frac{1}{2}m_1|\vec{U}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{U}_2|^2, \\ = K_0 + \frac{\mu}{2} [(\vec{A} - \epsilon(\vec{V}_1 - \vec{V}_2))^2 - (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2]. \quad (25)$$

De manera que

$$Q = \frac{\mu}{2} [(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 - (\vec{A}(\epsilon) - \epsilon(\vec{V}_1 - \vec{V}_2))^2], \quad (26)$$

al sustituir (22) en (26) se llega al siguiente resultado

$$Q = \frac{\mu}{2}(1 - \epsilon^2)|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 \cos^2 \theta. \quad (27)$$

Siendo θ el ángulo formado entre los vectores $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ y \hat{n} .

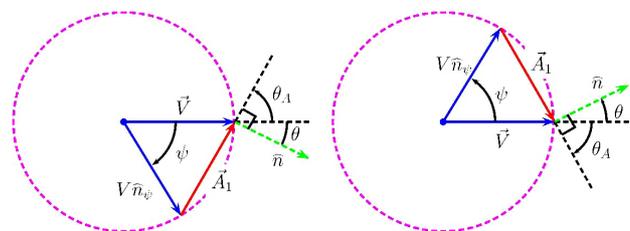


FIGURA 1. Construcción geométrica del vector de colisión \vec{A}_1 cuando θ_e es descendente (izquierda) y cuando es ascendente (derecha).

4. Ejemplos que ilustran el análisis de colisiones mediante el vector $\vec{A}(\epsilon)$

A continuación, resolvemos, haciendo uso del vector de colisión, algunos problemas académicos que surgen de considerar colisiones bidimensionales entre dos partículas o discos rígidos. Para ello, conviene darle una interpretación geométrica al vector de colisión (22), para lo cual se requiere escribir dicho vector de la siguiente manera

$$\vec{A}(\epsilon) = \frac{\epsilon + 1}{2} [\vec{V} - V\hat{n}_\psi] \equiv \frac{\epsilon + 1}{2} \vec{A}_1. \tag{28}$$

Siendo $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ la velocidad relativa de la partícula incidente. Además, el versor \hat{n}_ψ , que llamaremos *vector de incidencia de Landau* [12], toma la siguiente forma concreta,

$$\hat{n}_\psi \stackrel{\text{def}}{=} (2\hat{V} \cdot \hat{n})\hat{n} - \hat{V}. \tag{29}$$

La descomposición dada en (28) permite escribir las velocidades (14) como las presentadas por Landau y Lifshitz en Ref. 9, con la condición $\epsilon = 1$. Por otra parte, el vector \vec{A}_1 en la expresión (28), dado por el término dentro del corchete de dicha expresión, corresponde al vector de colisión para choques elásticos. En tal sentido, todos los choques semi-elásticos pueden ser estudiados a partir de la construcción del vector de colisión \vec{A}_1 para choques elásticos, construcción que analizamos en la Ref. 6.

El vector de colisión para choques elásticos \vec{A}_1 en (28) puede interpretarse geoméricamente formando una circunferencia de radio $|\vec{V}|$, tal como se muestra en la Fig. 1. El ángulo del versor \hat{n}_ψ respecto a la dirección de incidencia es denotado por ψ , encontrándose en el semiplano inferior (superior) si la partícula m_2 es dispersada por encima (debajo) de la dirección de incidencia. Los ángulos que forman el vector de colisión dado en (7) y el versor \hat{n} dado en (11), respecto a la dirección de incidencia, los denotaremos por θ_A y θ , respectivamente. Es claro que ambos vectores son perpendiculares entre sí, tal como lo indica la regla de colisión de Huygens-Newton (7). Esta construcción permite conocer la dirección y la norma del vector de colisión elástica \vec{A}_1 . De hecho, a partir de la Fig. 1 se tiene que los ángulos internos del triángulo isósceles inscrito en la circunferencia guardan la siguiente relación

$$\psi = \pi - 2\theta_A. \tag{30}$$

De la condición de ortogonalidad (7), entre el vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$ y el versor \hat{n} , se tiene que

$$\theta_A = \frac{\pi}{2} - \theta. \tag{31}$$

Sustituyendo (30) en (31), resulta

$$\psi = 2\theta. \tag{32}$$

Finalmente, la norma del vector de colisión \vec{A}_1 coincide con el arco sustentado por los vectores \vec{V} y $V\hat{n}_\psi$, de lo que se tiene

$$|\vec{A}_1| = 2|\vec{V}| \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = 2|\vec{V}| \sin\theta. \tag{33}$$

Con esta construcción geométrica se logra determinar la dirección del versor de incidencia de Landau \hat{n}_ψ y el vector de colisión para choques elásticos \vec{A}_1 . Por otra parte, de la Fig. 1 se observa que el ángulo entre el vector $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ y el versor \hat{n} es θ , por consiguiente este ángulo es el involucrado en (27).

La colisión clásica más sencilla de resolver es aquella donde un cuerpo o una partícula se dirige hacia otra que se encuentra en reposo. Al cuerpo o partícula que incide se le denomina *objeto proyectil o incidente*, mientras que el otro cuerpo se le denomina *objeto blanco o centro dispersor*. Esta situación siempre puede conseguirse considerando la colisión en un marco de referencia donde una de las partículas se encuentra en reposo. En esta situación, el ángulo θ corresponde a la dispersión de la partícula blanco [ver Ec. (11)]; es decir, $\theta \equiv \theta_2$, mientras que la dispersión del objeto proyectil θ_1 está relacionado con ψ (ángulo que determina la dirección del vector de incidencia de Landau), mediante

$$\tan\theta_1 = \frac{\vec{U}_1(\epsilon) \cdot \hat{j}}{\vec{U}_1(\epsilon) \cdot \hat{i}} = \frac{\sin(\psi)}{\lambda(\epsilon, m) - \cos(\psi)}, \tag{34}$$

donde el parámetro $\lambda(\epsilon, m)$ es definido positivo

$$\lambda(\epsilon, m) = \frac{2 + m(1 - \epsilon)}{1 + \epsilon} > 0. \tag{35}$$

De la expresión (34) es posible obtener las razones trigonométricas que se indican a continuación

$$\cos(\psi) = \lambda \sin^2\theta_1 - |\cos\theta_1| \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\theta_1}, \tag{36a}$$

$$\sin(\psi) = \frac{\lambda}{2} \sin(2\theta_1) + |\sin\theta_1| \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\theta_1}. \tag{36b}$$

Obsérvese que las expresiones dadas en (36) son compatibles con el hecho de que los cuerpos o las partículas se dispersan formando un ángulo recto cuando la masa relativa y el coeficiente de restitución son iguales a la unidad. Adicionalmente, con dichas relaciones se puede determinar el vector de colisión dado en (28), conociendo la dispersión del objeto blanco, debido a que se conoce la dirección del versor \hat{n}_ψ . Ahora, examinemos algunas situaciones concretas.

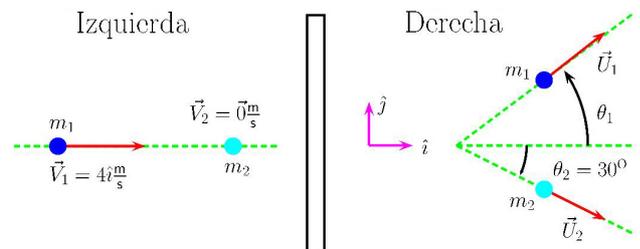


FIGURA 2. A la izquierda (derecha) se muestra la situación antes (después) de la colisión entre dos partículas con diferentes masas.

4.1. Colisión semi-elástica bidimensional entre dos partículas conociendo la dispersión del blanco

Consideremos una partícula de masa $m_1 = 2$ Kg que incide horizontalmente con una rapidez de 4 m/s, sobre otra partícula de masa $m_2 = 3$ Kg, inicialmente en reposo. Después de la colisión la partícula de masa m_2 se dispersa formando un ángulo de 30° respecto a la dirección de incidencia, tal como se muestra en la Fig. 2. En este caso, $\theta \equiv \theta_2 = 30^\circ$ y descendente, por lo que se utiliza la construcción geométrica a la izquierda de la Fig. 1, a partir de ésta se extraen las expresiones (31) y (33). Así, la norma del vector colisión y su dirección vienen dadas por $|\vec{A}_1| = 4$ m/s y $\theta_A = 60^\circ$, respectivamente. Con esta información y el diagrama ubicado a la izquierda de la Fig. 1 se llega al siguiente resultado

$$\vec{A}_1 = |\vec{A}_1| [\cos \theta_A \hat{i} + \sin \theta_A \hat{j}] = [2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (37)$$

Sustituyendo (37) en (28) y luego insertando el resultado de la sustitución en (14), se obtienen las velocidades de las partículas después del choque; esto es,

$$\vec{U}_1(\epsilon) = \left[\frac{11 - 9\epsilon}{5} \hat{i} + \frac{3\sqrt{3}(\epsilon + 1)}{5} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (38a)$$

$$\vec{U}_2(\epsilon) = \left[\frac{6(\epsilon + 1)}{5} \hat{i} - \frac{2\sqrt{3}(\epsilon + 1)}{5} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (38b)$$

Si m_2 se dispersa por encima de la dirección de incidencia, contrario a lo indicado en la Fig. 2, lo que tendríamos es una reflexión sobre la dirección de incidencia, por consiguiente el resultado que se obtendría coincide con el obtenido en (38) pero cambiando el versor \hat{j} por $-\hat{j}$. Por otra parte, la energía transferida debida al proceso de colisión es

$$Q = (1 - \epsilon^2) \frac{36}{5} \text{ Joul}. \quad (39)$$

Si la colisión es completamente elástica, hacemos $\epsilon = 1$ en (39) y (38) para obtener la conservación de la energía cinética y las velocidades de las partículas después del choque elástico, las cuales resultan ser

$$\vec{U}_1(1) = \left[\frac{2}{5} \hat{i} + \frac{6\sqrt{3}}{5} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (40a)$$

$$\vec{U}_2(1) = \left[\frac{12}{5} \hat{i} - \frac{4\sqrt{3}}{5} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (40b)$$

4.2. Colisión semi-elástica bidimensional entre dos partículas conociendo la dispersión del proyectil

Al considerar la situación en la cual el ángulo de 30° corresponde a la dispersión de la masa m_1 respecto a la dirección de incidencia (esto es, $\theta_1 = 30^\circ$), entonces de las relaciones indicadas en (36) se llega a las siguientes razones trigonométricas

$$\cos(2\theta_2) = \frac{\lambda - \sqrt{12 - 3\lambda^2}}{4}, \quad (41a)$$

$$\sin(2\theta_2) = \frac{\sqrt{3}\lambda + \sqrt{4 - \lambda^2}}{4}. \quad (41b)$$

En este caso el vector de colisión depende de los parámetros m y ϵ , a través de λ . De acuerdo con el diagrama mostrado en la Fig. 1, el vector de colisión viene dado por (28) cuando $\vec{V} = 4\hat{i}$ y $\hat{n}_\psi = \cos(2\theta_2)\hat{i} - \sin(2\theta_2)\hat{j}$, resultando

$$\vec{A}(\epsilon) = 2(\epsilon + 1) [(1 - \cos(2\theta_2))\hat{i} - \sin(2\theta_2)\hat{j}]. \quad (42)$$

Con dicho vector se obtienen las velocidades después del choque, para ello basta sustituir (42) en (14). En particular, cuando $\epsilon = 1$ se tiene que $\lambda = m^{-1} = 2/3$, resultando $\theta_2 \approx 65,3^\circ$, y las velocidades después de la colisión completamente elástica vienen dada por

$$\vec{U}_1(1) = \frac{2}{5} [(3 + 2\sqrt{6})\hat{i} + (2\sqrt{2} + \sqrt{3})\hat{j}] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (43a)$$

$$\vec{U}_2(1) = \frac{2}{5} [(7 - 2\sqrt{6})\hat{i} - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})\hat{j}] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (43b)$$

4.3. Colisión inelástica o plástica entre partículas

En una colisión inelástica o plástica entre partículas, cuya situación inicial es como la mostrada a la izquierda de la Fig. 2, estaríamos tentados a hacer $\epsilon = 0$ en (38). Lo cual conduce a que las velocidades después del choque son distintas, contrario a lo que se esperaría en una colisión de este tipo. El error en este procedimiento radica en que la interacción que condujo al vector de colisión (37) es diferente a la que conduce al caso de choque inelástico, en el cual no basta con hacer $\epsilon = 0$ en (14) sino también $\vec{A}(0) = \vec{0}$. Por esta razón, las velocidades de las partículas mostradas en la referida figura después de una colisión inelástica o plástica están dadas por

$$\vec{U}_1(0) = \vec{U}_2(0) = \frac{8}{5} \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (44)$$

Resultado que puede obtenerse directamente de la conservación de la cantidad de movimiento.

4.4. Colisión entre partículas de igual masa

Considerando la misma colisión planteada en la Sec. 4.1 con las masas de las partículas iguales, se tiene que el vector de colisión (37) no cambia, y al sustituirlo en (14) resulta que las velocidades de las partículas después de la colisión son

$$\vec{U}_1(\epsilon) = \left[\frac{5 - 3\epsilon}{2} \hat{i} + \frac{(\epsilon + 1)\sqrt{3}}{2} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (45a)$$

$$\vec{U}_2(\epsilon) = \left[\frac{3(\epsilon + 1)}{2} \hat{i} - \frac{(\epsilon + 1)\sqrt{3}}{2} \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (45b)$$

El coseno del ángulo con que se dispersan entre sí ambas partículas viene dado por

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2}{|\vec{U}_1| |\vec{U}_2|} = \frac{\sqrt{3}(1 - \epsilon)}{[4 + 3(\epsilon - 1)^2]^{1/2}}. \quad (46)$$

Si la colisión es completamente elástica ($\epsilon = 1$) se observa que ambas partículas se dispersan entre sí formando un ángulo recto. Resultado reportado en la literatura (ver Refs. 3, 5 y 8).

4.5. Colisión entre una partícula y una pared

En esta situación se considera que la masa del objeto blanco es muy grande comparada con la masa del objeto proyectil. Así, la masa relativa $m = m_2/m_1$ tiende a infinito. Este límite tomado en la velocidad (14b) conduce directamente a que la pared se encuentra en reposo después de la colisión; esto es,

$$\vec{U}_2^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{U}_2(\epsilon) = \vec{0}. \quad (47)$$

Se ha considerado para esta interacción que el vector de colisión es independiente del parámetro m . Por otra parte, la velocidad de la masa m_1 después de la colisión con una pared se obtiene al tomar el límite antes mencionado en (14a), resultando

$$\vec{U}_1^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{U}_1(\epsilon) = \vec{A}^\infty(\epsilon) - \epsilon \vec{V}_1. \quad (48)$$

Donde el vector de colisión $\vec{A}^\infty(\epsilon)$ viene dado por (22) cuando $\vec{V}_2 = \vec{0}$ y \hat{n} es perpendicular a la superficie de la pared, por lo que la velocidad dada en (48) toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{U}_1^\infty &= \vec{V}_1 - (\epsilon + 1)\vec{V}_1 \cdot \hat{n}\hat{n} \\ &= [\mathbb{1} - (\epsilon + 1)\hat{n}\hat{n}](\vec{V}_1). \end{aligned} \quad (49)$$

En particular, cuando $\epsilon = 1$, se tiene que el operador dentro del corchete de (49) corresponde a una reflexión en la dirección perpendicular al vector \hat{n} , siendo esta dirección paralela a la superficie de la pared. Así, en una colisión elástica entre una partícula y una pared la velocidad después de la colisión de la partícula proyectil se obtiene al cambiar de signo únicamente la componente paralela a \hat{n} de la velocidad antes del choque. En general, el reflector modificado que aparece dentro del corchete de (49) lo que hace es mantener inalterada la componente de la velocidad \vec{V}_1 en la dirección paralela a la pared; en cambio, la componente de \vec{V}_1 en la dirección perpendicular a la pared se ve disminuida ϵ veces, reflejando dicha proyección sobre la pared. Lo antes expuesto puede verse de manera natural al escribir (49) de la siguiente manera

$$\vec{U}_1^\infty = [\vec{V}_1 \cdot \hat{n}_\perp]\hat{n}_\perp - \epsilon[\vec{V}_1 \cdot \hat{n}]\hat{n}. \quad (50)$$

Donde \hat{n} y \hat{n}_\perp son versores ortogonales entre sí y dirigidos perpendicular y tangente a la pared, respectivamente. Obsérvese que en una colisión inelástica la velocidad dada en (48) se anula ya que $\epsilon = 0$ y $\vec{A}^\infty(0) = \vec{0}$.

5. Discusión

En situaciones unidimensionales el vector de colisión se anula, debido a que la regla de colisión (7) establece que el único vector $\vec{A}(\epsilon)$ perpendicular al versor \hat{n} asociado a la dirección del contacto es el vector nulo. Imponiendo la condición $\vec{A}(\epsilon) = \vec{0}$ en (14) se obtiene el resultado reportado en la literatura (ver Refs. 3-5 y 13). En esta misma situación y considerando que la colisión sea elástica ($\epsilon = 1$) se llega a los resultados presentados en Refs. 1, 2 y 14. En los casos de colisiones inelásticas unidimensionales la transferencia de energía es máxima, esto se debe a que el ángulo θ que aparece en (27) es nulo o vale π . En estas circunstancias el choque es frontal, de manera que la velocidad relativa de los cuerpos antes de la colisión es colineal al versor \hat{n} asociado a la dirección del contacto.

En una colisión inelástica o plástica el coeficiente de restitución y el vector de colisión son nulos, por consiguiente, las velocidades de los cuerpos después del choque son iguales. De la expresión (23) se establece que la velocidad relativa antes del choque es colineal al versor \hat{n} , lo cual sugiere que todas las colisiones inelásticas o plásticas son frontales. Así, la expresión (28) da cuenta de las colisiones cuando $0 \leq \epsilon \leq 1$.

En otro orden de ideas, la expresión para Q , dada por Ferreira en Ref. 27, difiere de la obtenida en (27) por el término trigonométrico $\cos^2(\theta)$, la razón fundamental se debe a que la regla de colisión considerada por dicho autor viene dada por

$$\epsilon = -\frac{|\vec{U}_2 - \vec{U}_1|}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}, \quad (51)$$

la cual difiere de la presentada por nosotros en (6). La expresión (51) para choques oblicuos pareciera no considerar colisiones semi-elásticas ya que la energía transferida es siempre máxima; es decir, el parámetro θ es siempre cero en (27).

La covarianza de las velocidades (14) y (16) está directamente garantizada de la invarianza de las leyes de conservación del momentum y de la energía. En otras palabras, si el momentum del sistema se conserva en todos los marcos de referencias entonces la cantidad Q es invariante galileana. Recíprocamente, si la cantidad Q es invariante galileana entonces el momentum del sistema se conserva. Este hecho se evidencia al considerar que

$$Q = K_0 - K_f = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{1}{2} m_i [|\vec{V}_i|^2 - |\vec{U}_i|^2] \quad (52)$$

Sustituyendo en (52) las transformaciones de Galileo dadas en (8) y denominando a la transferencia de energía cinética en el marco de referencia K' como Q' , se tiene que

$$\begin{aligned} Q &= Q' + \vec{V} \cdot \left[\sum_{i=1}^{i=N} m_i (\vec{U}'_i - \vec{V}'_i) \right] \\ &= Q' + \vec{V} \cdot [\vec{P}'_{\text{final}} - \vec{P}'_{\text{inicial}}]. \end{aligned} \quad (53)$$

Se observa claramente la invariancia de Q si el momentum se conserva; recíprocamente, si se verifica que $Q = Q'$ entonces el término dentro del corchete debe anularse, debido a la arbitrariedad de \vec{V} , lo cual conduce a la conservación del momento lineal [15].

La técnica presentada en este trabajo provee una manera de hacer una medición indirecta del coeficiente de restitución, siempre que se conozca la dispersión de las partículas [ver (34)], sin la necesidad de conocer explícitamente las velocidades de los cuerpos colisionantes después del choque.

La estrategia de resolución presentada en la Sec. 4 presenta ventajas desde el punto de vista pedagógico, las cuales se evidencian en el manejo vectorial de las expresiones involucradas en la construcción del vector de colisión a partir de la Fig. 1, así como la posibilidad de estudiar casos particulares, partiendo de las expresiones obtenidas para el caso semi-elástico. Además, se le brinda a los estudiante la oportunidad de conocer los significados de covarianza e invariancia ante el grupo de Galileo, también el estudio de colisiones en cualquier dimensión.

6. Conclusión

Se ha propuesto una caracterización de la regla de colisión de Huygens - Newton mediante el vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$, el cual es explícitamente invariante y covariante Galileo, además de contener la información del proceso de interacción y de la dispersión de las partículas. En particular, para colisiones rígidas este vector es proporcional a la proyección de la velocidad relativa sobre la dirección de la interacción durante el contacto, siendo la constante de proporcionalidad $\epsilon + 1$. De hecho, uno de los resultados más significativos de este trabajo es que todas las colisiones con un coeficiente de restitución dado pueden generarse a partir del vector de colisión para choques elásticos [ver Ec. (28)]. Desde el punto de vista del cálculo de velocidades de las partículas después de la colisión, el vector de colisión facilita la obtención de las mismas. Por otra parte, hemos probado que la máxima transferencia de energía viene cuando el parámetro θ en (27) se anula o vale π , lo cual se consigue en colisiones frontales y en aquellas donde la regla de colisión de Huygens-Newton viene dada por (51).

1. D. Holliday y R. Resnick, *Física, Primera parte* (Compañía Editorial Continental S.A., Mexico, 1984). pp. 197-216; R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería, Volumen 1* (International Thomson, México, 2005). pp. 260-270; I.V. Savéliev, *Curso de Física General Tomo 1* (Editorial MIR, Moscú, 1989). pp. 109-112; A.P. French, *Mecánica Newtoniana Vol. 1* (Reverté, España, 1974). pp. 341-346.
2. D. Figueroa, *Dinámica*, Volumen 2 (Gráfica León, Caracas, 1999), pp. 143-147; M. Alonso, E. Finn, *Física: Mecánica Volumen 1* (Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1988). pp. 289-290.
3. L. Tai Chow, *Classical Mechanics* (Editorial Jhon Wiley & Sons, New York, 1987). pp. 324-335.
4. R. Spiegel Murray, *Mecánica Teórica* (Mc Graw Hill, Caracas, 1989). pp. 194-195 y pp. 200-202.
5. M. R. Ortega, *Colisiones* (Documento en línea, consultado en 2011, Febrero 15). Disponible en: <http://www.uco.es/~falorgim/fisica/archivos/monytex/LFM19.PDF>
6. S. Díaz-Solórzano y L. González-Díaz, *Rev. Mex. Fís. E* **55** (2009) 57.
7. M.F. Ferreira da Silva, *Rev. Mex. Fis. E* **54** (2008) 65.
8. J. Norwood Jr, *Mecánica Clásica a Nivel Intermedio*, (Editorial Prince-Hall International, Bogotá, 1981) pp. 152-158; Ver también pp. 264-268 de la segunda referencia de [2].
9. L. Landau y E. Lifshitz, *Curso Abreviado de Física Teórica Libro I* (Editorial MIR, Moscú, 1987). pp. 47-50.
10. J. Duran, *Sands, powders and grains*. (Springer-Verlag, New York, 2000) pp. 34-42.
11. W. Goldsmith, *Impact: the theory and physical behaviour of colliding solids*. (Dover, New York, 2001) pp. 7-8.
12. Para la descripción de una colisión en el sistema centro de masa se requiere del ángulo ψ que determina la dirección de dispersión de las partículas después del choque en dicho sistema, tal como lo afirma Landau y Lifshitz en Ref. 9. Dicha dirección queda definida por un versor \hat{n}_ψ el cual llamaremos *versor de incidencia de Landau*. En este artículo damos una expresión concreta de dicho vector [ver Ec. (29)].
13. Hui Hu, *Phys. Teach.* **40** (2002) 72.
14. L. Edward Millet, *Phys. Teach.* **36** (1998) 186.
15. T. Jordan, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 676.