

Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia

H. N. Núñez-Yépez

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Apartado Postal 55-534, Iztapalapa, D.F. México, 09340, México,
e-mail: nyhn@xanum.uam.mx*

A. L. Salas-Brito

*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco,
Apartado Postal 21–267, Coyoacán D. F. México, 04000, México,
e-mail: asb@correo.azc.uam.mx*

Received 28 May 2013; accepted 18 June 2013

En conmemoración de los 101 años de la muerte de Henri Poincaré hacemos un recuento de algunas de sus aportaciones a la mecánica clásica aderezándolo con un esbozo de su biografía académica. Usamos de un péndulo para ilustrar la técnica cualitativa para analizar las soluciones a una ecuación dinámica; lo empleamos también, pero suponiéndolo extensible, para ilustrar el uso de los mapeos de Poincaré para diferenciar las soluciones regulares de las caóticas, un tipo de soluciones que él mismo descubrió al estudiar el famoso problema de los tres cuerpos. Demostramos su resultado sobre la recurrencia de las soluciones en un sistema dinámico según el cuál toda solución a la que se le exija ser tanto confinada como que conserve la energía deberá de regresar después de un tiempo, T_r , a estar tan cerca como se quiera de sus condiciones iniciales. Este es un resultado fundamental que debiera ser más conocido por los estudiantes de física.

Descriptores: Poincaré y la mecánica clásica; métodos cualitativos; teorema de la recurrencia.

This work commemorates the 101th anniversary of Henri Poincaré's death. We pinpoint his main contributions to classical mechanics while enlivening the discussion with a brief remembrance of his academic career. We employ a physical pendulum for illustrating his techniques for analysing properties of solutions to differential equations without actually solving them. We next use an elastic pendulum for exhibiting how Poincaré maps allow us to distinguish the periodic from the chaotic solutions, a type of solutions which Poincaré himself discovered while studying the famous three body problem. We also give a heuristic proof of his extraordinary recurrence theorem according to which every bound solution of a conservative dynamical system should return, after a time, T_r , to be as close as we like to its initial conditions. We regard this as a very important result that ought to be known by all physics students.

Keywords: Poincaré and classical mechanics; qualitative methods; recurrence theorem.

PACS: 01.65.+g; 01.55.+b

1. Introducción

En el año 2012 se cumplió un siglo de la muerte de Henri Poincaré, el matemático más eminente de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, quien legó una vasta obra con ramificaciones y contribuciones directas a la física y a otros campos del conocimiento. Poincaré, además de haber hecho contribuciones al electromagnetismo maxwelliano, es uno de los precursores de la relatividad especial, de la teoría cuántica, de la teoría de los fenómenos no lineales y del caos determinista, por ello se le considera uno de los físicos teóricos más importantes de esa época [1-4].

Jules Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1854 en Nancy, Francia y murió inesperadamente el 17 de julio de 1912 en París como secuela de una operación de la que aparentemente se estaba recuperando. En este trabajo, que conmemora los 101 años de la desaparición de Poincaré, nos ocupamos de sus contribuciones a la mecánica clásica. Ejemplificamos las técnicas cualitativas que desarrolló para entender la naturaleza de las soluciones a toda ecuación diferencial (lo que, aplicado a la mecánica clásica, podríamos llamar *la mecánica cualitativa*) y demostramos el sorprendente teorema de la recurrencia, él que afirma que todos los mo-

vimientos confinados de sistemas que conserven la energía se pueden considerar aproximadamente periódicos o *estables en el sentido de Poisson*, para usar la terminología de Poincaré [2,3]. Este último resultado es curiosamente poco conocido entre los estudiantes aún entre quienes han estudiado mecánica clásica avanzada.

Poincaré se graduó de la afamada École Polytechnique en 1875, a continuación fue aceptado en la École des Mines, recibiendo en ella como ingeniero de minas en 1879. Después paso unos meses trabajando como ingeniero antes de recibir el Doctorado en Matemáticas por la Universidad de París en 1879 con un trabajo realizado bajo la dirección de Charles Hermite. Después del doctorado Poincaré enseñó análisis en la Universidad de Caen, lugar en donde sus clases fueron conocidas por muy desorganizadas y poco preparadas aunque posteriormente su enseñanza se volviera legendaria por su calidad [2]. Poco después, en 1886, es nombrado Profesor de Física Matemática y de Probabilidad en la Faculté des Sciences de Paris, allí fué también encargado del curso de Mecánica Física y Experimental y, en agosto de 1886, sucedió a Gabriel Jonas Lippmann en la cátedra de Física Matemática; en 1896, tras la muerte de François Félix Tisserand, se le pidió que pasase a desempeñar la cátedra de Astronomía

Matemática para la que no existía otro candidato. En el interim, el 24 de enero de 1887 y tras la muerte de Edmond Nicolás Laguerre, fué elegido miembro de la Académie des Sciences [1-4].

Poincaré hizo aportaciones sustantivas tanto a las matemáticas como a la física, sus contribuciones a ésta fueron tan importantes que fué candidato al premio Nobel de física en varias ocasiones y, según se cree, lo hubiera obtenido si no le hubiese sorprendido antes la muerte [4]. Revivió el estudio de la mecánica celeste proponiendo técnicas novedosas de análisis; de aquí que se haya encontrado de frente con la enorme complejidad que resulta de la mecánica clásica cuando se trabaja con problemas que no son integrables: esto es, se encontró con los fenómenos caóticos, los que descubrió al analizar el problema de los tres cuerpos [2-5]. Por si los anteriores logros fueran pocos, creó además nuevos campos de investigación matemática como el estudio de las llamadas funciones automórfas o funciones fuchsianas, como él las llamaba, que pueden ser consideradas como funciones elípticas generalizadas. Creó la teoría de los sistemas dinámicos, la topología y renovó completamente a la mecánica celeste al estudiar con gran profundidad el problema de tres cuerpos que interactúan entre sí gravitacionalmente [1-3].

2. Las ecuaciones diferenciales de la mecánica clásica

El siglo XIX fué el siglo en que los científicos descubrieron que es imposible el resolver a la abrumadora mayoría de las ecuaciones diferenciales; ello acabó con el sueño de resolver exactamente muchos sistemas físicos de interés—esto pareció imponer restricciones severas al avance científico al menos si éste requiere de la resolución exacta de las ecuaciones con las que se formulan las teorías. Poincaré entendió esa imposibilidad perfectamente, pero conocía de la imperiosa necesidad de entender la naturaleza de tales soluciones a todo tiempo pasado o futuro; algo que es fundamental, por ejemplo, para establecer la estabilidad del Sistema Solar.

Así, primero se armó de una batería de métodos que no requerían de la resolución previa de las ecuaciones diferenciales newtonianas para el análisis de un sistema y después atacó el *problema de los tres cuerpos*, pero no logró avanzar mucho. La idea era trabajar en un caso más simple que todo el Sistema Solar—¡que tiene mucho más de tres cuerpos!—del que intentaba demostrar la estabilidad; pero aún aquel problema es demasiado complejo; así que lo simplificó aún más hasta llevarlo al llamado problema restringido de los tres cuerpos; aunque éste también resultó demasiado complejo al menos lo llevo a descubrir el caos hamiltoniano [1,4,6]. El problema restringido de los tres cuerpos es un caso especial del problema en el que se presupone que dos de los cuerpos giran en órbitas circulares —lo cual es aproximadamente cierto, por ejemplo, para el sistema Sol-Tierra-Luna— y el tercero, de masa pequeña para que su efecto sobre de los otros sea razonablemente inapreciable, se mueve en el campo gravitacional de los primeros.

Una de las herramientas que Poincaré introdujo fue la *teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales*, la que permite conocer la naturaleza de las soluciones a una ecuación diferencial sin resolverla previamente. Ilustramos lo más básico de esta teoría aplicándola a continuación al caso simple del péndulo físico.

2.1. Mecánica cualitativa del péndulo

Según se ilustra en la Fig. 1, un péndulo consta de una lenteja con una masa m sujeta a un punto fijo O a través de un hilo de longitud l que supondremos inextensible (esto es, $dl/dt = 0$). Si suponemos que el movimiento sólo ocurre en un plano, el sistema se podrá describir por la coordenada angular θ . Las ecuaciones de movimiento del péndulo son

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta). \quad (1)$$

con g la aceleración de la gravedad y l la longitud del péndulo. Definamos el tiempo adimensional $\tau = \omega_p t$, con $\omega_p \equiv (g/l)^{1/2}$, con ello obtenemos

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin(\theta). \quad (2)$$

Una primera integral de la Ec. (2) se puede calcular multiplicándola por $d\theta/d\tau$, simplificando e integrando para obtener

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = E + \cos(\theta) \quad (3)$$

con $E \rightarrow E/(mgl)$ la energía expresada en forma adimensional. La solución exacta a la Ec. (3) se puede expresar en términos de una integral elíptica [7]

$$\theta(\tau) = \pm \frac{1}{\sqrt{2E}} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{1}{E} \cos(y)}}. \quad (4)$$

con τ_0 el valor de τ al que se inicia el movimiento. La expresión (4), aunque explícita, no resulta muy clarificadora. Para ganar en intuición recurriremos a los métodos geométricos propuestos por Poincaré.

Primero definamos $\omega \equiv d\theta/d\tau \equiv \dot{\theta}$ para que el péndulo quede descrito tanto por el ángulo, θ , como por la velocidad angular, ω . Con ello, convertimos la ecuación de segundo orden (2) en el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= -\sin(\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Hacemos notar que el lado derecho de esta pareja de ecuaciones define un campo vectorial en el espacio θ - ω , el llamado espacio de las fases del sistema—que, aunque sea un espacio de fases, no debe confundirse con el espacio de fases canónico que se requiere para la descripción hamiltoniana de

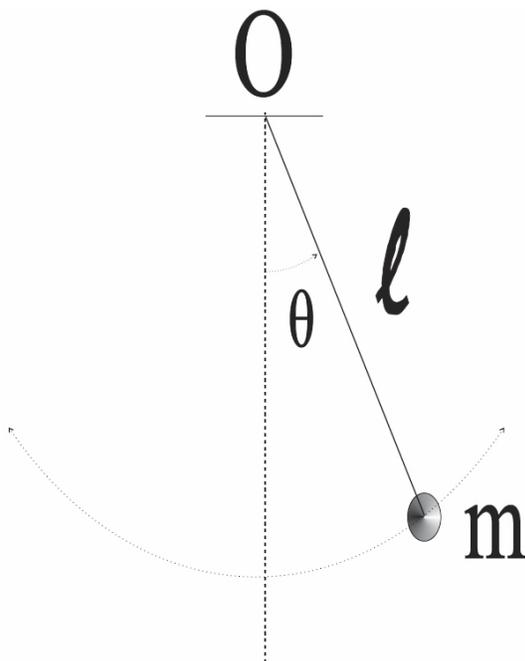


FIGURA 1. Un péndulo físico con longitud l y masa m , su frecuencia angular es $\omega_p = \sqrt{g/l}$, la coordenada es el ángulo de oscilación $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

la mecánica. La primera integral, esto es, la energía adimensionalizada, es

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta, \tag{6}$$

ayuda en la visualización al permitirnos dibujar curvas continuas a las que el campo vectorial es tangente en cada punto. Ver la Fig. 2.

Observar las imágenes en tal Figura nos informa directamente que existen dos tipos de trayectorias. Unas, los llamados movimientos de *libración*, en donde el péndulo oscila moviéndose en una dirección hasta que se detiene en el punto más extremo de la trayectoria, regresa inmediatamente sobre sus pasos hasta la posición inicial, se detiene momentáneamente y el ciclo se reinicia. Otras, asociadas con los movimientos llamados de *rotación*, en donde la lenteja del péndulo gira sin detenerse alrededor de punto O , ya sea dextrógira (a la derecha) o levógira (a la izquierda). A la pareja de trayectorias —que dan la impresión de ser una sola que se cruza en el punto X — que separa el movimiento de libración del de rotación se les llama conjuntamente la *separatriz*. El período del péndulo diverge cuando la energía se acerca a la de la separatriz, según los lectores pueden fácilmente demostrar.

Noten que las soluciones se comportan según lo esperamos, esto es, la velocidad, y , nunca se acerca a ∞ o a $-\infty$, mientras que la coordenada, x , aunque siempre crezca, no nos provoca problemas pues el crecimiento corresponde a un ángulo que debe interpretarse módulo 2π . Todas estas conclusiones cualitativas, que podemos obtener simplemente de mirar la Fig. 2, no son fáciles de obtener de la solución explícita (4). En la misma figura se muestran también puntos,

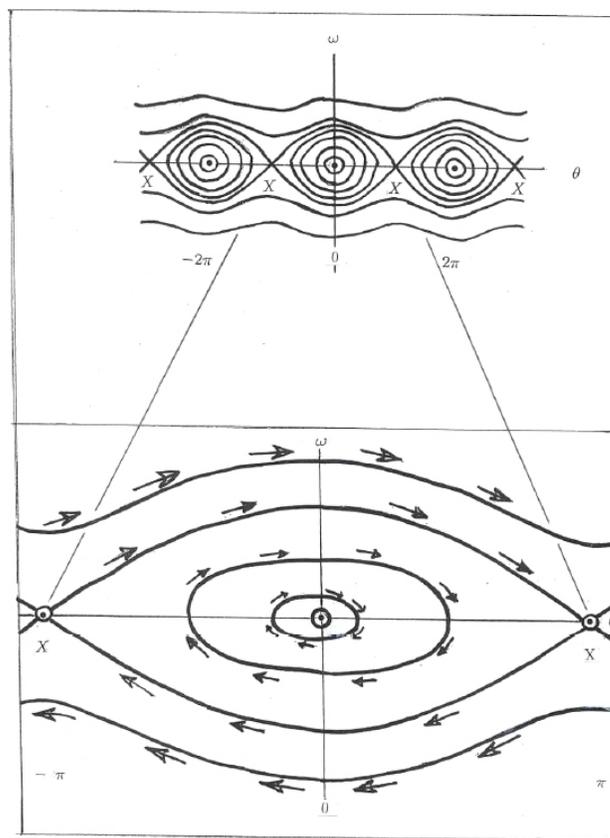


FIGURA 2. Diagrama de fases del péndulo. En la parte superior se muestra este diagrama cuando $\theta \in (-3\pi, 3\pi)$. La parte inferior muestra una ampliación de la zona central de la Figura superior —la que muestra la zona entre $-\pi$ y π e ilustra algo del campo vectorial asociado.

marcados como X , en el que las trayectorias parecen intersectarse. Estos aparentes puntos de cruce (algo totalmente imposible pues las soluciones son únicas) corresponden a soluciones extremadamente inestables de equilibrio en las que el péndulo permanece “cabeza abajo”.

2.2. Del péndulo elástico y las secciones de Poincaré

Ya vimos la capacidad de análisis que confieren los métodos geométricos a la Poincaré en un problema como el del péndulo. En tales análisis desempeñan un papel muy importante las soluciones de equilibrio (o sea los llamados puntos críticos) que se clasifican en nodos, N , puntos de silla, S , centros o focos, F , y que cumplen, según lo demostró Poincaré, $F + N - S = 2$ un resultado que es válido cuando se considera, como lo hizo Poincaré, al flujo compactificado sobre de la superficie de una esfera.

Poincaré obtuvo también resultados relativos a la existencia y propiedades de los llamados ciclos límite, que no son más que soluciones periódicas a las que muchas trayectorias vecinas se acercan asintóticamente e introdujo el famoso teorema de Poincaré-Bendixon, el que se puede usar para demostrar que no pueden existir atractores extraños en

dimensionalidades menores a tres. El teorema de Poincaré-Bendixon afirma que *en un sistema dinámico diferenciable definido en un subconjunto abierto del plano todo conjunto compacto no vacío que sirva como conjunto límite de una órbita y que contenga un conjunto finito de puntos fijos, sólo podrá ser (1) un punto fijo, (2) una órbita periódica, o (3) un conjunto conexo compuesto por un número finito de puntos fijos y que incluya a las órbitas homoclínicas y heteroclínicas que los conecten.* Para una formulación visual muy clara de este resultado véase [8]. Este resultado permite clasificar los comportamientos de un sistema dinámico bidimensional con un número finito de puntos críticos pues afirma que las únicas órbitas posibles serán aquellas que converjan o que diverjan a tales puntos o que converjan o diverjan a órbitas periódicas.

Poincaré introduce otras herramientas nuevas para el análisis entre ellas las *secciones de Poincaré* las que procedemos a ejemplificar inmediatamente. Imaginen las órbitas en el espacio de fases de un cierto sistema mecánico e imaginen una cierta (hiper-)superficie que se interponga en el camino de las trayectorias del sistema, ciertamente las trayectorias del sistema cruzarán esta superficie pues, por hipótesis, la sección es transversal y no paralela al flujo del sistema, a las huellas que dejen sobre la superficie estos puntos de cruce se les llama una *sección de Poincaré* y nos pueden dar información sobre la naturaleza de las soluciones a la ecuación diferencial [8]. Para ejemplos véanse las Figs. 4 y 5. Noten que siempre podremos concebir un mapeo que envíe los primeros puntos de cruce a los segundos, los segundos a los terceros y así sucesivamente, aunque garantizando siempre que todos los cruces ocurran en la misma dirección. A este mapeo se la llama un *mapeo de Poincaré* y puede ser interpretado como un sistema dinámico discreto cuyo espacio de estados es una dimensión mas pequeño que el del sistema dinámico original. Un mapeo de Poincaré hereda muchas de las propiedades del sistema original y como es de menor dimensionalidad se le usa frecuentemente para el análisis. Noten que un mapeo de Poincaré difiere de un *diagrama de recurrencia* en que no es el tiempo sino el espacio el que determina los puntos a graficar. Para ilustrar esto con ejemplos físicos: consideren a las sucesivas posiciones de la Luna cuando la Tierra está en el perihelio, el mapeo correspondiente puede considerarse un mapeo de recurrencia; pero a las sucesivas posiciones lunares cuando ésta atraviesa el plano perpendicular a la órbita de la Tierra y que pasa por las posiciones del Sol y de la Tierra cuando están en el perihelio, se le puede considerar un mapeo de Poincaré.

Para describir mejor las secciones de Poincaré, las ejemplificaremos en el caso del péndulo que comenzamos a estudiar unos párrafos atrás. Sólo que ya no consideraremos que el péndulo esté sujeto a un hilo inextensible ya que todo hilo se estira en mayor o menor grado; así que supongamos que el hilo es extensible. ¿Qué tanto tendrá que cambiar nuestra descripción? El sistema pasará de tener un sólo grado de libertad a tener dos y su espacio de las fases será ahora de dimensión cuatro en vez de dos; por lo que ya no podremos visualizar

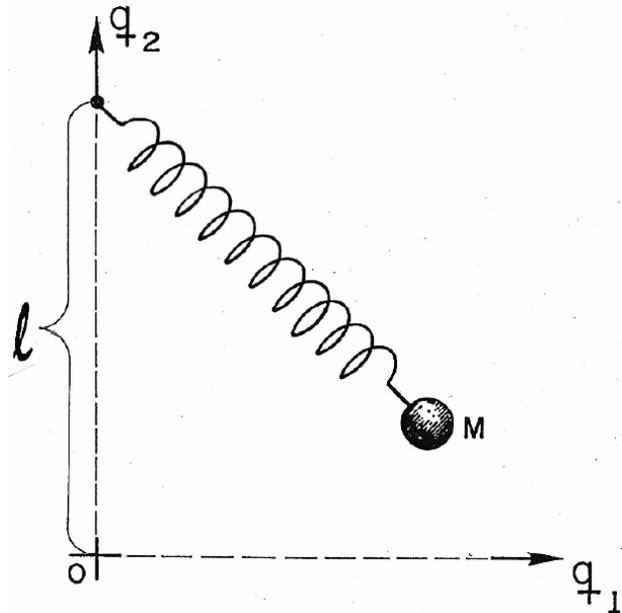


FIGURA 3. El péndulo de la Fig. 1 pero ahora hacemos evidente a la elasticidad presente en todo hilo.

fácilmente sus trayectorias en el espacio de fases como hicimos antes.

Concebiremos al péndulo sujeto a un hilo extensible él que imaginaremos como un resorte con longitud $l=l_0+mg/k$, en donde l_0 es su longitud inicial en ausencia de carga y mg/k como lo que aumenta de longitud al soportar la masa m de la lenteja, además consideraremos a k como la constante elástica del resorte (supuesto hookiano) y a $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$, como la aceleración de la gravedad. Véase la Fig. 3.

Si convenimos en localizar el origen en el punto de equilibrio de la lenteja, dividimos todas las longitudes entre la longitud inicial del péndulo, l_0 , dividimos todos los tiempos que aparezcan entre el tiempo característico de la oscilación del resorte, $1/\omega_s$ en donde $\omega_s \equiv \sqrt{k/m}$, $\omega_p \equiv \sqrt{g/l}$ y las energías entre $m\omega_s^2$, obtendremos la siguiente expresión adimensional para la energía del movimiento

$$E = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + f^2 q_2 + \frac{1}{2} \left[1 - f^2 - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2 \quad (7)$$

en donde el parámetro f que aparece en la ecuación anterior lo hemos definido como el cociente entre las frecuencias angulares de los movimientos de resorte y pendular del sistema, esto es, $f \equiv (\omega_p/\omega_s) = \sqrt{gm/lk}$.

Como el péndulo extensible, con energía (7), no es resoluble exactamente para visualizar su dinámica nos auxiliaremos de las secciones de Poincaré. Tales secciones tendrán que ser calculadas numéricamente puesto que no podemos dar una solución exacta al problema.

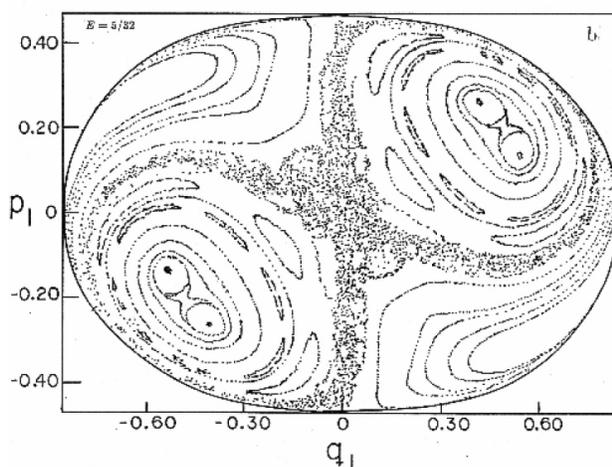
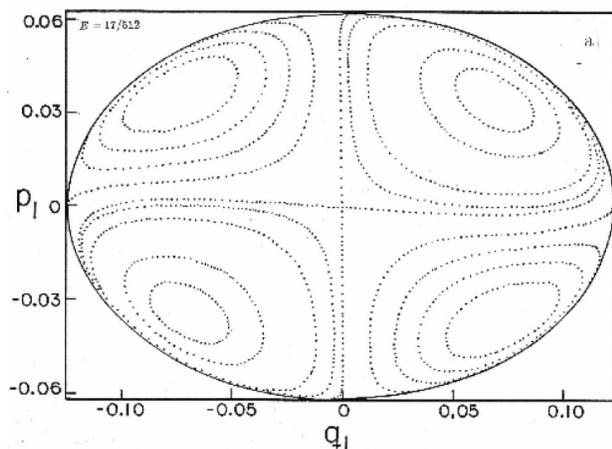


FIGURA 4. Secciones de Poincaré de un péndulo extensible. Se ilustra el cambio que ocurre en el sistema desde movimiento puramente regular a bajas energías $E = 0.033203$ (Fig. 4a) a un movimiento que incluye zonas caóticas a energías un poco mayores $E = 0.15625$ (Fig. 4b). Todas las secciones de Poincaré que se muestran en este trabajo se tomaron de [9].

Elegimos el plano p_2 - q_2 como la superficie transversal en la que se encuentran las secciones de Poincaré. Los resultados calculados numéricamente que se muestran en las Figs. (4a) a (5d) que van, desde una energía ligeramente superior a la mínima (energía $E = 0.0332031$, Fig. 4a) donde sólo la libración es posible, hasta una energía de 1.5 (Fig. 5d), que ya se encuentra en plena zona de movimiento rotacional [9]; estamos expresando las energías en unidades de $m\omega_s^2 l^2$, esto es en términos de doble de la energía de un oscilador armónico de frecuencia ω_s y amplitud l .

En estas secciones de Poincaré se puede notar que, a energías muy cercanas al mínimo, los puntos de cruce con la superficie transversal se pueden unir por curvas suaves, esto corresponde a órbitas cuasiperiódicas del sistema; se alcanza a adivinar la posible existencia de cuatro órbitas periódicas en cada uno de los cuadrantes de las secciones (o sea, de cuatro puntos aislados en el centro de las curvas cerradas que se muestran) al menos a la energía $E = 0.033203$ (Fig. 4a). A

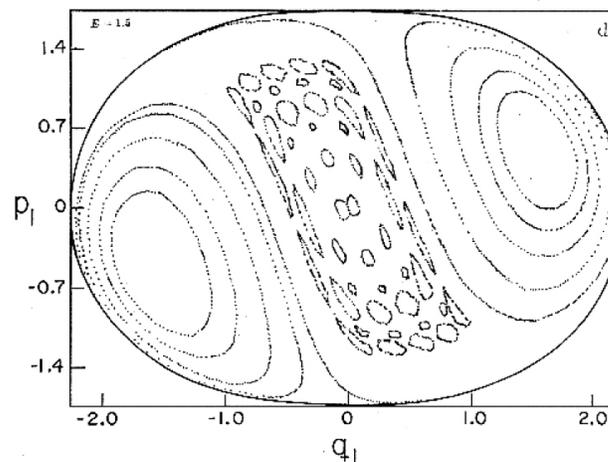
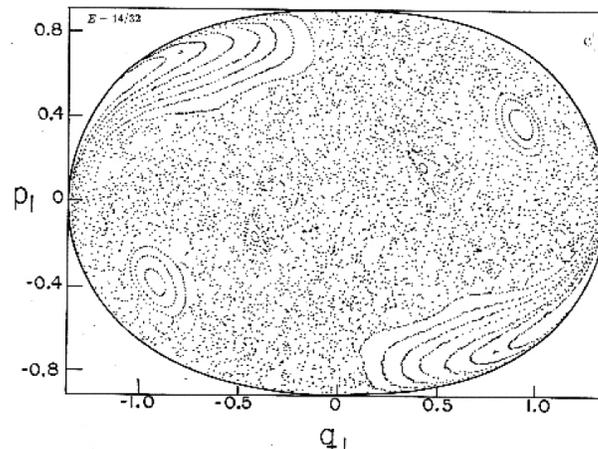


FIGURA 5. Más secciones de Poincaré del péndulo extensible. La-Figura ilustra el cambio que ocurre en el sistema desde el movimiento totalmente caótico a una energía $E = 0.4375$ (Fig. 5c) hasta que, al aumentar la energía el movimiento regresa a ser puramente regular (Fig. 5d).

energías intermedias ($E = 0.15625$ en la Fig. 4b), ha aparecido una zona de la superficie ocupada por trayectorias irregulares, lo que vemos como una “mancha” de puntos que aparentan estar elegidos al azar; además han desaparecido algunas de las curvas suaves formadas por intersecciones con la superficie transversal. Se dice que tal “mancha” está habitada por los cruces de *trayectorias caóticas* (las que se mueven con extrema irregularidad) con la superficie transversal. Aún así existen zonas de movimiento regular que tienen en el centro a al menos una órbita periódica, esto continúa hasta que a $E = 0.4375$ la región caótica alcanza su mayor extensión. Cuando aumentamos aún más la energía la zona caótica comienza a disminuir hasta que, para $E = 1.5$, ha prácticamente desaparecido del todo; todas las órbitas son de nuevo cuasiperiódicas según lo muestra la Fig. 5d. Tal comportamiento persiste a energías cada vez más grandes hasta que las trayectorias caóticas desaparecen del todo y lo único que queda es la rotación con una pequeña vibración superpuesta que casi no perturba a aquel movimiento. Este comportamiento queda ilustrado en los mapeos de Poincaré correspondientes a la Fig. 5d. Nótese que las figuras mencionadas ilustran a la

perfección como los mapeos de Poincaré permiten distinguir las soluciones regulares a las ecuaciones de movimiento de las soluciones irregulares a las que llamamos caóticas.

En este punto conviene detenernos un momento a explicar que la aparición del caos determinista es producido por trayectorias muy irregulares que son aparentemente azarosas; y que sin embargo, a pesar de las apariencias, las trayectorias son totalmente deterministas pues se obtienen de resolver las ecuaciones de Hamilton (o de Newton o de Lagrange, todas son equivalentes) para el problema. Estas trayectorias son completamente diferentes de las que se podrían obtener del azar genuino. La irregularidad evidente en las gráficas está asociada a la imposibilidad de predecir con toda precisión la evolución futura del sistema, lo que es una característica esencial del caos determinista, aunque tal evolución esté totalmente determinada de antemano. Para repetir una definición clásica, *el caos determinista aparece debido a la sensibilidad extrema que muestran muchos sistemas ante pequeños cambios en las condiciones iniciales* [8,9].

¿Cómo entender tal comportamiento? Podemos decir que el movimiento *caótico* es producido por la compleja interacción que se da entre el movimiento rotacional y el oscilatorio, él que, a energías relativamente bajas y dada la falta de espacio de fases suficiente, provoca oscilaciones irregulares que se montan sobre las pendulaciones que son también irregulares, dando lugar a amplias zonas caóticas y dejando a las trayectorias regulares con muy poco espacio disponible. Al aumentar aún más la energía aparece la posibilidad de girar completamente lo que ofrece menos restricciones al movimiento por lo que la zona caótica comienza a desaparecer aumentando de nuevo el espacio disponible para las órbitas regulares. A energías suficientemente altas el péndulo comienza a girar alrededor del punto de suspensión y el efecto del movimiento oscilatorio poco afecta a tal rotación. De hecho, un cálculo simple indica que el movimiento caótico comienza a desaparecer cuando la energía rebasa el valor 1.5, que es la energía de la separatriz —esto es la energía a la que comienzan a ser posibles los giros del péndulo alrededor de su punto de sujeción— correspondiente a un péndulo de longitud fija.

3. El teorema de la recurrencia

Demostraremos ahora un resultado de Poincaré que no sólo es muy importante sino también inesperado puesto que hace de las trayectorias confinadas de un *sistema dinámico conservativo* cualquiera algo parecido a órbitas periódicas.

El **teorema de la recurrencia** de Poincaré afirma que *dadas cualquier par de condiciones iniciales, P_1 y P_2 , para las órbitas confinadas en un sistema dinámico conservativo y dada una distancia fija $R_0 \geq |P_1 - P_2|$, entonces, sin importar las interacciones a que estén sujetas las partículas, la dinámica misma del sistema eventualmente las llevará a una distancia, D_r , entre ellas, que sea menor o igual que R_0* . Un caso simple de la recurrencia ocurre cuando el sistema regresa a su estado inicial sin tener antes que recorrer todo el espa-

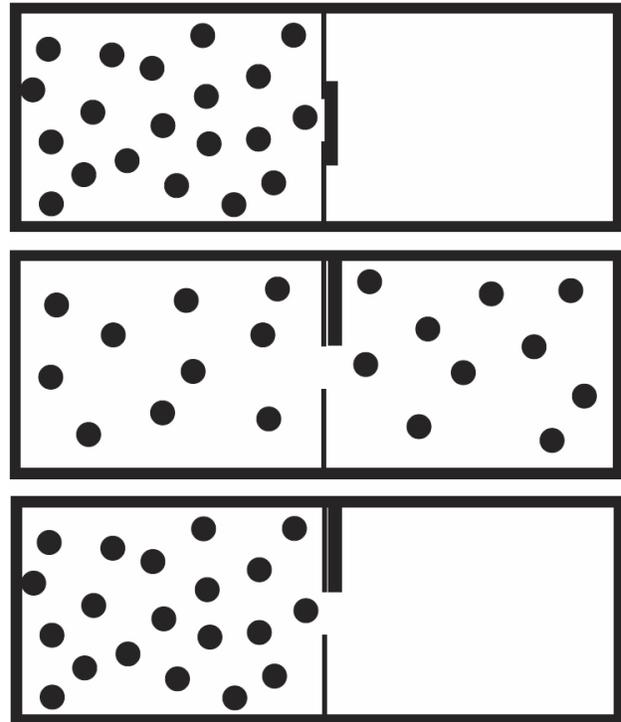


FIGURA 6. La “paradoja de la recurrencia.” Si dejamos salir gas de un recipiente cerrado y esperamos lo suficiente, según el teorema de la recurrencia el gas se concentrará de nuevo en el recipiente. Esto *nunca* ha sido observado —pero tal vez se trate de que no esperamos el tiempo necesario.

cio de fases a su disposición; ello ocurre en los sistemas periódicos y en tal caso el tiempo de recurrencia es el período del sistema. También hay sistemas que recorren todo o, al menos una buena parte, del espacio de fases que tienen disponible; a éstos se les llama *sistemas ergódicos* para usar el término propuesto por Boltzmann [6-10].

Lo que el teorema de la recurrencia significa es que cualquier sistema dinámico con una cantidad fija de energía y confinado a un volumen finito, tendrá que regresar, tras un tiempo lo suficientemente grande, a un estado arbitrariamente próximo a su estado inicial. Este resultado contradice directamente las hipótesis en que se basa la mecánica estadística, por ello es conocido como la paradoja de la recurrencia, pues la mecánica estadística presupone el comportamiento puramente aleatorio en la dinámica, al menos en el límite de tiempos muy grandes, en sistemas de muchos cuerpos en directa contradicción con algo que es muy parecido al comportamiento periódico. Esta contradicción entre los fundamentos de la mecánica estadística y el teorema de la recurrencia fue formulada por E. Zermelo y ocasionó una discusión muy intensa con L. Boltzmann [11,12].

Para entender mejor la naturaleza de esta supuesta paradoja recurramos a un ejemplo específico: Imaginen una caja que contenga tanto a un gas como a un espacio vacío separado del gas por una pared, como ilustramos en la Fig. 6. Si perforamos la pared el gas escapará, según es experiencia común; pero el teorema de la recurrencia nos asegura que de esperar



FIGURA 7. Al meter una hebra muy larga —en estricto, infinita— de fideo dentro de una caja de volumen finito, el tubo de fideo eventualmente regresará, después de muchos dobleces y de recorrer los más posible del espacio disponible, a estar muy cerca del lugar en donde empezó su recorrido.

el tiempo apropiado el gas se reincorporará espontáneamente a su espacio original. Dicho en términos cotidianos, un pequeño agujero en un tanque de gas no debiera ser motivo de preocupación ya que bastará que esperemos un tiempo, T_r , para que el gas perdido en la atmósfera ¡se acumule de nueva cuenta en el tanque! Se podría argüir que nunca se ha observado tal cosa. Entonces, ¿cómo resolver esta aparente contradicción entre lo que observamos cotidianamente y el resultado de Poincaré? Bástenos para ello recurrir a cálculos aproximados que se han realizado del tiempo de recurrencia para percatarnos de que en una situación genérica, como el ejemplo del tanque estacionario, T_r es de aproximadamente 10^{30} años [10, 13, 14], tiempo que es mucho mayor que los 10^{10} años de la edad del universo—calculada a partir de los datos obtenidos por la sonda Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) que fue lanzada el 30 de junio de 2001 [15].

Pero, en muchos casos T_r es fácilmente calculable y de una magnitud muy razonable desde un punto de vista humano. Puede corresponder al período de un oscilador armónico en donde $T_r = 2\pi\sqrt{m/k}$, con m la masa del cuerpo oscilante y k la constante elástica del resorte. Si usamos valores para la masa y la constante de, digamos $250\text{ g} = 0.25\text{ kg}$ y $k = 10\text{ newton/m}$, obtendremos un tiempo de recurrencia perfectamente observable de casi un segundo.

3.1. Demostración del teorema de la recurrencia

La demostración que daremos se basa en dos supuestos básicos:

1. que las trayectorias en el espacio de fases nunca se cruzan y
2. que el volumen de cualquier región del espacio de fases se mantiene constante bajo la acción de la dinámica [16].

La demostración heurística del teorema de la recurrencia es muy simple:

Imaginen una vecindad, a la que llamaremos Ω , de cualquier punto en el espacio de las fases, si concebimos a todos los puntos en este conjunto como condiciones iniciales podremos seguir su evolución conjunta bajo la dinámica del sistema; así, al evolucionar, definirá una región tubular a la que llamaremos un *tubo de trayectorias*, Ω_t , que recorrerá todo el espacio de fases disponible pero que nunca podrá cruzar regiones ya visitadas —¡las trayectorias en el espacio de fases nunca se cruzan!— de aquí que el volumen disponible para el recorrido decrezca continuamente y como, por hipótesis, el volumen es limitado y finito al mismo tiempo, todo el espacio de fases accesible tendrá que recorrerse eventualmente de manera completa —sólo imaginen una hebra de fideo de longitud infinita a la que quieran guardar en un recipiente de volumen limitado, ver la Fig. 7— entonces, no le quedará a Ω_t más que volver a dirigirse hacia la región inicial. Noten que nada de lo que hemos dicho requiere que cada trayectoria individual se acerque tanto como lo queramos a su propia condición inicial ya que estará completamente mezclada con otras dentro del tubo. Por ello, la recurrencia es sólo aproximada y estará limitada por el diámetro de Ω_t . Para obtener un mayor acercamiento al inicio necesitaremos recurrir a tubos cada vez más delgados, pero ello conducirá a tiempos de recurrencia más y más grandes.

La prueba informal anterior puede generar preguntas sobre si realmente se ha demostrado algo o no. Ello porque sabemos que un sistema caótico tiene sensibilidad extrema ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales así que la trayectoria original y las trayectorias vecinas, aunque sean cercanísimas, divergirán exponencialmente. El fideo se desparramará por todos lados y nuestra prueba, al no poder suponer un tubo único e indivisible durante todo el recorrido, colapsará. Para evitar suspicacias de este tipo decidimos ofrecer una demostración un tanto más formal del resultado la que pueden encontrar en el Apéndice 1. Por otro lado, tal vez algún lector avezado pueda arreglar la prueba heurística para que no se puedan dar en su contra argumentos como los que expusimos. Agradeceríamos que nos comunicasen de sus esfuerzos en este sentido. Una demostración diferente se puede encontrar en el libro de Arnold [17].

Se ha establecido que *las trayectorias de un sistema en que la energía se conserva y en el que las trayectorias se restringen a valores finitos de las coordenadas, pasa en repetidas*

ocasiones —un número infinito de veces— tan cerca como se quiera de sus condiciones iniciales. Uno puede calificar a este resultado de admirable y puede preguntarse ¿cómo se le ocurrió a Poincaré demostrar esto? Lo que podemos colegir es que el teorema de la recurrencia es resultado de la frustración de Poincaré ante la imposibilidad de demostrar la estabilidad del sistema solar. Esta frustración está claramente expresada en su artículo *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* [18], por el que ganó el Premio convocado por el Rey Oscar II de Suecia para quien demostrara la estabilidad del sistema solar—lo que ni Poincaré ni nadie han logrado demostrar hasta la fecha. El premio se le otorgó a Poincaré en 1889 y provocó un escándalo mayúsculo en círculos científicos por la incompletez, que algunos interpretaron como indicativo de falta de validez de las demostraciones de algunos de los resultados [3]—y algunos resultados eran ciertamente incorrectos en la versión que inicialmente envió Poincaré. Las correcciones que Poincaré tuvo que realizar lo llevaron directamente al descubrimiento del caos hamiltoniano [1, 4].

Hemos logrado demostrar el teorema de la recurrencia, el que establece las condiciones bajo las cuales un movimiento puede considerarse, como Poincaré lo llamaba, *estable en el sentido de Poisson*. El teorema de la recurrencia no hace referencia alguna al tiempo en el que tal recurrencia deba manifestarse y tales tiempos pueden ser muy importantes. Los tiempos de recurrencia han sido calculados aproximadamente y podemos decir que para sistemas genéricos de interés son mucho mayores que la edad del universo. Aunque hay sistemas en que el tiempo de recurrencia es “pequeño” y se puede ajustar a nuestro antojo, como es el caso de período del péndulo de un reloj. El resultado sobre la recurrencia fue obtenido por Poincaré durante sus investigaciones sobre del problema de los tres cuerpos y se le puede considerar una suerte de premio de consolación que Poincaré se dió a si mismo al no poder establecer su estabilidad—tal vez por ello llamó a tales sistemas *estables* en el sentido de Poisson.

4. Conclusiones

La utilidad de muchas de las ideas de Poincaré en la ciencia contemporánea deben ser bastante evidentes pues, para poner sólo un ejemplo, ¿cómo podríamos imaginar el análisis de un sistema dinámico bidimensional desconocido sin el apoyo de las secciones de Poincaré? Y que decir del fascinante teorema de la recurrencia que provoca en la mente retintines similares a los causados por la idea, básicamente religiosa, del eterno retorno pero con la cual no tiene relación alguna. Se ha demostrado un resultado semejante en la teoría cuántica [19], a saber, que el vector de estado de un sistema cuántico confinado ha de regresar después de un tiempo a estar tan cerca como se quiera del vector estado inicial. El enunciado del que podríamos llamar *teorema de la recurrencia cuántico* es: *en un sistema que posea un conjunto discreto de estados propios $\psi_n, n = 1, 2, \dots$; si $\psi_s(t_0)$ es uno de estos estados al tiempo t_0 y ϵ es un número positivo cualquiera, siempre exis-*

tirá un tiempo $t_1 > t_0$ tal que el módulo de la diferencia $|\psi(t_1) - \psi(t_0)|$ sea más pequeña que ϵ ; el módulo es el usual para estados cuánticos.

Hacemos notar otra vez que al análisis *à la Poincaré* de sistemas mecánicos se le podría llamar *mecánica clásica cualitativa*, la que, creemos, debería enfatizarse más en los cursos de mecánica tanto para científicos como para ingenieros. Es de notarse también que aunque Poincaré fuera uno de los pilares de las matemáticas en el momento en que éstas comenzaron su camino definitivo a la abstracción, él mismo era eminentemente intuitivo. Le disgustaba un tanto la formalidad y nunca se preocupaba mucho por ella. Creía que el camino para la invención no podía hallarse en la lógica y que ésta sólo debía servir para establecer la verdad de una afirmación y delimitar los alcances de las ideas. Quizá Poincaré haya sido también el último matemático capaz de moverse a sus anchas por toda la complicada estructura que forman las matemáticas y sus interrelaciones con la física y con otras ciencias [1–5]. Pero las afirmaciones anteriores sobre de Poincaré y su relación con la formalidad no deben interpretarse como sugiriendo que él menospreciara las demostraciones; no, las reconocía como el ingrediente fundamental de las matemáticas y aunque fuese intuitivo sabía perfectamente que las matemáticas no se pueden basar en la intuición pues ésta conduce muchas veces a resultados incorrectos [2]. Estas consideraciones también pueden aplicarse a la física aunque ésta sea una ciencia experimental; la pura intuición puede conducir a resultados erróneos y es siempre necesario contrastarla con los resultados experimentales. La realidad es el único árbitro de validez en la ciencia.

Poincaré fué uno de los grandes pensadores de la historia y fué uno de los científicos más importantes de finales del siglo XIX y de principios del siglo XX. Basta conocer de sus aportaciones a la mecánica clásica, de su contribución al desarrollo de las ideas que llevaron a la relatividad y a las que determinaron el desarrollo de la teoría cuántica, de su desarrollo de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y de conocer el teorema de la recurrencia —él que demostramos en este trabajo— para quedar plenamente convencidos. Para concluir mencionamos una de las peculiaridades de esta historia: ni Poincaré ni Einstein parecen haber reconocido la genialidad de las ideas del otro. Ni siquiera conocemos evidencia de que hubiesen intercambiado palabras, mas allá de las cortesías habituales, en los Congresos Solvay en los que coincidieron; eso a pesar de que Poincaré estuvo cerca de desarrollar la relatividad especial, de que trabajó en problemas relacionados con la invariancia de las ecuaciones de Maxwell, de que publicó penetrantes análisis acerca del problema del tiempo y de que participó en las discusiones acerca de las ideas cuánticas en desarrollo en esos momentos [4, 20].

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a la memoria del Profesor Lorenzo Salas Canto (Mérida Yucatán, mayo 31 de 1920–Mérida

Yucatán, agosto 20 de 2012). También agradecemos los comentarios del Dr. Didier Solís Gamboa de la Facultad de Matemáticas de la UADY y los de nuestros queridos amigos P. R. Schwartz, E. Quita, P. C. Zeus, S. D. Micha, F. C. Neko, G. O. Hatul, C. M. Lince, U. C. Mis, N. Siam, M. Kuroi y M. S. Pelusa.

A. Apéndice

A.1. Una demostración más formal del teorema de la recurrencia

La demostración que ofrecemos aunque parezca muy formal no lo es tanto pues hay afirmaciones que damos sin demostración y **no** intentamos demostrarlas.

Vamos a considerar un sistema independiente del tiempo, o *autónomo*, que toma la forma genérica

$$\dot{x} = G(x) \quad (\text{A.1})$$

en donde tanto G , como x pueden ser objetos de más de una componente (vectores, por ejemplo) y \dot{x} representa la derivada de x respecto del tiempo t —que, de ser necesario, podríamos considerar como cualquier otro parámetro. Supondremos también que, debido a la dinámica inducida por (A.1), el flujo $G(\omega)$ donde ω es la región inicial—lo que llamamos un “tubo” en la sección donde demostramos heurísticamente el teorema de la recurrencia— que mantiene constante su volumen durante toda la dinámica. Podríamos decir que el flujo inducido por la dinámica es *incompresible*, resultado que es conocido en la mecánica hamiltoniana como el *teorema de Liouville* [16]. También supondremos que la región que nos interesa (la región tubular de la que hablamos) está completamente sellada, ninguna trayectoria escapa o se añade a ella. Noten también que en este apéndice hablamos algunas veces de partículas y sus trayectorias cuando debiéramos decir condiciones iniciales y trayectorias que surgen a partir de ellas.

Entonces, sea A una región cualquiera contenida en Ω , el espacio de fases del sistema y α es un subconjunto abierto—

esto es, que no incluye a su frontera—en él, si su volumen, o *medida* como más formalmente se le llama, es V_α , entonces, sin importar su pequeñez, siempre existirán trayectorias originadas en α que regresarán a él cruzándolo una infinidad de veces; o, dicho de otra forma, que dado un valor t_1 cualquiera siempre existen valores $t' > t_1$ tales que el sistema se encuentra de nuevo en α a tal tiempo.

Sea α_1 el conjunto abierto ocupado por las partículas que salen de la región α pero observadas a un tiempo específico, $\tau > 0$, posterior, *i.e.* $\alpha_1 = G_\tau(\alpha)$; de α_1 diremos que es el τ -sucesor de α , mientras que de α diremos que es el τ -antecesor de α_1 . Así podemos definir los conjuntos α_i con un número natural mayor que 1. Noten que todos los α_i $i \geq 1$, son también conjuntos abiertos. Ahora, si N es tal que N es más grande que el cociente entre sus medidas, V_A/V_α , las regiones α_k no podrán ser, todas, disjuntas entre sí; al menos una pareja, digamos, la α_i y la α_j , tendrá una intersección, β , que no será vacía, y estará definida por $\beta = \alpha_i \cap \alpha_j \neq \emptyset$; supondremos que β tiene medida diferente de cero.

Debe ser claro que una vez especificado α , el conjunto α_1 queda, al dar τ , unívocamente determinado y que dado β , α también queda determinado. Mas aún, toda partícula que esté en α al tiempo inicial, estará en α_1 al cabo del tiempo τ y viceversa. Ahora elijamos los 2, 3 \dots , n -antecesores de α a los que llamaremos $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$; todos ellos tendrán, por el teorema de Liouville, el mismo volumen o medida, M y estarán contenidos en Ω . Ahora, si N es tal que N es más grande que el cociente entre sus medidas, V_A/V_α , las regiones α_k no podrán ser, todas, disjuntas entre sí; al menos una pareja, digamos, la α_i y la α_j , tendrá una intersección que no será vacía, $\alpha_i \cap \alpha_j = \beta \neq \emptyset$. Vamos a suponer además que β no tiene medida cero. Los conjuntos α_i y α_j tendrán a una cierta región en común, y, recuerden, su medida, V , será diferente de 0 por definición. Podemos ahora colegir que tanto α como α_p (con $p > 1$) tienen un antecesor con la misma medida, V , ya que esta medida es invariante por el teorema de Liouville [16, 17].

Quod erat demonstrandum.

1. I. Ekeland, *Mathematics and the unexpected* (University of Chicago Press, Chicago USA, 1988).
2. E. Charpentier, È. Ghys, A. Lennick (Eds.) *The Scientific Legacy of Poincaré* (American Mathematical Society–London Mathematical Society, London UK, 2010).
3. F. Verhulst, *Henri Poincaré* (Springer–Verlag, Berlin, 2012).
4. J. Gray, *Henri Poincaré, A Scientific Biography* (Princeton University Press, Princeton USA, 2013).
5. E. Toulouse, *Henri Poincaré* (Flammarion, París, 1910).
6. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* tres volúmenes publicados en Paris entre 1892 y 1899 por Gauthier-Villars et fils.
7. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York USA, 1965) Chapter 5.
8. R. H. Abraham y J. E. Marsden, *Dynamics: The geometry of behavior* (Addison-Wesley, New York USA, 1992). p. 361.
9. H. N. Núñez-Yépez, *Regularidad y caos en sistemas dinámicos* (FC-UNAM, Cd. de México, 1990).
10. J. L. Lebowitz y O. Penrose, *Physics Today* **26** (1973) 23.
11. E. Zermelo, *Collected Works / Gesammelte Werke*, Vol. I, Springer, Berlín, (2010); Vol II, Springer, Berlín, (2011), editor principal, Heinz Dieter Ebbinghaus; editores asociados: Akihiro Kanamori, Craig G. Fraser, Enzo de Pellegrin (Traductor).
12. V. S. Steckline, *Am. J. Phys.* **51** (1983) 894.
13. M. D. Boshernitzan, *Inventiones Mathematicae* **113** (1993) 617.

14. D. N. Page in S. A. Fulling, *Heat Kernel Techniques and Quantum Gravity. Discourses in Mathematics and its Applications* (Texas A & M University, College Station USA, 1993) p. 461.
15. D. Komatsu *et al.*, *Ap. J. Supp. Ser.* **180** (2009) 330.
16. L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, New York USA, 1976). p. 146.
17. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Springer Verlag, New York USA, 1978).
18. H. Poincaré, *Acta Mathematica* **13** (1890) A3-A270.
19. P. Bocchieri y A. Loinger, *Phys. Rev.* **107** (1957) 337.
20. P. Galison, *Einstein's clocks, Poincaré's maps* (W. W. Norton, New York USA, 2003).