

Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales

S. Lopez-Aguayo, M. Esparza-Echevarría, G. Lem-Carrillo y J. C. Gutiérrez-Vega

Photonics and Mathematical Optics Group, Tecnológico de Monterrey,

Monterrey, México 64849,

e-mail: servando@itesm.mx

Received 24 February 2014; accepted 12 May 2014

Se expone la teoría básica de los solitones ópticos espaciales, enfocándose en los solitones fundamentales brillantes. Estos conceptos son ilustrados mediante dos programas desarrollados en MATLAB. El programa Petvia_Mex, calcula el perfil de los solitones fundamentales que corresponden a la ecuación no lineal general de Schrödinger, mientras que el programa SSF_Mex, simula la propagación paraxial de un haz óptico en un medio no lineal. Utilizando ambos programas, se discuten diversos casos de importancia en el área de los solitones ópticos espaciales, con el fin de estimular el interés en el lector tanto en el área de los solitones, como en el área de la física no lineal en general.

Descriptores: Solitones; ondas no lineales; ondas solitarias; óptica no lineal.

The basic theory of spatial optical solitons is reviewed, focusing on fundamental bright solitons. The Physics of solitons is illustrated with two programs developed in MATLAB. One of these programs Petvia_Mex, calculates the profile of fundamental solitons corresponding to the generalized nonlinear Schrödinger equation, while the other program SSF_Mex, simulates the paraxial propagation of optic beams in non-linear media. Using both codes, various phenomena of spatial optical solitons are discussed to stimulate the interest of the reader into soliton theory and Nonlinear Physics in general.

Keywords: Solitons; nonlinear waves; solitary waves; nonlinear optics.

PACS: 42.65.Tg; 42.81.Dp; 42.65.Sf

1. Introducción

1.1. Antecedentes históricos

En 1834, el ingeniero escocés John Scott Russell, al encontrarse en el canal Unión en Hermiston, Escocia, registró por primera vez un fenómeno que se volvería fundamental para el desarrollo de la física no lineal. En las propias palabras de Russell [1]:

“Creo que será mejor introducir este fenómeno describiendo las circunstancias de mi primer encuentro con esto. Estaba observando el movimiento de un bote, el cual era jalado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos cuando el bote se detuvo repentinamente, mas no así la masa de agua justo delante de la proa del bote en el canal, la cual se había puesto en movimiento en un estado de violenta agitación: repentinamente, esta masa en agitación empezó a salir hacia delante con gran velocidad, tomando la forma de una larga elevación solitaria, redonda, suave y bien definida de una masa de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. La seguí montado en un caballo, y aún la vi pasar a una razón de algunas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original algunos treinta pies de largo y entre un pie y pie y medio de altura. Pasado un tiempo, su altura gradualmente disminuyó, y después de seguirla una distancia de dos millas, la perdí en unos recodos del canal. Así que, en el mes de agosto de 1834, fue mi primera oportunidad de encontrarme con ese singular y hermoso fenómeno, al cual he llamado onda de traslación, un nombre que generalmente ahora se acepta”.

El mérito de Russell consistió en seguir dicha “onda de traslación” durante una muy larga distancia para así reportar por primera vez tal fenómeno. Durante los primeros casi 100 metros, una onda solitaria se mantuvo propagando con la misma forma, contrario a la mayoría de las olas que simplemente se “rompen” o atenúan de manera mucho más rápida. Sin embargo, esta onda solitaria logró sobrevivir durante más de 3 Km. La teoría hidrodinámica hasta entonces conocida, resultaba insuficiente para explicar la existencia de tal fenómeno. Esta condición motivó a que reconocidos científicos de aquella época, tales como Airy y Stokes, afirmaran que las conclusiones obtenidas de las observaciones experimentales de Russell debían estar equivocadas [2]. No fue sino hasta el año de 1871, cuando el francés Boussinesq publicó el formalismo físico-matemático necesario para dar sustento a las observaciones de Russell [3]. Posteriormente, en 1895 los matemáticos holandeses Korteweg y su estudiante De Vries obtuvieron una ecuación diferencial parcial que modelaba el fenómeno observado por Russell: la llamada ecuación KdV [4]. Sin embargo, dicha ecuación, al ser no lineal, representaba también un enorme reto para su análisis durante esa época, quedando paulatinamente, como una mera curiosidad científica. No fue sino hasta el surgimiento de las primeras computadoras, cuando durante 1965 dos físicos-matemáticos americanos, Norman Zabusky y Martin Kruskal, realizaron los trabajos pioneros en la obtención de soluciones numéricas a la ecuación KdV [5], demostrando la existencia de ondas solitarias que se mantenían evolucionando permanentemente sin sufrir deformación alguna, dándole además el nombre a dichas soluciones no lineales de “solitones”. Posteriormente, la existencia de solitones fue paulatinamente identificada en

diversos sistemas de la naturaleza: además de producirse en los canales de agua, se encontró la posibilidad de formación de solitones en fibras ópticas, en los impulsos eléctricos de las neuronas, en procesos de condensación de Bose-Einstein, en el transporte de energía en proteínas o incluso en la formación de tormentas en otros planetas como en la mancha roja del planeta Júpiter. El fenómeno solitón se volvió recurrente a gran escala en física no lineal: apareció desde el estudio de la fuerza gravitatoria hasta la teoría de cuerdas [6-10].

1.2. Solitones ópticos espaciales

Es importante aclarar que la definición formal del término solitón varía conforme al área de estudio, llegando incluso a ser motivo de controversia entre puristas.

Para el presente trabajo, definimos al solitón de manera general como: “*una onda solitaria que no sufre una deformación visible durante su evolución en un medio no lineal*”. Dicho de otro modo, el solitón es una onda aislada que se comporta como partícula al excitarse diversos fenómenos no lineales.

En óptica, existen dos principales tipos de solitones: si los fenómenos no lineales logran contrarrestar el fenómeno de dispersión cromática (fenómeno donde diferentes longitudes de onda viajan a diferentes velocidades) produciendo una invarianza del perfil en el tiempo, se habla de un solitón óptico temporal, mientras que si la no linealidad contrarresta la difracción y la invarianza del haz es producida en alguna coordenada espacial, se habla entonces de un solitón óptico espacial. En el presente trabajo nos concentraremos en este último tipo de solitones. Sin embargo, muchos de los conceptos aquí expuestos pueden ser extrapolados a la teoría de solitones ópticos temporales, así como a la física de solitones en general [11].

Un haz de luz láser al propagarse en un medio no lineal, puede modificar el índice de refracción de tal manera que este aumente como resultado de una mayor intensidad del láser, produciendo un fenómeno de un auto-enfocamiento del haz óptico, y oponiéndose así a la tendencia natural del haz de experimentar una divergencia debido al fenómeno de difracción. Si el fenómeno de auto-enfocamiento por cuestiones no lineales y la difracción son balanceadas adecuadamente, el haz no sufrirá deformación, creándose así un solitón óptico espacial.

La primera observación con solitones espaciales reportada data de 1974 por Ashkin y Bjorkholm [14], al propagar en una celda llena de vapor de sodio, un haz con un perfil transversal simétrico circular. A bajas potencias, el haz láser se difractó dentro de la celda, mientras que para altas potencias, el haz se estabilizó y se logró propagar sin experimentar una difracción visible.

Todos los solitones ópticos requieren que se produzca una excitación no lineal lo suficientemente fuerte entre el haz de luz láser y el material a través del cual dicho haz se propaga. Esta excitación requiere que la distancia de difracción del haz sea comparable con la distancia donde se manifies-

ta el auto-enfocamiento del haz debido al medio no lineal. En el caso de solitones espaciales, estas distancias se limitan típicamente a centímetros, dando como consecuencia que se requiera una excitación fuerte de alguna no linealidad, a diferencia de los solitones temporales producidos en fibras ópticas, en donde la no linealidad excitada es pequeña, pudiendo ser esta tratada como un fenómeno de perturbación, y dando como resultado que las distancias de propagación en estos casos pueden llegar a ser de kilómetros. Además, otra diferencia entre los solitones espaciales respecto a los temporales es su dimensionalidad. Mientras que los solitones de fibra óptica se describen por una única dimensión temporal, los espaciales pueden ser de 1, 2 o 3 dimensiones, dependiendo del número de dimensiones espaciales en donde se logre el auto-atrapamiento por cuestiones puramente no lineales. Esta posibilidad les transfiere a los solitones ópticos espaciales, una mayor riqueza y complejidad de fenómenos, tal como la capacidad de producir trayectorias circulares y espirales, facilitando el estudio de transferencia de momentum angular en medios no lineales [11-16].

Otra propiedad de interés en los solitones, es el estudio de las interacciones entre ellos [17], siendo esta propiedad por la que se sugirió originalmente el nombre de “*solitón*” al fenómeno, debido a su comportamiento de partícula, ya que los solitones son capaces de experimentar fenómenos de atracción, repulsión o transferencia tanto de momentum lineal como de momentum angular. En el caso más simple de un solitón de una dimensión, y para un reducido número de medios no lineales, las interacciones pueden ser tratadas de manera analítica usando una técnica matemática conocida como dispersión inversa (Inverse Scattering) [8,15]. Sin embargo, para la mayoría de los medios no lineales, el análisis mediante simulaciones computacionales se vuelve en muchas ocasiones, la única herramienta disponible actualmente para realizar estudios de solitones.

2. Teoría de solitones ópticos espaciales

2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger generalizada

Empezamos una descripción físico-matemática de los solitones ópticos espaciales, señalando que la propagación de un campo eléctrico complejo escalar E asociado con un haz óptico continuo, se puede modelar a partir de la siguiente ecuación de onda obtenida directamente de las ecuaciones de Maxwell [11]:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y ε_0 es la permitividad del vacío. La polarización inducida P , se puede expresar como:

$$P(\mathbf{r}, t) = P_l(\mathbf{r}, t) + P_{nl}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

expresión en la cual $P_l(\mathbf{r}, t)$ modela los efectos lineales, y $P_{nl}(\mathbf{r}, t)$ aquellos de características no lineales, y en donde $\mathbf{r}$

representa las coordenadas espaciales. Asumiendo que (i) la respuesta no lineal del medio es instantánea, (ii) que $P_{nl}(\mathbf{r}, t)$ puede ser considerada como una perturbación a $P_l(\mathbf{r}, t)$, (iii) que el campo óptico mantiene su polarización en propagación y además (iv) que el campo óptico es cuasi-monocromático, proponemos una solución en la forma

$$E(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) \exp(i\beta_0 z), \quad (3)$$

donde $\beta_0 = 2\pi n_0/\lambda$, es la constante de propagación en función de la longitud de onda λ , y n_0 es el índice de refracción en el vacío. Se puede demostrar que al asumir la aproximación paraxial, la envolvente del haz óptico $\Psi(\mathbf{r})$ cumple con la siguiente ecuación diferencial no lineal [11,19]:

$$i\beta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) + \beta_0 k_0 n_{nl} (|\Psi|^2) \Psi = 0, \quad (4)$$

donde $k_0 = 2\pi/\lambda$ y n_{nl} es el término que modela la no linealidad en función de la intensidad del haz óptico $|\Psi|^2$. Observe que en ausencia de fenómenos no lineales, la Eq. (4), se reduce a la ecuación paraxial. A continuación, se define $n_{nl} = n_2 G(|\Psi|^2)$, siendo $n_2 > 0$, el coeficiente Kerr del material no lineal. En el estudio teórico de solitones, es práctica común el introducir variables adimensionales, esto con el fin de facilitar el posterior análisis numérico. Por lo anterior, se propone un cambio de variables [11]:

$$\begin{aligned} x &= X/w_0, & y &= Y/w_0, \\ z &= Z/L_d, & U &= \sqrt{k_0 |n_2| L_d} \Psi, \end{aligned} \quad (5)$$

donde w_0 un parámetro de escala transversal relacionado con el ancho del haz inicial y $L_d = \beta_0 w_0^2$ es conocida como la distancia de Rayleigh o la longitud de difracción. De esta manera, la Eq. (4), puede ser reescrita de manera adimensional como:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + N(|U|^2) U = 0, \quad (6)$$

siendo la función $N(|U|^2)$ aquella que describe las propiedades no lineales del medio, con la condición de $N(0) = 0$. La Eq. (6) es conocida como la *ecuación no lineal de Schrödinger generalizada* (GNLSE, por sus siglas en inglés, Generalized Nonlinear Schrödinger Equation). Se dice que esta ecuación es $(2+1)$ -dimensional, donde el 2 se refiere al número de dimensiones transversales del haz y el +1 corresponde a la dirección de propagación en z . Sin embargo, para el presente trabajo se trabajará por simplicidad, únicamente con la GNLSE $(1+1)$ -dimensional que corresponde a: [11,19,20]:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + N(|U|^2) U = 0, \quad (7)$$

En donde la coordenada en y ha sido simplemente suprimida. Desde un punto de vista físico, esta supresión puede lograrse al imponer dos placas paralelas de considerable extensión en un medio no lineal, formando así una guía de onda plana,

la cual encapsulará el haz en la dimensión y , dejando visible el fenómeno de difracción solamente en la coordenada x . La Eq. (7) es la ecuación base que modelará todas nuestras simulaciones en el presente trabajo: el primer término de dicha ecuación es conocido como el término de evolución o propagación, el segundo término toma en cuenta el fenómeno de difracción, mientras que el último término es el responsable de caracterizar la no linealidad.

2.2. Diferentes clases de no linealidades

Tanto la existencia como las diversas propiedades de los solitones, dependen de manera crucial de los diferentes tipos de no linealidades. Haces ópticos con potencias y perfiles transversales iguales se pueden comportar de manera totalmente diferente en diversos medios no lineales; de ahí la importancia del análisis particular de cada una de las distintas funciones $N(|U|^2)$. A continuación se mencionan algunos ejemplos de las funciones no lineales más comúnmente utilizadas:

2.2.1. Medio Kerr

El caso del medio no lineal más ampliamente estudiado [8,15,18], en el cual la función

$$N(|U|^2) = \pm |U|^2, \quad (8)$$

modela el llamado medio Kerr. El interés por este medio radica en que convierte a la Eq. (7) en una ecuación integrable, lo que significa de manera general, que la Eq. (7) admitirá soluciones que sí pueden ser obtenidas analíticamente. En el caso del medio Kerr, la Eq. (7) recibe el nombre particular de ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE, Nonlinear Schrödinger Equation). En el caso del signo positivo en la Eq. (8), existe una no linealidad de auto-enfocamiento, que es el tipo de no linealidad estudiada en el presente trabajo. En el caso del signo negativo, existe una no linealidad de desenfocamiento, la cual permite la existencia ya no de ondas solitarias bien localizadas, sino de zonas de oscuridad bien localizadas, rodeadas por un haz continuo y constante de luz, dando lugar así a los llamados solitones oscuros [21].

2.2.2. Medios de competición de no linealidades

Al excitarse fenómenos no lineales por medio de un haz óptico, la primera contribución clásica a tomar en cuenta es la dependencia con respecto a $|U|^2$, sin embargo, para campos ópticos de más altas intensidades, el índice de refracción debe modelarse tomando en cuenta otros órdenes de contribuciones no lineales. Por ejemplo, varios materiales exhiben un comportamiento dado por [11,19]

$$N(|U|^2) = c_1 |U|^2 + c_2 |U|^4, \quad (9)$$

en donde si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$, se producirá una competencia entre el auto-enfocamiento de tercer orden dado por el coeficiente c_1 , y el auto-desenfocamiento de quinto orden dado por

el coeficiente c_2 . A bajas intensidades del haz óptico, predominará el efecto del auto-enfocamiento, mientras que para altas intensidades, será el efecto de auto-desenfocamiento el que predomine. Lo anterior dará como resultado que, en este tipo de medios los solitones fundamentales existan hasta cierto valor de intensidad, ya que después de cierto valor umbral, sólo se podrán generar solitones oscuros.

2.2.3. Medios de saturación

Otra función no lineal de interés, es aquella que modela un medio de saturación [19,22], que está representado por

$$N(|U|^2) = \frac{|U|^2}{1 + s|U|^2}, \quad (10)$$

en donde s se le conoce como parámetro de saturación. Observe que si $s = 0$, se recupera la función dada por la Eq. (8). Este modelo es ampliamente utilizado ya que la saturación de la no linealidad al utilizar altas potencias es bastante común en diversos medios no lineales, tal como ocurre por ejemplo, en los materiales fotorrefractivos [11].

Existen muchos otros tipos de funciones $N(|U|^2)$ que modelan medios no lineales más exóticos, tales como: medios no locales [23], medios de no linealidad transitiva [11], medios de saturación no lineal del tipo logarítmico saturable [24], medios basados en redes fotónicas [25], etc. El análisis particular de los solitones para cada uno los diferentes medios no lineales, constituye por sí mismo todo un reto, dando lugar a la obtención de toda una variedad de entidades solitónicas con propiedades físicas muy diversas.

2.3. Solitones espaciales en la NLSE

La obtención de soluciones del tipo solitón mediante técnicas analíticas a la Eq. (7) se reduce a funciones $N(|U|^2)$ muy particulares. Por ejemplo, para el caso del medio Kerr, se puede verificar que, proponiendo una solución solitónica del tipo

$$U(x, z) = S(x) \exp[i\varphi(x, z)], \quad (11)$$

donde tanto S como φ son funciones puramente reales y utilizando además las condiciones: (i) que $S = a$ y $dS/dx = 0$ para $x = 0$ y (ii) que tanto S como dS/dx tiendan a cero conforme $|x| \rightarrow \infty$, lo que asegura obtener una onda solitaria, permite encontrar soluciones invariantes en su amplitud $S(x)$, con un perfil semejante a un haz Gaussiano, en donde sólo la fase $\exp[i\varphi(x, z)]$ experimentará cambios durante la propagación. Si además buscamos un solitón que sea simétrico respecto a $x = 0$, obtenemos la solución invariante más básica a la NLSE: el solitón brillante fundamental del medio Kerr, que está dado por [11,26],

$$U(x, z) = a \operatorname{sech}(ax) \exp[ia^2z/2], \quad (12)$$

donde a es un número real. En la Fig. 1(b), se muestra el perfil correspondiente a dicho solitón. Observe que este modo

fundamental, al tener una intensidad mayor en la parte central, equivale también a que el índice de refracción más alto se encuentra ubicado en dicha región. De manera similar, los efectos de difracción son más apreciables en la zona más angosta, que precisamente coincide con la zona central, por lo que de esta manera es posible el equilibrio entre la difracción y los efectos no lineales debidos al auto-enfocamiento. Sin embargo, esta solución invariante a la Eq. (7) utilizando la Eq. (8), no es única. De hecho, existen un número infinito de soluciones de este tipo, que están en función al número de zeros del perfil $U(x, 0)$. Los solitones que no poseen ningún cero, los solitones fundamentales, son de manera general los más fáciles de reproducir en diversos experimentos en laboratorio. A pesar de que el presente trabajo se centra en el estudio de los solitones espaciales fundamentales brillantes, es importante aclarar que además existen otras familias solitónicas espaciales, que de manera muy general, se pueden clasificar en solitones con diferentes topologías que pertenecen a un mismo medio, o en solitones que son formados por diferentes mecanismos físicos. En el primer caso, podemos mencionar como ejemplo, a los solitones fundamentales y los solitones de diversos órdenes (aquellos que cuentan con diferentes cantidades de ceros en su perfil), así como también a los vórtices solitónicos [23], azimutones [27] y elípticos [28], mientras que en el segundo caso, podemos mencionar como ejemplo, los solitones fotorrefractivos [22], los solitones grises y oscuros [21] y los solitones no locales [23], entre otros.

Al estudiar el fenómeno solitón, se debe tener presente que el principio matemático de superposición no se cumple. Este principio señala que si un sistema acepta una solución A y además una solución B, entonces A+B será también una solución a dicho sistema. De lo anterior se puede demostrar que al multiplicar la Eq. (12) por una constante diferente a uno, la solución no sería ya del tipo solitón, perdiendo así la propiedad de invarianza. Sin embargo y de manera interesante, el superimponer dos solitones de la forma dada por la Eq. (12), se obtiene un estado compuesto que, ha pasado a ser comunmente conocido como solitón de segundo orden, a pesar de que dicho perfil estrictamente no puede ser considerado como solitón bajo nuestra previa definición. Dicho estado compuesto experimenta cambios periódicos durante su propagación que están dados por [26,29]

$$U(x, z) = \frac{4[\cosh(3x) + \cosh(x)] \exp[iz/2]}{\cosh(4x) + 4 \cosh(2x) + 3 \cosh(4z)}, \quad (13)$$

En la Fig. 1(c), se observa la propagación del perfil. Observe que el haz tiene una periodicidad de $\pi/2$.

2.4. Solitones fundamentales en la GNLSE

El problema para encontrar las soluciones del tipo solitón cuando $N(|U|^2)$ es diferente al caso del medio Kerr, presentan complicaciones extraordinarias. De hecho, para la enorme mayoría de los casos, la Eq. (7) se vuelve no integrable, lo que significa que dicha ecuación sólo posee soluciones que se pueden encontrar por métodos numéricos o técnicas semi-

analíticas como métodos de perturbación. De ahí el porqué el mundo de los solitones ha vivido su auge apenas durante los últimos 50 años aproximadamente; época que coincide precisamente con el inicio del uso de la computadora como método para analizar y resolver problemas de alta complejidad. Por tal motivo, en el presente trabajo, se ofrece el programa *Petvia_Mex*, que es un código abierto y libre, escrito en MATLAB, en donde se ha implementado el método numérico de Petviashvili [30,31,32], para encontrar solitones fundamentales a la GNLSE descrita por la Eq. (7). Dicho código propone soluciones solitónicas fundamentales de la forma:

$$U(x, z) = \Theta(x) \exp(i\zeta z), \quad (14)$$

en donde la función real $\Theta(x)$ y su derivada tienden a cero conforme $|x| \rightarrow \infty$ y el parámetro $\zeta > 0$, recibe el nombre de *constante de propagación del solitón*. En el apéndice A se explica más a fondo el método de Petviashvili. Una de las ventajas de este algoritmo, es su alta razón de convergencia, ya que esta es prácticamente independiente de qué tan cercana se encuentre la “solución” inicial propuesta respecto a la solución verdadera. Esto contrario a otros algoritmos iterativos más especializados en la literatura, en donde la “solución” inicial propuesta (o *ansatz*), debe encontrarse muy cercana a la solución verdadera para que se produzca una convergencia en el algoritmo. Por otro lado, la desventaja del algoritmo de Petviashvili, es que sólo pueden obtenerse exclusivamente los solitones fundamentales.

Una manera de caracterizar a los solitones obtenidos numéricamente, es a través del cálculo de la potencia P [11],

$$P(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, 0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, z)|^2 dx, \quad (15)$$

note que dicha cantidad es invariante en la propagación, y además que se encuentra en función de la constante de propagación del solitón ζ .

2.5. Propagación de solitones fundamentales

Una vez obtenida la solución tipo solitón, es posible realizar un análisis de sus diversas propiedades dinámicas, utilizando como condición inicial en la GNLSE al solitón previamente obtenido. Para facilitar el estudio de este proceso, se ofrece el programa *SSF_Mex*, que también es un código abierto y libre, realizado en MATLAB, en donde se encuentra implementado el método del paso dividido de Fourier (o *split-step Fourier method*) [15,33,34]. Dicho método de propagación paraxial no lineal está basado en la transformada de Fourier, y es uno de los métodos enlistados bajo el nombre de “métodos pseudo-espectrales” [8]. El método del paso dividido de Fourier realiza el procesamiento de cálculos mucho más rápido que otros métodos numéricos, como por ejemplo aquellos basados en diferencias finitas. La razón de esto es que usa algoritmos muy eficientes como la transformada rápida de Fourier (FFT), además de que las versiones más recientes de

MATLAB tienen implementada la llamada transformada de Fourier más rápida del Oeste (FFTW) [35]. El método del paso dividido de Fourier se usa extensivamente para resolver la NLSE en problemas de fibras ópticas. De manera muy general, el método del paso dividido de Fourier asume que el campo óptico U se propaga de z a $z + h$ calculando el efecto de difracción de forma separada al de la no linealidad. Para una explicación más detallada de este método, se puede revisar el apéndice B.

2.6. Estabilidad de las ondas solitarias

Si el principio de superposición no es válido en medios no lineales, entonces la pregunta: ¿Qué ocurrirá durante la propagación si se perturba ligeramente el perfil ideal e inicial del solitón? no tiene una respuesta trivial. Para conocer esta respuesta se realiza un análisis de estabilidad de solitones. Y es que la sola existencia de solitones, resolviendo ya sea analítica o numéricamente la Eq. (7) no garantiza su estabilidad en la propagación [20]. Para fines de este trabajo, un solitón se considerará estable si, sufriendo una perturbación inicial, su intensidad se mantiene relativamente invariante durante su propagación. Los solitones que son estables a lo largo de su propagación son de importancia fundamental, ya que son los únicos solitones capaces de ser observados experimentalmente.

Para el caso de los solitones temporales, los efectos no lineales son débiles, por lo que la función utilizada en la Eq. (7) dará como resultado siempre modelos integrables o casi integrables, resultando en solitones temporales estables o cuasi-estables, que sólo tendrán pequeñas variaciones que podrán ser analizadas mediante teoría de perturbaciones.

Sin embargo, en el caso de los solitones espaciales, sus inestabilidades se encuentran asociadas con efectos no triviales de diferente naturaleza que van más allá de la teoría de perturbaciones. Por lo que de manera general, el solitón puede propagarse durante distancias extremadamente largas para analizar la aparición de eventuales cambios en su intensidad, decidiendo así si el solitón es estable o inestable. Este proceso es normalmente acelerado al añadir una componente aleatoria de ruido al solitón, para después propagar el perfil perturbado. En el caso de los solitones fundamentales brillantes existe además un criterio de estabilidad conocido como criterio de Vakhitov-Kolokolov. De manera general, dicho criterio establece que, un solitón fundamental será estable siempre y cuando cumpla con la siguiente condición [20,36]

$$\frac{dP}{d\zeta} > 0, \quad (16)$$

Es importante remarcar que el criterio de Vakhitov-Kolokolov aplica sólo para solitones fundamentales y no para otras entidades como un vórtice solitónico. Dicho criterio puede ser utilizado también en el caso de perfiles espaciales bidimensionales, demostrando así por ejemplo, que los solitones espaciales en dos dimensiones son siempre estables para el caso de propagación en un medio de saturación, mientras que en el caso del medio Kerr, son siempre inestables.

2.7. Empleando con cuidado la GNLSE

La Eq. (6) es considerada una de las ecuaciones universales en óptica no lineal. Sin embargo, nos gustaría advertir de algunas situaciones en donde el uso de dicha ecuación puede dar lugar a la obtención de resultados erróneos en las simulaciones computacionales. Por ejemplo, en la derivación de la Eq. (6) se asume que el campo del haz óptico mantiene su polarización. Sin embargo, al utilizar dos componentes ortogonales de un sólo campo óptico (en el caso de un medio birrefringente), o al utilizar dos o más campos ópticos con la misma polarización pero con diferentes frecuencias, se puede demostrar que efectivamente, existe la posibilidad de formación de solitones ópticos, pero en ambos casos se hace ya referencia a los solitones vectoriales, que ya no son modelados por Eq. (6), sino en su lugar resultan de una serie de ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas.

Otro tipo de situación en donde hay que ser cautelosos con el uso de la Eq. (6), es cuando se utiliza un funcional no lineal que no sea del tipo Kerr. Por ejemplo, si se tiene un función con una no linealidad de m -potencia dado por

$$N(|U|^2) = \pm |U|^{2m}, \quad (17)$$

se puede mostrar que este caso la GNLSE permite propagar solitones cuya energía puede llegar a concentrarse de manera inmediata en un punto durante la propagación, produciendo una singularidad en la intensidad del haz, fenómeno que recibe el nombre de *colapso del haz óptico* [11]. Dicho colapso ocurre de manera general, cuando $mD \geq 2$, donde D es la dimensión transversal del haz óptico a investigar. En el caso específico de los solitones espaciales bidimensionales, el medio Kerr ($m = 1$) es suficiente para inducir el colapso del haz óptico. En el caso del haz unidimensional pero con $m = 2$, se puede producir el colapso del haz, tal como se puede observar en la Fig. 3 (a). Al ocurrir la aparición de dicha singularidad en las simulaciones, hay que incluir otro tipo de fenómenos para modificar la Eq. (6), tal como tomar en cuenta efectos no paraxiales, para así describir entonces un modelo más realista de la propagación del haz en el medio en cuestión.

Así como hay que tener cautela al emplear la GNLSE, también se debe tomar cierta precaución con el uso del término solitón, sobre todo cuando se trabaja de una manera multidisciplinaria. Como se mencionó anteriormente, la definición formal del solitón varía entre los diferentes campos de estudio científicos. Desde un punto de vista más matemático, se hace la distinción formal entre solitones y ondas solitarias. Siendo los solitones ondas solitarias, un solitón además debe ser capaz de experimentar colisiones elásticas (aquellas en donde no existe una pérdida de energía al interactuar con otros solitones), así como también un solitón debe de poseer un número infinito de cantidades de conservación, como lo son: la potencia, el momentum, el Hamiltoniano, además de conservar otras cantidades que no poseen una interpretación física, por lo menos no de una manera directa. Por ende, estrictamente un solitón sólo existirá cuando el sistema estudiado sea integrable y se pueda analizar utilizando la técnica

de dispersión inversa, ya que de lo contrario, se hablaría entonces estrictamente de ondas solitarias que al sufrir alguna colisión, podrían modificarse o incluso destruirse por completo. Sin embargo, desde un punto de vista mucho más físico, tal distinción matemática entre solitones y ondas solitarias es mucho más relajada, siendo ambos términos considerados normalmente sinónimos, como es el caso manejado en el presente documento.

3. Laboratorio virtual de solitones ópticos espaciales

El estudio de solitones ópticos espaciales requiere sin lugar a dudas, del uso de una computadora para llevar a cabo ciertos tipos de análisis. En esta sección se presentan algunos resultados obtenidos utilizando los códigos *Petvia_Mex* y *SSF_Mex*, esperando alcanzar dos objetivos: primero, el de reforzar e ilustrar la teoría de los solitones ópticos espaciales anteriormente descrita y segundo, el de estimular la exploración de los solitones ópticos espaciales. Ambos códigos pueden ejecutarse sin necesidad de saber programar en MATLAB, ya que tan sólo se necesita escribir el respectivo nombre del código en la ventana de comandos, para luego ir seleccionando las diversas opciones presentadas. Una ventaja de ambos códigos, es que pueden ser modificados/depurados para incluir/eliminar diversos procesos o datos de los algoritmos a conveniencia del usuario; por ejemplo, ambos códigos pueden ser modificados para realizar el estudio de solitones bidimensionales. En un computadora promedio actual de escritorio, para una $z < 10$, y utilizando la configuración original de los programas (número de puntos de discretización, número de pasos a desplegar, opciones del menú, etc), cada simulación debe ejecutarse en menos de 10 minutos. Ambos códigos pueden ser descargados en la siguiente liga: <http://homepages.mty.itesm.mx/slopez/codigos.htm>. A continuación se presentan algunos resultados obtenidos con dichos programas, en donde con cada simulación realizada, se discute e ilustra además un aspecto fundamental de la física de solitones ópticos espaciales.

3.1. Demostración de la invarianza del solitón

En la Fig. 1(a)-(b) se presentan los resultados de la propagación de un haz Gaussiano (de ancho y amplitud unitaria) y de un haz solitónico en un medio Kerr, respectivamente. Observe que mientras el haz Gaussiano sufre de una difracción visible para $z = 5$, el solitón mantiene el perfil de intensidad inicial incluso para $z = 10$, formando así su propia guía de onda durante toda la propagación. De manera general, se puede pensar que tanto la intensidad como la forma del perfil, son los adecuados en el caso del solitón para excitar un proceso no lineal de auto-enfocamiento, que balancea y contrarresta el fenómeno inherente de difracción del haz, resultando en una cancelación mutua de ambos fenómenos, propagándose así un haz óptico invariante. En todas las simulaciones presentadas en este trabajo, se muestra la intensidad del haz óp-

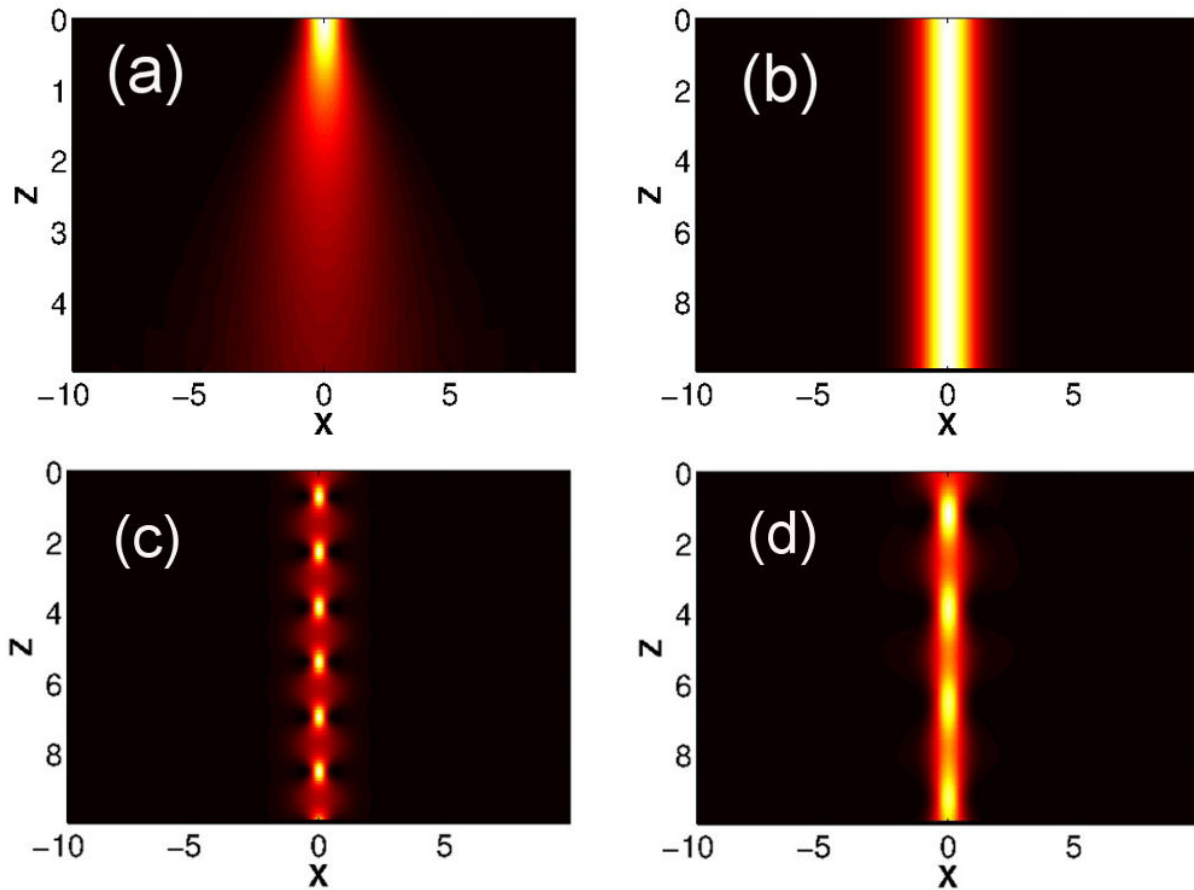


FIGURA 1. Propagación en un medio Kerr de (a) un haz Gaussiano, (b) un solitón. Propagación de un haz compuesto (solitón de segundo orden) en (c) un medio Kerr, (d) un medio de saturación, con parámetro $s = 0.1$.

tico $|U(x, z)|^2$, en lugar de la amplitud. Lo anterior debido a que la intensidad es realmente el perfil percibido por el ojo humano. Además, se muestran las propagaciones en visualizaciones de 2 o 3 dimensiones, sin que exista alguna diferencia física del perfil real entre ambos formatos.

3.2. Importancia del medio no lineal en la propagación

Para mostrar cómo la propagación de un haz óptico es particularmente sensible a diferentes medios no lineales, se muestran en las Figs. 1(c)-(d) las propagaciones de un haz descrito por la Eq. (13). Observe que dicho haz se comporta de manera periódica durante su propagación en el medio Kerr Fig. 1(c), mientras que el mismo perfil inicial, al propagarlo en un medio de saturación ($s = 0.1$), el cual puede ser considerado como una perturbación al medio Kerr, pierde la periodicidad anterior como se observa en la Fig. 1(d). Esto muestra que cada medio no lineal admitirá sólo solitones o estados compuestos con un perfil transversal inicial muy específico. Y aunque para ciertos casos, es posible realizar aproximaciones de los perfiles solitónicos con haces Gaussianos mediante una técnica semi-analítica de afinación de parámetros (ancho del haz, amplitud, etc), que es conocida como el método variacional para solitones [37], para la mayoría de los materiales

no lineales, es indispensable utilizar alguna técnica numérica para obtener los perfiles solitónicos.

3.3. Solitones del tipo no Kerr

Para ilustrar la obtención de perfiles solitónicos a través del programa *Petvia_Mex*, mostramos primeramente los resultados de propagar el perfil solitónico dado por la Eq.(12), pero realizando la propagación tanto en un medio de saturación como en un medio de competición de no linealidades, cómo se muestra en la Fig. 2. (a) y (d) respectivamente. Observe que para ambos casos el perfil inicial experimenta deformaciones, lo cual claramente muestra que no es un solitón. Para obtener los perfiles solitónicos correspondientes, se manda ejecutar primero el programa de *Petvia_Mex*, utilizando $\zeta = 1$ para ambos medios no lineales, obteniendo los perfiles mostrados en la Fig. 2 (b) y (e) que corresponden al caso del medio de saturación y de competición de no linealidades respectivamente. A continuación se carga dicho perfil en el programa *SSF_Mex* para realizar su propagación. Observe que ambos perfiles en la Fig. 2 (c) y (f) mantienen esta vez su invarianza, corroborando que son los correspondientes solitones.

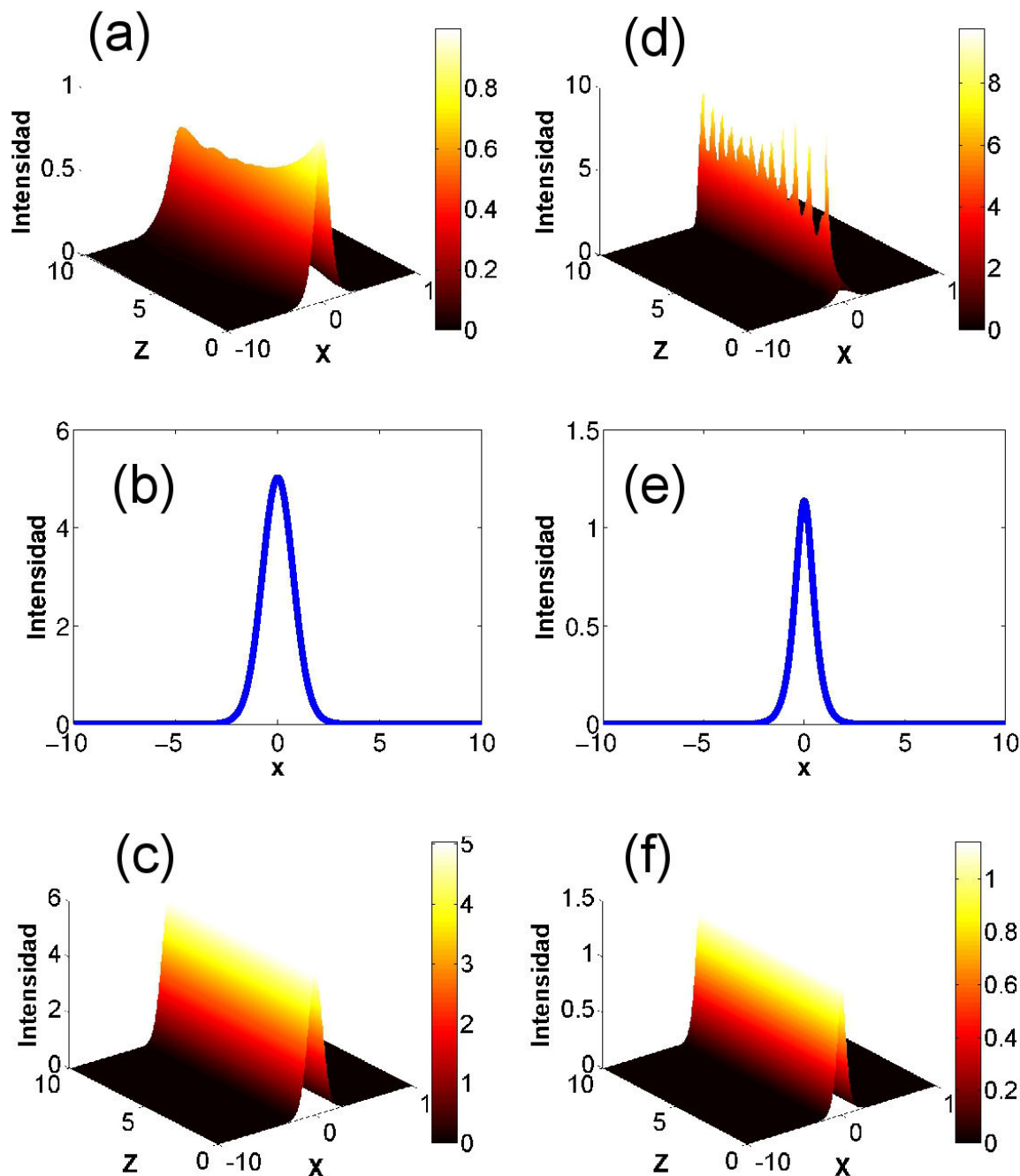


FIGURA 2. Propagación de perfiles iniciales solitónicos que corresponden al medio Kerr, pero propagados en un medio de (a) saturación ($s = 0.5$) y (d) competencias de no linealidades ($c_1 = 1$ y $c_2 = 1$). Perfiles solitónicos que corresponden a los anteriormente mencionados medios de (b) saturación y (e) competición de no linealidades. En ambos casos $\zeta = 1$. Propagación de los respectivos solitones obtenidos numéricamente, en los medios de (c) saturación y (f) competición de no linealidades.

3.4. Colapso del haz

Para ilustrar el fenómeno del colapso de haz, se muestra en la Fig. 3 (a) la propagación realizada a partir de una condición inicial de la forma $U(x, 0) = \exp(-x^2/4)$ y cuya propagación se ha realizado en un medio de competición de no linealidades con $c_1 = 0$ y $c_2 = +1$. Observe que conforme se propaga el haz óptico, existe un incremento del va-

lor pico de intensidad, esto debido al fenómeno no lineal de auto-enfocamiento. Sin embargo, a un cierto valor de distancia ($z \gtrsim 1.6$), dicho crecimiento se vuelve exponencial y se produce rápidamente un incremento singular en la intensidad, invalidando desde esa distancia la simulación de la propagación, ya que dicho efecto sería contrarrestado físicamente por algún fenómeno de saturación o de otra índole.

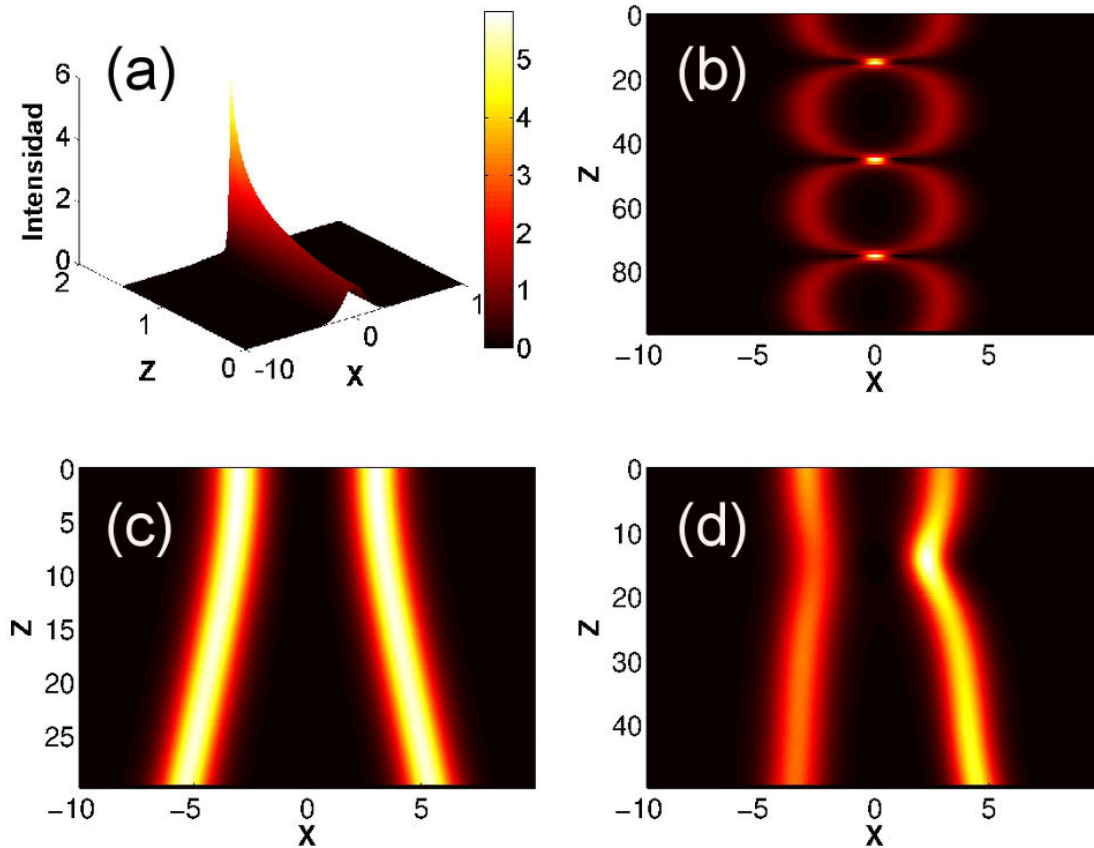


FIGURA 3. (a) Demostración del fenómeno de colapso de haz óptico, en un medio de no linealidad de quinto orden. Interacciones de solitones en un medio Kerr, con $x_0 = 3$. Los solitones se encuentran (b) en fase ($\varrho = 0$), (c) en contrafase ($\varrho = \pi$) y (d) desfasados ($\varrho = \pi/4$).

3.5. Característica de partícula: interacción entre solitones

El comportamiento de partícula de los solitones ópticos espaciales, se puede ilustrar mediante dos solitones que inicialmente se encuentran cercanos entre ellos. Para un medio Kerr, dicha condición inicial se encuentra expresada por:

$$U(x, 0) = \text{sech}(x + x_0) + \text{sech}(x - x_0) \exp(i\varrho), \quad (18)$$

en donde x_0 cuantifica la distancia de separación entre solitones, y el parámetro ϱ , es la fase relativa que existe entre ambas ondas solitarias. En la Fig. 3(b)-(d) se muestran los resultados de las propagaciones. Si $\varrho = 0$, los solitones se encuentran en fase, por lo que existe una interferencia constructiva en su parte central, lo que produce un aumento del índice de refracción en esa zona, dando como consecuencia un fenómeno de atracción como se muestra en la Fig. 3(b). Si $\varrho = \pi$, se tienen solitones en contrafase, o de manera equivalente, se habla de una interferencia destructiva, que se traducen en una disminución del índice de refracción alrededor de $x = 0$, produciendo entonces un fenómeno de repulsión, como se puede apreciar en Fig. 3(c). Para otros valores de ϱ , se producen dinámicas más complejas, combinando zonas de atracción y zonas de repulsión, como se observa en la Fig. 4(d), en donde $\varrho = \pi/4$.

3.6. Análisis numérico de la estabilidad de solitones

Una parte crucial en el estudio de los solitones ópticos espaciales, es determinar si las soluciones solitónicas son estables. Mediante el código de *Petvia_Mex*, se obtienen primeramente los perfiles de los solitones para los casos $\zeta=5$ y $\zeta = 0.5$, mostrados en las Fig. 4(a) y Fig. 4(d) respectivamente, en donde ambos casos corresponden a un medio de competición, con $c_1 = 0.7$ y $c_2 = +1$. Al propagar ambos solitones, se observa invarianza en el perfil de intensidad, tal como es natural de esperarse, tanto para el caso de $\zeta=5$ y $\zeta = 0.5$, como se muestran en la Fig. 4(b) y (e) respectivamente. A continuación, para nuestro análisis de estabilidad numérica, se repiten ambas propagaciones, pero esta vez se añade un valor típico del 10 % de perturbación (o ruido) al perfil inicial, esto con el fin de acelerar el proceso de aparición de inestabilidades. Observe que para $\zeta=5$, el solitón con ruido muestra esta vez en la Fig. 5(c) cambios importantes en la intensidad durante propagación, con lo cual se concluye que el solitón con $\zeta=5$ es inestable. Sin embargo, para el caso de $\zeta=0.5$, el perfil mostrado en la Fig. 4(f) se mantiene cuasi-invariante, por lo cual se dice que para este caso se tiene un solitón estable, por lo menos para $z < 10$. De esta forma se concluye, que en un arreglo experimental será más fácil observar solitones con $\zeta = 0.5$.

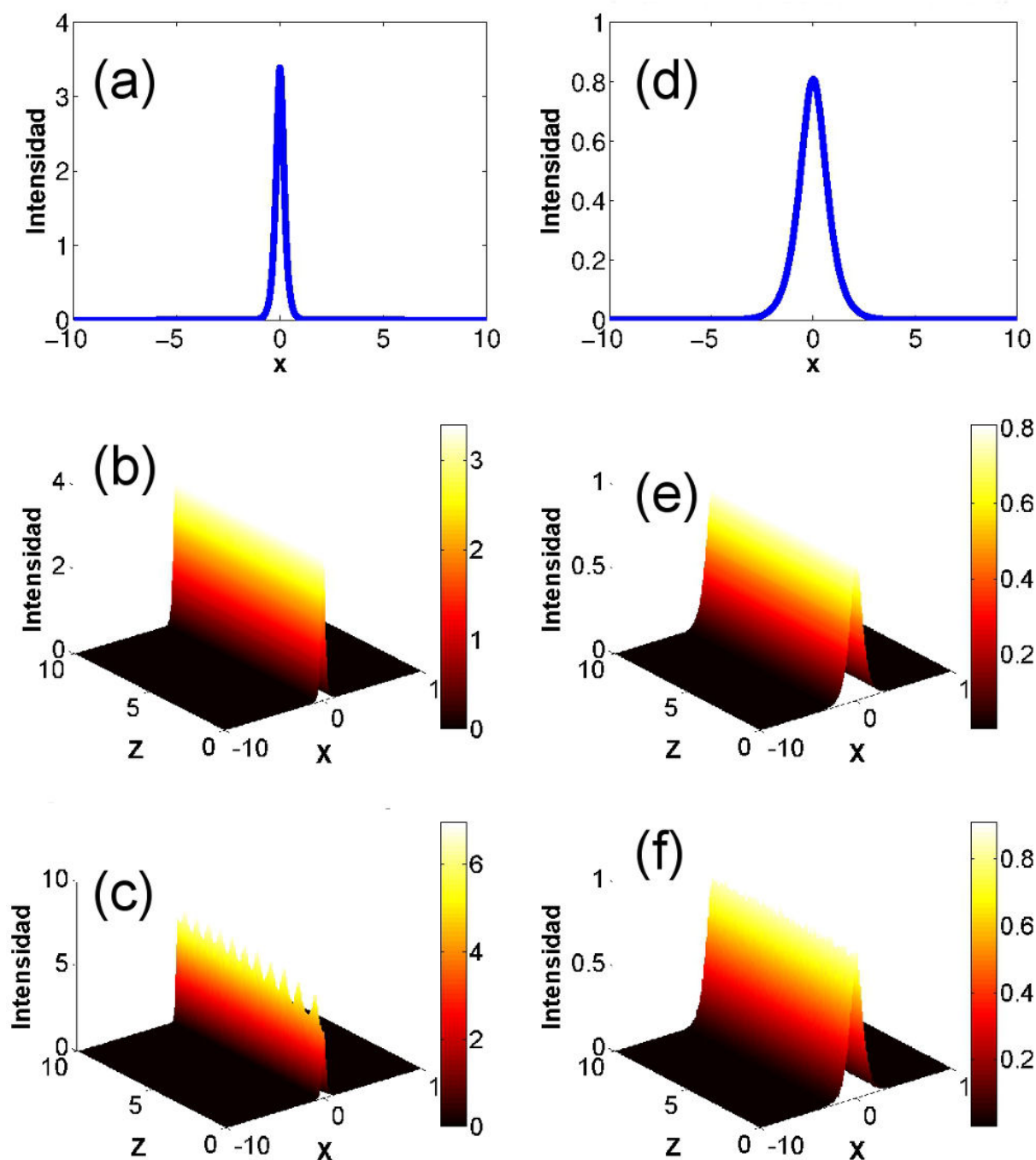


FIGURA 4. Perfiles solitónicos en un medio de competición de no linealidades, en donde $c_1 = 0.7$ y $c_2 = 1$, con (a) $\zeta = 5$ y (d) $\zeta = 0.5$. Propagación de los solitones sin haber añadido ruido, para (b) $\zeta = 5$ y (d) $\zeta = 0.5$. Propagación de los solitones añadiendo 10 % de ruido para (c) $\zeta = 5$ y (f) $\zeta = 0.5$.

4. Conclusiones

Se ha presentado una introducción a la teoría básica sobre solitones ópticos, concentrándose en los solitones ópticos espaciales unidimensionales. Se ha reforzado e ilustrando dicha teoría mediante dos programas de código libre y abierto en MATLAB: *Petvia_Mex*, que es un programa capaz de ob-

tener soluciones fundamentales solitónicas, y *SSF_Mex*, que es un programa para realizar propagación paraxial de campos escalares complejos en medios no lineales. Se espera que ambos programas ayuden a incrementar y difundir el interés por realizar investigación en el área de los solitones ópticos espaciales, así como también a despertar un mayor interés por el área de la física no lineal en general.

Apéndice

A. El método de relajación de Petviashvili

La implementación de dicho algoritmo se basa en reescribir la Eq. (7) como:

$$-\zeta\Theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + N(|\Theta|^2)\Theta = 0, \quad (19)$$

en donde se ha propuesto la búsqueda de un solitón de la forma descrita por la Eq. (14). Aplicando una transformación de Fourier F , de tal forma que $F\{\Theta\} = \tilde{\Theta}$ y recordando que en el dominio de Fourier $F\{\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}\} = -k_x^2 \tilde{\Theta}$ donde k_x corresponde a la frecuencia espacial, se obtiene

$$-\zeta\tilde{\Theta} - \frac{1}{2} k_x^2 \tilde{\Theta} + \tilde{N} = 0, \quad (20)$$

donde $\tilde{N} = F\{N(|\Theta|^2)\Theta\}$. Despejando para $\tilde{\Theta}$ y sugiriendo un procedimiento iterativo se obtiene

$$\tilde{\Theta}_{n+1} = \frac{\tilde{N}(\Theta_n)}{\zeta + 1/2 k_x^2}, \quad (21)$$

en donde el subíndice n representa la n -ésima iteración del algoritmo. El procedimiento iterativo dado por la ecuación anterior usualmente diverge, por lo que es necesario introducir un factor de estabilización M_n , corrigiendo el proceso de iteración a

$$\tilde{\Theta}_{n+1} = \frac{\tilde{N}(\Theta_n)}{\zeta + 1/2 k_x^2} M_n^\gamma, \quad (22)$$

en donde el factor de estabilización está dado por:

$$M_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\zeta + 1/2 k_x^2) |\tilde{\Theta}|^2 dk_x}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(\Theta_n) \tilde{\Theta}^* dk_x}, \quad (23)$$

en donde $*$ significa el complejo conjugado y γ es un parámetro libre que al cumplir la condición de $1 < \gamma < 3$, puede llegar a producir la convergencia requerida en la Eq. (22). La convergencia se produce conforme $M_n \rightarrow 1$.

B. El método de paso dividido de Fourier

Para describir este algoritmo de propagación paraxial en medios no lineales, es útil reescribir la Eq. (7) en forma de operadores:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = [\hat{D} + \hat{N}]U, \quad (24)$$

donde $\hat{D} = i \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ es el operador diferencial que representa el efecto de difracción y $\hat{N} = i N(|U|^2)$ es el operador que representa la no linealidad del medio donde se propaga el campo.

A continuación integramos la GNLSE con respecto a z y obtenemos:

$$\int_z^{z+h} \frac{dU}{U} = \int_z^{z+h} \hat{D} dz + \int_z^{z+h} \hat{N} dz, \quad (25)$$

La solución de dicha ecuación, utilizando notación de operadores esta dada por:

$$U(z+h, x) = [e^{h\hat{D}+h\hat{N}}]U(z, x), \quad (26)$$

en donde no hay que perder de vista que tanto $\hat{N}$ como $\hat{D}$ son operadores que no conmutan. Sin embargo, al utilizar el teorema de Baker–Hausdorff [15]:

$$\exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) = \exp((h\hat{D} + h\hat{N}) + 1/2 [\hat{D}, \hat{N}] + \dots), \quad (27)$$

en donde los corchetes indican el conmutador de operadores, $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ y asumiendo que el paso de propagación h es muy pequeño, los operadores $\hat{D}$ y $\hat{N}$ de la Eq. (26) pueden aproximarse por

$$U(z+h, x) \cong e^{h\hat{D}}[e^{h\hat{N}}U(z, x)], \quad (28)$$

de tal forma que el operador exponencial $e^{h\hat{N}}$ actúa sobre la función $U(z, x)$, mientras que el operador $e^{h\hat{D}}$ actúa sobre todo el argumento. Esto es equivalente a resolver la GNLSE tomando en cuenta primero solamente el efecto no lineal, haciendo $\hat{D} = 0$, para luego tomar sólo en cuenta los efectos debidos sólo a la difracción haciendo $\hat{N} = 0$. Recordando que en el dominio de Fourier $\hat{D}(k) = -i \frac{1}{2} k_x^2$ donde k_x corresponde a la frecuencia espacial y aplicando transformaciones de Fourier, podemos resolver finalmente la Eq.(28) obteniendo:

$$U(z+h) \cong F^{-1}(e^{-ihk_x^2} \{F[e^{ih\hat{N}}U(z, x)]\}), \quad (29)$$

en donde F y F^{-1} representan la transformada y transformada inversa de Fourier respectivamente.

En resumen, al utilizar el método de paso dividido de Fourier, el campo U se propaga una distancia pequeña h bajo la influencia únicamente del efecto no lineal, para después considerar únicamente los efectos debidos a la difracción, repitiéndose tal proceso hasta alcanzar la distancia de propagación requerida.

Agradecimientos

Este documento contó con el respaldo y apoyo por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Proyecto 182005), así como por parte del Tecnológico de Monterrey (CAT-141).

Agradecemos el equipo computacional facilitado por LABMEMS.

1. S. Russell, *Reports on waves* (Reports of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1844). Pp. 311–390.
2. M. Agüero, J. Fujioka and L. Ceciliano, *Ciencia Ergo Sum* **9** (2002) 197–201.
3. J. Boussinesq, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* **72** (1871) 755–759.
4. D.J. Korteweg, G de Vries, *Philosophical Magazine, 5th series* **39** (1895) 422–443.
5. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240–243.
6. Mordechai Segev, *Opt. Photonics news* **13** (2002) 27.
7. M. Remoissenet, *Waves Called Solitons* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1999).
8. P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
9. V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **61** (1971) 118–134.
10. C.S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095–1097.
11. Y. Kivshar and G. Agrawal, *Optical solitons* (Academic Press, USA, 2003).
12. S. Trillo and W. Torruellas, *Spatial solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
13. G. E. Torres-Cisneros, *et al.*, *Rev. Mex. Fis.* **41** (1995) 662–694.
14. G. Stegeman, D. Christodoulides and M. Segev, *IEEE J. Quantum. Electron.* **6** (2000) 1409–1427.
15. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2001).
16. Yuri Kivshar, *Nature Phys.* **2** (2006) 729–730.
17. G. Stegeman and M. Segev, *Science* **286** (1999) 1518–1523.
18. M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (London Mathematical Society Lecture Note Series, 149. Cambridge, 1991).
19. Y. Kivshar, *Opt. Quant. Electron* **30** (1998) 571–614.
20. A. A. Sukhorukov and Y. Kivshar, *Pramana* **57** (2001) 1079–1096.
21. Y. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298** (1998) 81–197.
22. M. Segev, *Opt. Quant. Electron* **30** (1998) 503–533.
23. S. López-Aguayo *et al.*, *Opt Lett* **31** (2006) 1100–1102.
24. D. Christodoulides and T. Coskun, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2310–2313.
25. S. López-Aguayo, Y. V. Kartashov, V. Vysloukh, and L. Torner, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 013902.
26. S. López-Aguayo, J.P. Ochoa-Ricoux and J.C. Gutiérrez-Vega, *Rev. Mex. Fis.* **52** (2005) 28–36.
27. S. López-Aguayo, A. Desyatnikov, and Y. Kivshar, *Opt. Express* **14** (2006) 7903–7908.
28. S. López-Aguayo and J.C. Gutiérrez-Vega, *Opt. Express.* **15** (2007) 18326–38.
29. D. Schrader, *IEEE J. Quantum. Electron.* **31** (1995) 2221–2225.
30. D. E. Pelinovsky and Y.A. Stepanyants, *SIAM J. Numer. Anal.* **42** (2004) 1110–1127.
31. T.I. Lakoba, J. Yang, *J. Comput. Phys.* **226** (2007) 1668–1692.
32. M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, *Opt. Lett.* **30** (2005).
33. T. R. Taha and M. J. Ablowitz, *J. Comp. Phys* **55** (1984) 203–230.
34. M. Lax *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. A* **2** (1985) 731–742.
35. M. Frigo and S. Johnson, *Proceedings of the IEEE* **93** (2005) 216–231.
36. N.N. Akhmediev, *Opt. Quant. Electron* **30** (1998) 535–569.
37. B. Malomed, *Prog. Opt.* **43** (2002) 69–191.