

Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio

J. de Jesús Rubio^a, M. Figueroa^a, J. H. Pérez Cruz^b y J. Yoe Rumbo^a

^aSección de Estudios de Posgrado e Investigación-ESIME UA-Instituto Politécnico Nacional,
Av. de las Granjas no.682, Col. Santa Catarina, México D.F., 02250, México,
phone:(+52)55-57296000. Ext.64497;

e-mail: jrubioa@ipn.mx; rubio.josedejesus@gmail.com

^bCentro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara,
Boulevard Marcelino García Barragán No. 1421, Guadalajara, Jal., 44430, México.

Recibido el 2 de mayo de 2012; aceptado el 8 de agosto de 2012

Este artículo presenta la combinación de los siguientes dos métodos para estabilizar y para atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio: 1) Se rechaza la perturbación con el método de estructura al infinito, si existe una función, tal que, la función de transferencia de las salidas y de las perturbaciones sea nula, lo cual fuerza al sistema a tener un comportamiento sin perturbaciones. 2) Se garantiza que el sistema controlado es estable con el método de asignación de polos, al igualar el polinomio del sistema controlado con un polinomio estable deseado, lo cual fuerza al sistema a seguir un comportamiento estable.

Descriptores: Control de rechazo de perturbaciones; control de asignación de polos; péndulo invertido rotatorio.

This paper presents the combination of the following two methods to stabilize and to attenuate the disturbances of a rotatory inverted pendulum: 1) The disturbance is rejected using the structure at infinity method if there exist a control function such that, the transfer function of the outputs and the disturbances is null, forcing the system to have a behavior free of disturbances. 2) It is guaranteed that the controlled system is stable by equating the polynomial of the controlled system and a desired stable polynomial, forcing the system to follow a stable behavior.

Keywords: Disturbance rejection control; pole placement control; rotatory inverted pendulum.

PACS: 07.05.Dz; 07.07.Tw; 07.05.Tp

1. Introducción

El rechazo de perturbaciones es un tema importante de los sistemas de control, en la teoría y en las aplicaciones. Algunos investigadores han estudiado este problema, entre los que destacan [1-5].

En [1], se presenta un control para el rechazo de las perturbaciones medibles en una caldera industrial. El estudio de [2] investiga el problema del rechazo de perturbaciones para sistemas borrosos perturbados. En [3] se estudia el control de un cuadrotor perturbado. En [4] se diseña un control para compensar las perturbaciones en un brazo robótico y en [5] se propone un método de control para el rechazo de perturbaciones.

Existen trabajos de control para la estabilización de péndulos como son [6-11].

En [6] se propone el péndulo futura. En [7] se presenta la estabilidad de un péndulo invertido. Un control Hamiltoniano para la estabilización de un sistema de cuerpo rígido controlado por dos torques se desarrolla en [8]. En [9] se presenta un control Lagrangiano para la estabilización de un péndulo invertido montado en un carro. En [10], los autores proponen un control basado en la función de Lyapunov para la estabilización de un péndulo futura. En [11], se planifica un control no lineal para la estabilización del péndulo de futura. En [12,13] se propone un control de energía total el cual se aplica a un péndulo sobre un carro y al péndulo de futura.

Algunas veces no solo se requiere rechazar las perturbaciones, si el sistema es inestable, también puede necesitarse estabilizarlo. Existen algunos trabajos de control por asignación de polos que solo garantizan la estabilidad del sistema y no es común encontrar controles que estabilicen y atenúen las perturbaciones al mismo tiempo.

Este trabajo se basa en la combinación del control de estructuras al infinito [15-17] y el control de asignación de polos [18], ambos bajo el enfoque de sistemas lineales, para alcanzar la estabilidad y la atenuación de las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio. El primer control resuelve el rechazo de las perturbaciones, mientras que el otro se encarga de la estabilización.

El resto de este trabajo se organiza como sigue. La Sec. 2 presenta el modelo dinámico de un péndulo invertido rotatorio. La Sec. 3 presenta el método de estabilización de asignación de polos. La Sec. 4 presenta el problema de rechazo de perturbaciones. La Sec. 5 aplica ambos métodos para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio. La Sec. 6 describe los resultados y las discusiones. La Sec. 7 presenta la conclusión.

2. Péndulo Invertido Rotatorio

La Fig. 1 muestra el péndulo invertido rotatorio.

Las ecuaciones que describen el péndulo invertido rotatorio son [19]:

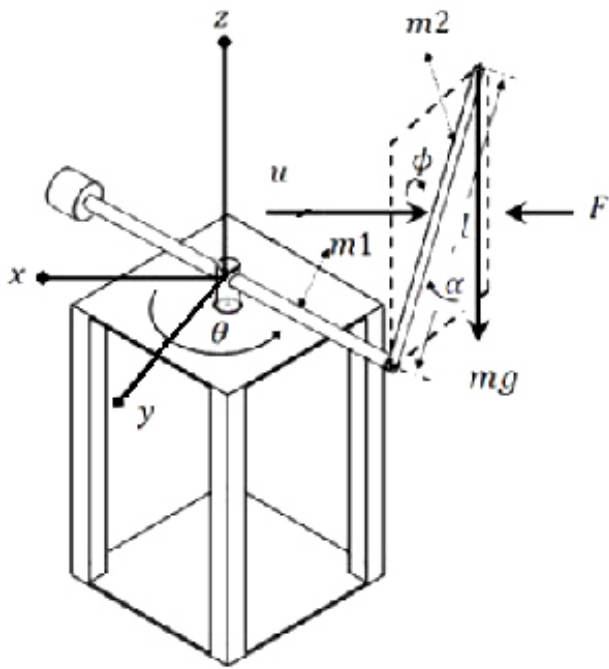


FIGURA 1. Péndulo invertido rotatorio

$$\begin{aligned} C_1\ddot{\theta} + C_2\ddot{\alpha} &= T - B_\theta\dot{\theta} \\ C_3\ddot{\alpha} + C_2\ddot{\theta} - C_4\alpha &= -B_\phi\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\alpha = (\pi/2) - \phi$ es la posición del péndulo, $\dot{\alpha}$ es la velocidad del péndulo, θ es la posición del brazo, $\dot{\theta}$ es la velocidad del brazo, $C_1 = m_1 l_{1c}^2 + I_{1z1} + m_2 l_1^2 + I_{2y2}$, $C_2 = m_2 l_1 l_{2c}$, $C_3 = m_2 l_{2c}^2 + I_{2y2}$, $C_4 = m_2 g l_{2c}$ son constantes, m_2 es la masa del péndulo, l_{2c} es la longitud del centro de masa del péndulo, l_2 es la longitud del péndulo, I_{2y2} es el momento de inercia sobre el eje y en el péndulo, g es la gravedad, m_1 es la masa del brazo, l_{1c} es la longitud del centro de masa para el brazo, l_2 es la longitud del brazo, I_{1z1} es el momento de inercia sobre el eje z en el brazo, T es el torque del motor, B_θ es la constante viscosa de amortiguamiento de la junta θ , B_ϕ es la constante de amortiguamiento de la junta ϕ .

Observación 1: El modelo dinámico (1) es una versión simplificada del modelo no lineal presentado en [14]. El modelo dinámico (1) esta linealizado alrededor de un punto de equilibrio inestable.

Observación 2: El modelo dinámico (1) es válido siempre y cuando las posiciones y las velocidades angulares sean pequeñas. Esta suposición no es muy restrictiva ya que generalmente los controles se aplican para que el péndulo se mueva muy cerca de su punto de equilibrio que es el cero [10,11].

Multiplicando la primera ecuación por C_3 y la segunda ecuación por C_2 , de (1) da:

$$\begin{aligned} C_1 C_3 \ddot{\theta} + C_3 C_2 \ddot{\alpha} &= C_3 T - C_3 B_\theta \dot{\theta} \\ C_3 C_2 \ddot{\alpha} + C_2^2 \ddot{\theta} - C_2 C_4 \alpha &= -C_2 B_\phi \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Restando la segunda ecuación a la primera, da:

$$\ddot{\theta}[C_1 C_3 - C_2^2] = [-C_2 C_4] \alpha + C_3 T - C_3 B_\theta \dot{\theta} + C_2 B_\phi \dot{\alpha} \quad (3)$$

Considerando que las constantes de amortiguamiento B_θ y B_ϕ son pequeñas, se tiene la ecuación de posición del brazo para el péndulo invertido rotatorio como sigue:

$$\ddot{\theta}[C_1 C_3 - C_2^2] = [-C_2 C_4] \alpha + C_3 T. \quad (4)$$

Multiplicando la primera ecuación por C_2 y la segunda ecuación por C_1 , de (1) da:

$$\begin{aligned} C_1 C_3 \ddot{\alpha} + C_1 C_2 \dot{\theta} - C_1 C_4 \alpha &= C_1 B_\phi \dot{\alpha} \\ C_1 C_2 \ddot{\theta} + C_2^2 \ddot{\alpha} &= -C_2 T - C_2 B_\theta \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Restando la segunda ecuación a la primera, da:

$$\ddot{\alpha}[C_1 C_3 - C_2^2] = [C_1 C_4] \alpha - C_2 T + C_1 B_\phi \dot{\alpha} + C_2 B_\theta \dot{\theta}.$$

Considerando que las constantes de amortiguamiento B_θ y B_ϕ son pequeñas, se tiene la ecuación del péndulo para el péndulo invertido rotatorio como sigue:

$$\ddot{\alpha}[C_1 C_3 - C_2^2] = [C_1 C_4] \alpha - C_2 T. \quad (6)$$

El modelo dinámico del péndulo invertido rotatorio de este artículo está descrito por las Ecs. (4) y (6).

Los estados se definen como $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, la entrada como $u = T \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, y la salida como $y = \alpha + \theta$, lo cual da el siguiente sistema en espacios de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_2}{c_1 c_3 - c_2^2} & 0 & \frac{c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_1 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_2 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \\ C &= [c_a \quad 0 \quad c_b \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}. \end{aligned}$$

La Tabla I muestra el valor de los parámetros constantes del péndulo invertido rotatorio.

TABLA I. Parámetros del péndulo invertido rotatorio

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_2	0.040691 kg	m_1	0.136729 kg
l_{2c}	0.15 m	l_{1c}	0.2 m
l_2	0.3 m	l_1	0.4 m
I_{2y2}	0.201×10^{-9}	I_{1z1}	0.127×10^{-8}

De la Tabla I y considerando $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, da

$$\frac{c_1 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2} = 145.2, \quad -\frac{c_2 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2} = -29.19,$$

$$-\frac{c_2}{c_1 c_3 - c_2^2} = -487.57, \quad \frac{c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} = 182.57,$$

$c_a = 1, c_b = 1$. Así, el sistema en espacios de estado del péndulo invertido rotatorio es como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$C = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 145.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -29.19 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \quad -487.57 \quad 0 \quad 182.57]^T.$$

3. El problema de estabilización por el método de asignación de polos

Primero se analiza la estabilidad del sistema como sigue [18]:

$$\det(CI - A) = 0$$

$$Ps = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0, \tag{9}$$

donde Ps es el polinomio característico del sistema, y a_0, a_1, \dots, a_n son parámetros. Desde (9), se obtienen los valores característicos. Si la parte real de los valores característicos es negativa, los polos están localizados en el semiplano izquierdo y el sistema es estable, en otro caso, el sistema es inestable.

Si el sistema es inestable, se puede usar un control de regulación para forzar que la parte real de los valores característicos sea negativa.

El control de regulación está definido en [18]:

$$u = Fx, \tag{10}$$

donde $F \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ es la ganancia proporcional del control. Substituyendo (10) en (8), da:

$$\dot{x} = A_u x, \tag{11}$$

donde $A_u = A + BF$. Ahora, la estabilidad del sistema controlado se alcanza como sigue:

$$\det(CI - A_u) = 0$$

$$Pu = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

$$Pd = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 = 0$$

$$Pu = Pd, \tag{12}$$

donde Pu es el polinomio característico del sistema controlado, Pd es el polinomio deseado, el cual es estable, y $a_0, a_1, \dots, a_n, d_0, d_1, \dots, d_n$ son parámetros constantes. A partir de (12) se obtienen los valores característicos de Pu y Pd . Se selecciona Pd tal que la parte real de los valores característicos sea negativa, y como se fuerza a que Pu sea igual a Pd , la parte real de los valores característicos de Pu es también negativa.

4. El problema de rechazo de perturbaciones

Se considera el sistema lineal (A, B, C) dado como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{13}$$

donde $t \geq 0, x(t) \in \mathcal{X} \approx \mathbb{R}^n$ son los estados, $u(t) \in \mathcal{U} \approx \mathbb{R}^m$ es la función de control, $y(t) \in \mathcal{Y} \approx \mathbb{R}^p$ es la salida. $A, B, y C$ son las matrices que representan las aplicaciones lineales $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, respectivamente.

El sistema perturbado (A, B, C, E) es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{14}$$

donde $t \geq 0, d(t) \in \mathcal{D} \approx \mathbb{R}^p$ son las perturbaciones y E es la matriz que representa la aplicación lineal $E : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$.

Los estados $x(t)$ y las perturbaciones $d(t)$ se consideran como elementos conocidos.

Teorema 1: El problema de rechazo de perturbaciones tiene una solución si existe una retroalimentación de estados $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ y una función $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$ tales que la función de transferencia de las perturbaciones y las salidas es nula debido a la siguiente función de control:

$$u = Fx + Gd, \tag{15}$$

donde la función de transferencia de las perturbaciones y las salidas es:

$$G(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) \tag{16}$$

Demostración: F y G son la representación matricial de las aplicaciones de F y G , respectivamente. Substituyendo $u = Fx + Gd$ en el sistema (A, B, C, E) , da:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BF)x + (BG + E)d \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{17}$$

Se usa la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia de las perturbaciones y las salidas como sigue:

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A - BF)^{-1}(BG + E)d(s) \\ y(s) &= Cx(s), \end{aligned} \tag{18}$$

Así:

$$y(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E)d(s). \tag{19}$$

Entonces, la función de transferencia es:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E). \quad (20)$$

La función de transferencia (20) es (16).

5. Control estable que atenúa las perturbaciones para el péndulo invertido rotatorio

Se define el sistema perturbado como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ed \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (21)$$

donde A, B, C, x, u, y están definidos en (7) y (8),

$$E = [0 \quad -3182.72 \quad 0 \quad 1186.71]^T, d \in \Re$$

es la perturbación.

Observación 3: El vector de perturbaciones E es proporcional al vector de entradas B , dado que las perturbaciones entran a través de las entradas de control, pero las perturbaciones son más pequeñas.

5.1. Análisis de estabilidad del sistema

Se obtiene el análisis de estabilidad usando (9) como sigue [18]:

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 145.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -29.19 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$Ps = s^4 - 145.2s^2 = s^2(s - 145.2)(s + 145.2) = 0. \quad (22)$$

Las raíces del polinomio Ps son $s = 0, s = 0, s = 145.2, s = -145.2$. Las raíces son conocidas como los valores característicos, y como uno de ellos es positivo, el sistema es inestable y se debe proponer un control para estabilizar el sistema.

5.2. Controlabilidad del sistema

Se analiza la controlabilidad del sistema como sigue [18]:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -487.57 & 0 & -70795. \\ -487.57 & 0 & -70795. & 0 \\ 0 & 182.57 & 0 & 14232. \\ 182.57 & 0 & 14232. & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Como el rango de la matriz C es igual a 4, el sistema es controlable, así que sí se puede proponer un control.

5.3. Diseño del control

Se usa la función de control (15), pero F se obtiene con (10) para estabilizar el sistema y G se obtiene con (16) para atenuar la perturbación.

Considerando $F = [f_1, f_2, f_3, f_4]$ de (10) y usando (12), Pu y Pd están dados como sigue:

$$\begin{aligned} Pu &= s^4 + (489.57f_2 - 182.57f_4)s^3 + (489.57f_1 \\ &\quad - 145.2 - 182.57f_3)s^2 + 12219f_4s + 12219f_3 \\ Pd &= (s + 10)(s + 20)(s + 30)(s + 40) \\ &= s^4 + 100s^3 + 3500s^2 + 50000s + 240000 \end{aligned} \quad (24)$$

Considerando $Pu = Pd$ de (12), da:

$$F = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 14.771, \quad f_2 = 2.0268 \\ f_3 &= 19.642, \quad f_4 = 4.0920, \end{aligned} \quad (25)$$

Si se considera F de (25) y $G = -6.5$, entonces la función de transferencia $G(s)$ de la salida y y de la perturbación d (16) es:

$$G(s) = \frac{-13.51s^2 + 5090.7s + 12401}{s^4 + 241.13s^3 + 3470.6s^2 + 50275s + 2.4133 \times 10^5} \quad (26)$$

Obteniendo la convergencia al infinito de $G(s)$, da:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-13.51s^2 + 5090.7s + 12401}{s^4 + 241.13s^3 + 3470.6s^2 + 50275s + 2.4133 \times 10^5}. \quad (27)$$

Multiplicando $G(s)$ por 1 expresado como

$$\left(\frac{s^{-4}}{s^{-4}} \right),$$

da:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-13.51s^2 + 5090.7s + 12401}{s^4 + 241.13s^3 + 3470.6s^2 + 50275s + 2.4133 \times 10^5} \left(\frac{s^{-4}}{s^{-4}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-13.51s^{-2} + 5090.7s^{-3} + 12401s^{-4}}{1 + 241.13s^{-1} + 3470.6s^{-2} + 50275s^{-3} + 2.4133 \times 10^5s^{-4}} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Como $G(s)$ usando F y G no es cero, no se rechaza la perturbación, pero como $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ es cero al usar F y G , se atenúa la perturbación.

Finalmente, la función de control (15) para el modelo del péndulo invertido rotatorio (8) es:

$$u = [14.771 \ 2.0268 \ 19.642 \ 4.0920]x - 6.5d \quad (29)$$

Observación 4: Existen algunas investigaciones acerca de sistemas robóticos como son: [21-28]. Estas aplicaciones son interesantes, pero en ningún caso se presenta un control estable que atenue las perturbaciones del péndulo invertido rotatorio.

6. Resultados y discusiones

En esta sección se presentan los resultados y las discusiones. Se selecciona la perturbación como $d = \sin(8\pi t)$. Considerando (22), el péndulo invertido rotatorio es inestable. Se van a comparar el control estable de (10), (25) y el control estable que atenúa la perturbación de (15), (29) para el péndulo invertido rotatorio.

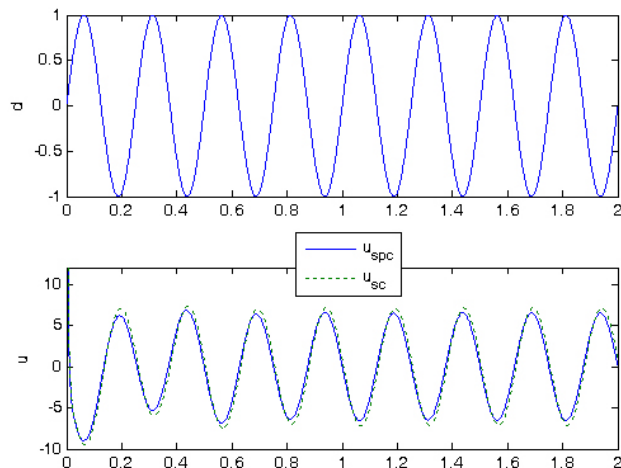


FIGURA 2. Perturbación y funciones de control.

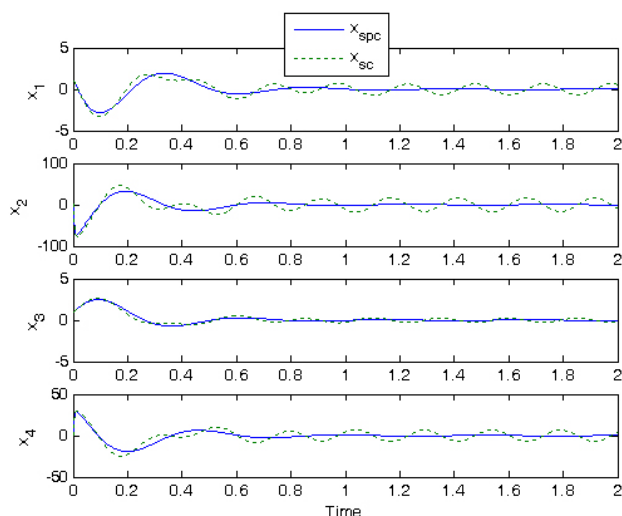


FIGURA 3. Estados del péndulo invertido rotatorio.

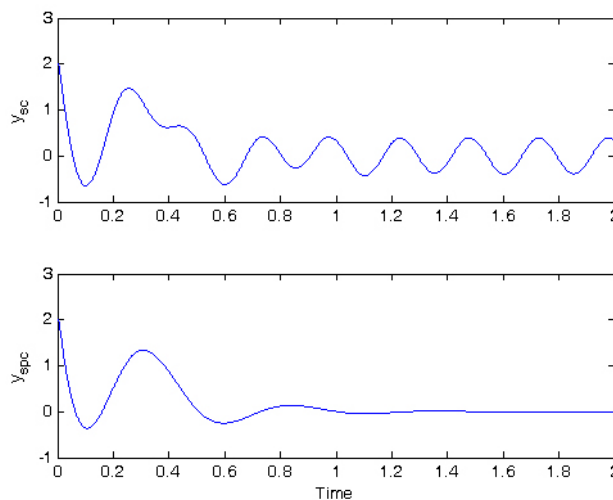


FIGURA 4. Salida del péndulo invertido rotatorio.

La Fig. 2 muestra la perturbación denotada como d , la función de control estable denotada como u_{sc} , y la función de control estable que atenúa la perturbación como u_{spc} .

La Fig. 3 muestra los estados del péndulo invertido rotatorio de (8), usando el control estable denotado como x_{sc} y el control estable que atenúa la perturbación como x_{spc} .

La Fig. 4 muestra las salidas del péndulo invertido rotatorio usando el control estable denotado como y_{sc} y el control estable que atenúa la perturbación como y_{spc} .

De las Fig. 2, 3, y 4, se puede ver que los estados y la salida del péndulo invertido rotatorio no tienen perturbación con el control estable que atenúa la perturbación.

7. Conclusión

Este artículo estudió dos métodos para la estabilización y para la atenuación de las perturbaciones los cuales son el método de asignación de polos y el método de estructura al infinito. La simulación mostró que el controlador que estabiliza y atenúa la perturbación tiene un mejor desempeño que el controlador que solo estabiliza debido a que el primero además de estabilizar la salida del péndulo invertido rotatorio, también atenúa la perturbación. En el futuro, se considerará la perturbación como desconocida y será rechazada o atenuada usando los sistemas envolventes [29-35].

Agradecimientos

Los autores agradecen al editor y a los revisores por sus valiosos comentarios y sugerencias que permitieron mejorar esta investigación significativamente. Los autores agradecen a la Secretaría de Investigación y Posgrado, a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del IPN, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su ayuda en esta investigación. El tercer autor agradece a CONACYT por la beca 290616 otorgada para la realización de la estancia posdoctoral en la Universidad de Guadalajara.

1. I. Fernandez, C. Rodriguez, J. L. Guzman, and M. Berenguel *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **8** (2011) 112-121.
2. J. Chen, F. Sun, Y. Yin, and C. Hu, *IET Control Theory Appl.* **5** (2011) 1195-1202.
3. R. Zhang, Q. Quan, and K.-Y. Cai, *IET Control Theory Appl.* **5** (2011) 1140-1146.
4. M.W. Dunnigan, and C.M. Wronka, *IET Control Theory Appl.* **5** (2011) 999-1012.
5. H. Li, Z. Sun, H. Liu, F. Sun, and J. Deng, *IET Control Theory Appl.* **5** (2011) 283-290.
6. K. Furuta, T. Okutani, and H. Sone, *Computers & Electrical Engineering* **5** (1978) 67-84.
7. P. Quintero, J. Silva, and H. Alejandro, *Rev. Mex. Fis.* **55** (2009) 161-167.
8. C. Aguilar, M.S. Suarez, and F. Guzman, *Rev. Mex. Fis.* **54** (2008) 265-270.
9. C. Aguilar, O. Gutierrez, and H. Sossa, *Rev. Mex. Fis.* **54** (2008) 329-335.
10. C. Aguilar, and J. H. Sossa, *Nonlinear Dynamics* **49** (2007) 1-8.
11. C. Aguilar, M. S. Suárez, and O. O. Gutiérrez, *International Journal of Control* **83** (2010) 2285-2293.
12. G. Viola, R. Ortega, R. Banavar, J. A. Acosta, and A. Astolfi, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52** (2007) 1093-1099.
13. G. Viola, *Control of Underactuated Mechanical Systems via Passivity-Based and Geometric Techniques* (Tesis de Doctorado de la Universidad de Estudios de Roma).
14. R. Lozano, I. Fantoni, and D. J. Block, *Systems & Control Letters* **40** (2000) 197-204.
15. R. Rabah, and M. Malabre, *Kybernetika* **35** (1999) 668-680.
16. R. Rabah, and M. Malabre, *Kybernetika* (1993) 29.
17. M. Malabre, and V. Kucera, *IEEE Trans. Automat. Control* **3** (1984) 266-268.
18. C.-T. Chen, *Linear systems, theory and design* (third edition, 1999) ISBN 0-19-511-777-8.
19. S. Awtar *et al.*, *Mechatronics* **12** (2002) 357-370.
20. H.W. Eves, *Funciones de Variable Compleja* (1968) Tomo II. C.E.C.S.A.
21. C. Escolano and J. Minguez, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **8** (2011) 16-23.
22. B. Estabanez, P. del Saz, I. García, and V. F. Muñoz, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **8** (2011) 24-34.
23. C. Garcia, R. Saltaren, R. Carelli, M. Artigas, and R. Aracil, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **7** (2010) 53-62.
24. C. Garcia, R. Saltaren, J. Lopez, and R. Aracil, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **7** (2010) 17-27.
25. F. Roberti, J. M. Toibero, R. F. Vassallo, and R. Carelli, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **8** (2011) 29-37.
26. F. G. Rossomando, C. Soria, and R. Carelli, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **7** (2010) 28-35.
27. F. R. Rubio, M. G. Ortega, and F. Gordillo, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **7** (2010) 65-73.
28. J. L. Sirvent, J. M. Azorin, E. Iañez, A. Ubeda, and E. Fernandez, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **8** (2011) 103-111.
29. E. Garcia and J. A. Iglesias, *Expert Systems with Applications* **39** (2012) 5243-5250.
30. J. A. Iglesias, P. Angelov, A. Ledesma and A. Sanchis *International Journal of Neural Systems* **20** (2010) 355-364.
31. Y. M. Jang, M. Lee and S. Ozawa, *Evolving Systems* **2** (2011) 261-272.
32. D. Leite, R. Ballini, P. Costa and F. Gomide, *Evolving Systems* (2012).
33. A. Lemos, W. Caminhas and F. Gomide, *Evolving Systems* **2** (2011) 1-14.
34. G. Leng, X. J. Zeng, and J. A. Keane, *Evolving Systems* (2012).
35. H.-J. Rong, N. Sundararajan, G.-B. Huang and G.-S. Zhao, *Evolving Systems* **2** (2011) 71-82.