Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español

P. Barniol y G. Zavala
Grupo de Investigación e Innovación en la Enseñanza de la Física, Departamento de Física, Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, E. Garza Sada 2501, Monterrey, N. L. 64849 México.

Received 24 January 2014; accepted 13 June 2014

En un estudio nuestro anterior [1] se presentó una visión general del instrumento "Test of Understanding of Vectors" (TUV) en inglés que evalúa el entendimiento de los estudiantes en los conceptos vectoriales. Este test fue diseñado por nosotros primeramente en español (TUV-español) y luego fue traducido al inglés. Los tres objetivos del presente artículo son: 1) presentar el test en español y su proceso de diseño, 2) mostrar que es un instrumento de evaluación confiable y con poder discriminatorio adecuado siguiendo el análisis recomendado por Ding *et al*. [2], y 3) analizar el entendimiento en cada uno de los conceptos vectoriales evaluados en el test de 585 estudiantes que terminan sus cursos de física en una universidad privada mexicana. El artículo tiene diversas implicaciones. El proceso de diseño del examen y el análisis de confiablidad presentados en el artículo pueden ser utilizados por investigadores que deseen diseñar exámenes con opciones múltiples. Por otra parte, el análisis del entendimiento de los estudiantes y el test en español (que se incluye al final del artículo) pueden ser empleados por maestros de física que enseñan el tema de vectores en países hispanohablantes.

Descriptores: Test de conceptos vectoriales; test con opciones múltiples; análisis de confiabilidad; análisis de entendimiento.

In a previous article [1] we presented an overview of the instrument "Test of Understanding of Vectors" (TUV) in English that evaluates students' understanding in vector concepts. This test was originally designed by us in Spanish (TUV-Spanish) and afterwards in English. The three objectives of this study are: 1) to present the test in Spanish and its design process, 2) to show that it is a reliable evaluation instrument with satisfactory discriminatory power following the analyses recommended by Ding *et al*. [2], and 3) to analyze the understanding in each of the vector concepts evaluated in the test of 585 students completing the introductory physics courses in a private Mexican university. The article has diverse implications. The design process and the reliable analyses presented in the article can be used by researchers that want to design multiple-choice tests. On the other hand, the analysis of students' understanding and the test in Spanish (that is included at the end of the article) can be employed by physics teachers that teaches vector concepts in Spanish-speaking countries.

Keywords: Vector concept test; multiple-choice test; reliability analysis; students' understanding analysis.

PACS: 01.40.Fk; 01.40.G

1. Introducción

Los exámenes con opciones múltiples son muy valorados en el área de la educación de la física, ya que son muy útiles para evaluar el aprendizaje conceptual de una población grande de estudiantes y el análisis estadístico de los datos recabados permite una mayor generalización de los hallazgos [3,4]. Estos exámenes deben cumplir con un proceso de diseño adecuado [4] y con pruebas estadísticas de confiabilidad y poder discriminatorio [2]. En el área de la educación de la física se han diseñado varios exámenes de este tipo para evaluar el entendimiento conceptual en: cinemática [4], fuerzas [5,6], movimiento [7], momento y energía [8], electricidad y magnetismo [9].

En los últimos años, varios investigadores han estudiado el entendimiento de los estudiantes en los conceptos vectoriales [10-30]. Sin embargo, se detectó que en esta línea de investigación existía una necesidad de contar con un examen de opciones múltiples que evaluara el entendimiento en los conceptos vectoriales y que haya sido diseñado siguiendo las recomendaciones del área de la educación de la física [2,4]. En un artículo corto nuestro anterior [1] se presentó de manera general un test en inglés ("Test of Understanding of Vectors", TUV) que cubría esta necesidad. Este test fue diseñado por nosotros primeramente en español y posteriormente en inglés. En el presente artículo se presenta y analiza de manera detallada el test en español (TUV-español).

Los tres objetivos este artículo son: 1) presentar el test en español (TUV-español) y su proceso de diseño, 2) mostrar que es un instrumento de evaluación confiable y con poder discriminatorio adecuado siguiendo el análisis recomendado por Ding *et al*. [2], y 3) analizar el entendimiento en cada uno de los conceptos vectoriales evaluados en el test de 585 estudiantes que terminan sus cursos de física introductoria en una universidad privada mexicana. Cada uno de estos tres objetivos será cubierto en las Secs. 4, 5 y 6 del presente artículo.

La originalidad del presente artículo radica en tres puntos. El primer punto es que en el presente artículo se realiza una presentación y análisis mucho más detallado que el realizado en el artículo anterior (extenso de cuatro páginas en un congreso) [1]. El segundo punto se centra en la importancia de realizar un análisis del test en su versión en español. Varios investigadores (como [31]) han señalado la importancia de analizar la confiablidad de los instrumentos de evaluación al realizar un cambio del idioma en estos instrumentos. En el presente artículo se presenta y analiza por primera vez la confiabilidad del examen TUV en su versión en español. Por último, el tercer punto se centra en la inclusión del test al final del artículo para que pueda ser utilizado directamente, sin tener que realizar la traducción, por investigadores y maestros de física que trabajan en países en los que se utiliza este idioma. Es importante mencionar que el test presentado en el presente artículo es la versión final del test y, como se verá en la sección de metodología, fue diseñado a partir de datos recabados en una investigación centrada en la detección de las concepciones alternativas de los estudiantes que tuvo una duración de cuatro años.

2. Marco teórico

2.1. Investigación centrada en el entendimiento conceptual de los estudiantes en los cursos de física

Varios investigadores en el área de la educación de la física han analizado el entendimiento conceptual de los estudiantes en los cursos de física universitaria. McDermott y Redish [32], al hacer un compendio de los artículos más importantes hasta esa fecha, agruparon varios artículos en una sección llamada "Estudios empíricos de entendimiento conceptual" ("Empirical studies of conceptual understanding"). En este artículo se ha optado por utilizar el término "entendimiento conceptual" en español que corresponde al término en inglés "conceptual understanding". Este término ha sido empleado por varios investigadores del área que han escrito artículos en español como Flores-García *et al*. [13] y Benegas [33].

Mäntylä y Koponen [34] señalan que en la educación de la física, el entendimiento conceptual se refiere al entendimiento del contenido y del significado de los conceptos, con un énfasis en el entendimiento cualitativo. Por otra parte, Townbridge y McDermott [35] establecen que de manera general se puede considerar como indicador del nivel de este entendimiento la medida en que corresponde con el entendimiento conceptual de un físico. Para estos autores, esta correspondencia debe encontrarse sobre todo en tres aspectos: 1) en la definición del concepto de manera operacionalmente aceptable, 2) en la distinción del concepto de otros conceptos relacionados y 3) en la aplicación del concepto de manera satisfactoria. Es importante mencionar que en este artículo seguimos estas perspectivas cuando nos referimos al "entendimiento en los conceptos vectoriales" o al "entendimiento conceptual en la representación vectorial".

2.2. El uso de los exámenes de opción múltiple en el área de la investigación en la educación de la física

Según Redish [3], para evaluar el entendimiento conceptual de los estudiantes en el área de la educación de la física se realizan estudios basados: 1) en entrevistas, 2) en la aplicación de exámenes con preguntas abiertas, y 3) en la aplicación de exámenes con preguntas de opción múltiple. Las entrevistas, según McDermott y Shaffer [36], tienen la principal característica de que permiten identificar y caracterizar las dificultades conceptuales y de razonamiento que tienen los estudiantes. Por otra parte, según estos autores, los estudios basados en la aplicación de preguntas abiertas tienen la principal característica de que permiten aumentar el conocimiento sobre estas dificultades de los estudiantes. Por ejemplo, si se aplican este tipo de problemas antes, durante y después de la instrucción a una población media de estudiantes se puede evaluar el cambio conceptual que se produce en los estudiantes y conocer también las dificultades que prevalecen y persisten después de la instrucción.

El tercer tipo de estudio en el área es el basado en la aplicación de exámenes con preguntas de opción múltiple. Beichner [4] y Redish [3] establecen que la principal ventaja de este tipo de exámenes es que se pueden implementar en grandes poblaciones de estudiantes y que el análisis estadístico de los datos recabados permite una mayor generalización de los hallazgos. En el área se han diseñado varios exámenes de opción múltiple para evaluar el entendimiento conceptual en: cinemática [4], fuerzas [5,6], movimiento [7], momento y energía [8], electricidad y magnetismo [9]. Sobre este tema es importante señalar que los diseñadores de estos tests mencionan explícitamente que sus tests permiten evaluar el entendimiento conceptual de los estudiantes universitarios en estos temas específicos. Tómese como ejemplo el caso de Thornton y Sokolof [7] que señalan que su test evalúa el entendimiento conceptual de los estudiantes en las leyes de movimientos establecidas por Newton. Debido que nuestro examen fue diseñado siguiendo las recomendaciones del área y siguiendo esta manera de referirse a estos tests en el área, en el presente artículo señalamos que el TUV-español permite evaluar el entendimiento conceptual de los estudiantes en la representación vectorial.

Para el diseño de estos exámenes, varios investigadores como Beichner [4] y Maloney *et al*. [9] han establecido la necesidad de que en la construcción de los distractores (opciones incorrectas) de cada ítem se consideren los resultados obtenidos de la implementación de problemas abiertos para así asegurar que las dificultades más frecuentes que existen en los estudiantes se encuentren representadas en estos distractores. Es importante mencionar que los ítems diseñados en el área usualmente cuentan con cuatro distractores. Por otra parte, otros investigadores como Ding *et al*. [2] han enfatizado en la importancia que tiene la evaluación estadística de la confiabilidad y el poder de discriminación de los exámenes con opción múltiple.

3. Revisión de literatura

Las investigaciones que han analizado el entendimiento de los estudiantes en los conceptos vectoriales [10-30] pueden ser concentradas en dos grupos. El primer grupo es de los estudios que analizan el entendimiento de los conceptos vectoriales en problemas sin contexto físico [10-24], mientras que el segundo grupo es de los estudios que analizan el entendimiento de los conceptos vectoriales en problemas con contexto físico [12,14,15,19,21,24,25-30]. El primer grupo de estudio está directamente relacionado con nuestra presente investigación ya que nuestro test diseñado evalúa el entendimiento de los estudiantes en problemas sin contexto físico. Debido a esto nos centraremos en este grupo. A continuación se presenta primeramente los resultados de las tres investigaciones más importantes de este grupo. Luego se describen las investigaciones que identifican los errores más frecuentes que cometen los estudiantes universitarios en los conceptos vectoriales debido a la importancia que tienen este tópico en el diseño del test. Por último, se presentan las diferencias más importantes entre el TUV-español y el test de opciones múltiples diseñado por Van Deventer [15].

Los estudios más importantes de este grupo son las investigaciones de Knight [10], Nguyen y Meltzer [11] y Van Deventer [15], ya que analizan el entendimiento de los estudiantes en varios conceptos vectoriales. Knight [10] evalúa el entendimiento que tienen los estudiantes en la representación vectorial al entrar a una universidad de Estados Unidos utilizando un test con problemas abiertos. El investigador encuentra que aproximadamente la mitad de los estudiantes no tiene un conocimiento útil en el tema y describe en su artículo algunos errores frecuentes que cometen los estudiantes. Por ejemplo, el autor encuentra que un porcentaje significativo de estudiantes considera incorrectamente que el vector suma de dos vectores (que tienen sus inicios juntos) se dirige de la punta de un vector a la punta del otro vector. Nótese que el investigador se centra en su estudio principalmente en describir los porcentajes de respuestas correctas en cada uno de los problemas.

Nguyen y Meltzer [11] evalúan el entendimiento que tienen estudiantes universitarios en las propiedades de dirección y magnitud de un vector, así como en la operación de suma de vectores, utilizando un test con problemas abiertos en el cual los vectores se presentan de manera gráfica. Los investigadores establecen que los estudiantes que terminan su primer curso de física en una universidad de Estados Unidos tienen serias dificultades en estas propiedades y en esta operación y en el artículo describen algunas de ellas. Por ejemplo, los investigadores señalan que un porcentaje significativo de estudiantes tienen una confusión sobre el requisito de que dos vectores con la misma dirección deben ser paralelos.

Van Deventer [15] realiza un estudio basado en entrevistas y en la implementación de un test con opciones múltiples para analizar el entendimiento que tienen estudiantes que terminan su primer curso de física universitaria en varios conceptos vectoriales. En las entrevistas el investigador identifica varias dificultes conceptuales que tienen los estudiantes y en la implementación del test halla que los estudiantes que se encuentran en el promedio tienen dificultad para contestar cinco de los doce ítems del test.

Por cuestiones del diseño del test es importante describir también en esta revisión de literatura las seis investigaciones [10-12,14,15,19] de este primer grupo que identifican los errores más frecuentes que cometen los estudiantes universitarios en los conceptos vectoriales. En estas investigaciones se detectan las dificultades en el concepto de dirección [10,11], en el concepto de magnitud [10,11], en el concepto de componente de un vector [10,14,15], en la suma de vectores [10-12,15], en la resta de vectores [12,14,15], en la multiplicación de un vector por un escalar [15], en el producto punto [10,14,15] y en el producto cruz [10,15]. Como se verá en las siguientes secciones, estos conceptos son evaluados en nuestro examen (ver Tabla I), y es importante mencionar, que cuando se analicen a detalle los resultados obtenidos en cada uno de los ítems del test en español (TUV-español) se establecerá para cada uno de los ítems su relación específica con estos estudios previos.

Por último, es importante establecer las diferencias entre nuestro test diseñado y el test diseñado por Van Deventer [15]. Este autor diseñó dos exámenes con opciones múltiples que evaluaban el entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial. Uno de los exámenes contaba con problemas sin contexto físico y el otro de los exámenes contaba con los mismos problemas pero con un contexto físico asociado. El principal punto débil de estos exámenes es que fueron diseñados considerando únicamente resultados obtenidos de entrevistas, con la desventaja de que la muestra de estudiantes era muy pequeña (11 estudiantes). En cambio, nosotros consideramos para el diseño de nuestro examen los resultados de varias implementaciones con problemas abiertos a poblaciones grandes de estudiantes como lo recomiendan investigadores del área [4].También hay que notar que nuestro examen evalúa una mayor cantidad de conceptos vectoriales.

4. Metodología y proceso de diseño del test con opciones múltiples

La investigación se llevó a cabo en una universidad privada mexicana ubicada al noroeste del país. La universidad cuenta con alrededor de 17000 estudiantes, de los cuales aproximadamente la mitad cursa una carrera de ingeniería. Los participantes de este estudio son estudiantes que terminan un curso de Electricidad y Magnetismo basado en cálculo, el cual es el tercer y último curso de física introductoria que los estudiantes cursan en esta institución. En esta universidad se utiliza en los cursos de física el libro de texto “Física para ciencias e ingeniería” de los autores Serway y Jewett [37]. Además, los estudiantes utilizan los “Tutoriales para Física Introductoria” diseñados por los autores McDermott y Shaffer [38].

4.1. Proceso de diseño del test con opciones múltiples

En esta sección se cubre el primer objetivo de este estudio que es presentar el test en español (TUV-español) y su proceso de diseño. Para el diseño del test con opciones múltiples se tomaron en cuenta tres recomendaciones generales establecidas por investigadores del área de la educación de la física. La primera recomendación es que los ítems diseñados cuenten con cinco opciones múltiples: una sola respuesta correcta y cuatro respuestas incorrectas llamadas distractores [4,9]. La segunda recomendación es con respecto al diseño de los cuatro distractores. Varios investigadores recomiendan realizar investigaciones previas en las que se implementen problemas abiertos [4,9] a una población grande de estudiantes para identificar los cuatro errores más frecuentes y establecer precisamente estos errores como los distractores del ítem en formato de opciones múltiples. Por último, la tercera recomendación es con respecto a la evaluación estadística del examen. Varios investigadores, como Ding *et al*. [2], señalan la necesidad de evaluar la confiabilidad y el poder discriminatorio de los exámenes y establecen un proceso estadístico para realizar esta evaluación.

Tomando en cuenta estas tres recomendaciones se siguió un proceso de diseño del test en tres fases que se especifica a continuación.

Primera fase: En la primera fase se buscó desarrollar una taxonomía completa de los errores más frecuentes de los estudiantes en los conceptos vectoriales para luego establecerlos como distractores en el examen con opciones múltiples. Para esto se realizaron varias implementaciones con problemas abiertos en las que participaron un total de 2067 estudiantes. En el diseño de los problemas abiertos se tomaron en cuenta los resultados de las investigaciones previas mencionadas anteriormente [10-12,14,15,19]. Es importante notar que los resultados de algunas de nuestras implementaciones con problemas abiertos fueron reportados en artículos previos [17,21-24].

Segunda fase: En la segunda fase se diseñó e implementó una versión preliminar del test con opciones múltiples para realizar un análisis de las respuestas de los estudiantes que nos ayudara a diseñar una versión final del test. En el análisis se estudió la confiabilidad y el poder discriminación del examen siguiendo el proceso recomendado por Ding *et al*. [2] y la distribución de frecuencia de los errores de los estudiantes en cada uno de los ítems para observar el comportamiento de los distractores.

Tercera fase: A partir del análisis de la segunda fase se diseñó e implementó una versión final del test en español con opciones múltiples (TUV-español) que se muestra en el apéndice de este artículo. En esta fase se realizó, al igual que en la segunda fase, un análisis de la confiabilidad y poder discriminatorio del examen siguiendo lo recomendado por Ding *et al*. [2], y también se analizó el entendimiento de los estudiantes. Nótese que estos análisis se presentan en la Sec. 5 y 6 del presente artículo y cubren el segundo y tercer objetivo de esta investigación.

4.2. Características del test con opciones múltiples (TUV-español)

Como se mencionó anteriormente, en el apéndice del artículo se muestra el test en español (TUV-español) que cuenta con 20 ítems. En la Tabla I se presentan los diez conceptos vectoriales cubiertos en el test y una descripción de los 20 ítems. Como se ve en esta tabla el test cubre todos los conceptos vectoriales utilizados en los cursos de física introductoria a nivel universitario. El test tiene 11 ítems que evalúan el entendimiento en aspectos gráficos de los conceptos vectoriales (ítems 1-5, 9-13, 19), 7 ítems que evalúan el entendimiento en cálculos de estos conceptos (ítems 8, 14, 15, 17, 18, 20) y 2 ítems evalúan estos dos aspectos (ítems 7 y 16). Nótese que en la Sec. 6 se analizarán los porcentajes expuestos en la Tabla I.

5. Análisis de confiabilidad y poder discriminatorio del test

En esta sección se cubre el segundo objetivo de este estudio que es mostrar que el test en español (TUV-español) es un instrumento de evaluación confiable y con poder discriminatorio adecuado siguiendo el análisis recomendado por Ding *et al*. [2]. En este análisis se realizan cinco pruebas estadísticas: tres pruebas se enfocan en el análisis individual de los ítems del test (índice de dificultad del ítem, índice de discriminación del ítem y coeficiente de punto biserial del ítem) y dos pruebas en el análisis de todo el test (confiabilidad del test y delta de Ferguson). Los autores señalan que si el examen cumple con estas cinco pruebas se puede concluir que el examen es un test confiable con un poder discriminatorio satisfactorio.

5.1. Índice de dificultad

El índice de dificultad (P) es, según Ding *et al*. [2], una medida de dificultad de un ítem del test. Se calcula dividiendo las respuestas correctas obtenidas en un ítem específico sobre la cantidad de estudiantes que realizaron el ítem (N). El rango recomendado por los autores para este índice es entre 0.3 y 0.9. Los investigadores también recomiendan calcular el índice de dificultad promedio del test que es la suma de todos los índices divididos por la cantidad de ítems del test. El rango recomendado también es [0.3,0.9].

En la Fig. 1 se muestran los índices de dificultad de cada uno de los ítems del test en español (TUV-español). Se observa que únicamente el ítem 10 tiene un índice de dificultad ligeramente mayor a lo deseado (0.91). El índice de dificultad promedio del test es 0.64. Este índice promedio está en el rango recomendado [0.3,0.9].

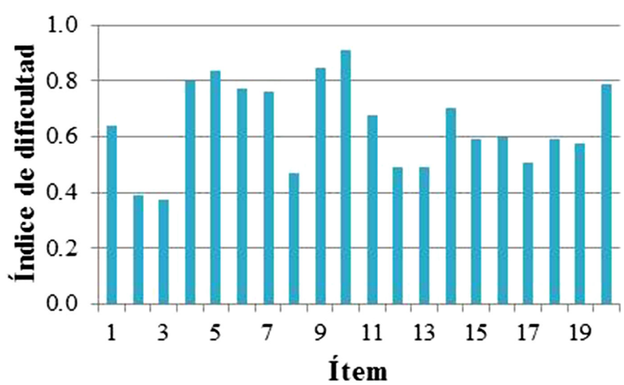


FIGURA 1. Índices de dificultad de los ítems del test.

TABLA I. Resultados obtenidos en los ítems del TUV-español. Se presentan los diez conceptos vectoriales evaluados, la descripción de los ítems y los porcentajes obtenidos. La respuesta correcta se encuentra en cursiva y N es para los que no contestaron.

Concepto	Ítem	Descripción del ítem	A	B	C	D	E	N
Dirección	5	Elección de vectores con la misma dirección en una gráfica	9	3	*84*	1	3	0
	17	Cálculo de la dirección de un vector escrito en notación de vectores unitarios	*50*	10	17	13	9	1
Magnitud	20	Cálculo de la magnitud de un vector escrito en notación de vectores unitarios	6	*79*	6	7	1	1
Representación gráfica	10	Representación gráfica de un vector escrito en notación de vectores unitarios	4	*91*	1	2	2	0
Componente	4	Representación gráfica de la componente y de un vector	11	3	*80*	1	5	0
	9	Representación gráfica de la componente x de un vector	7	4	2	*85*	2	0
	14	Cálculo de la magnitud de la componente x de un vector (ángulo medido desde el eje y)	3	3	*71*	21	2	0
Vector unitario	2	Representación gráfica de un vector unitario	14	38	*39*	4	5	0
Suma	1	Representación gráfica de un vector suma en 2D	15	8	3	10	*64*	0
	7	Comparación de la magnitud del vector suma de dos vectores, con misma magnitud a 90°, con la magnitud de uno de los vectores	8	*76*	10	5	1	0
	16	Comparación de la magnitud del vector suma de dos vectores, con misma magnitud a 143.13°, con la magnitud de uno de los vectores	10	*60*	17	4	7	2
Resta	13	Representación gráfica de un vector resta en 2D	9	5	8	29	*49*	0
	19	Representación gráfica de un vector resta en 1D	1	28	6	6	*58*	1
Multiplicación escalar	11	Representación gráfica de la multiplicación de un vector por un escalar negativo	8	12	*68*	4	8	0
Producto punto	3	Interpretación geométrica del producto punto como proyección	25	*37*	23	9	5	1
	6	Cálculo del producto punto como AB$\cos\theta$	5	*77*	4	8	6	0
	8	Cálculo del producto punto de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios	*47*	8	23	8	14	0
Producto cruz	12	Interpretación gráfica del producto cruz como un vector perpendicular según la regla de la mano derecha	10	30	7	3	*49*	1
	15	Cálculo del producto cruz de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios	*59*	8	9	21	2	1
	18	Cálculo de la magnitud del producto cruz como ABsenθ	13	5	6	*59*	15	2

5.2. Índice de discriminación

El índice de discriminación (D) es, según Ding *et al.* [2], una medida del poder de discriminación que tiene cada ítem del test. Para calcular este índice por el método 50 %-50 %, se divide la muestra en dos grupos: la cantidad de estudiantes que tienen una calificación total en el examen mayor a la mediana (N_H) y la cantidad de estudiantes que tienen una calificación menor que la mediana (N_L). La fórmula para calcularlo es $D = (N_H - N_L)/(N/2)$. Los autores recomiendan seguir el criterio de que un ítem con una buena discriminación es ≥ 0.3. Ding *et al.* [2] recomiendan eliminar los ítems con índices de discriminación negativos. También, los investigadores recomiendan calcular el índice de discriminación promedio del test que es la suma de todos los índices divididos por la cantidad de ítems del test. El rango recomendado también es ≥ 0.3.

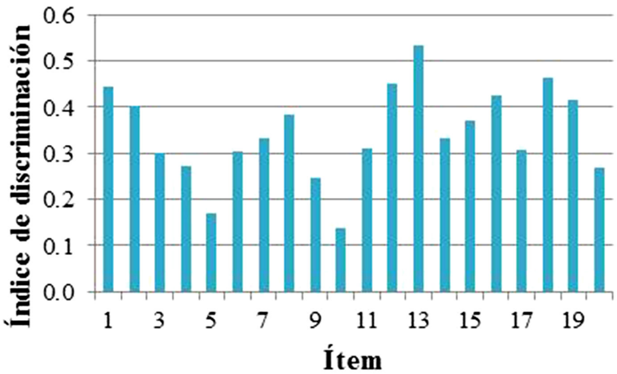


FIGURA 2. Índices de discriminación de los ítems del test.

En la Fig. 2 se observa que 15 ítems del test de opciones múltiples cumplen con los criterios establecidos. Solo 5 ítems (4, 5, 9, 10 y 20) son menores a 0.3. Ding *et al*. [2] recomiendan eliminar los ítems con índices de discriminación negativos. En nuestro caso ningún índice es negativo. El índice de discriminación promedio del test es 0.34 utilizando el método 50 %-50 %. Este índice promedio cumple con el criterio recomendado (≥ 0.3), por lo que el test es capaz de distinguir entre la maestría alta y baja del material.

5.3. Coeficiente punto biserial

Ding *et al*. [2] mencionan que el coeficiente punto biserial (r_{pbs}) es una medida de la consistencia de un ítem con todo el test, y que básicamente refleja la correlación entre las calificaciones de los estudiantes en un ítem con las calificaciones en todo el test. La fórmula para calcular este coeficiente es $r_{pbs} = [(\overline{X_1} - \overline{X})/\sigma_X]\sqrt{P/(1-P)}$. $\overline{X_1}$ es la calificación total promedio de los estudiantes que obtienen una calificación de 1 en el ítem del test, que quiere decir que contestan correctamente este ítem, $\overline{X}$ es el promedio de la calificación total en el examen de toda la muestra, σ_X es la desviación estándar de las calificaciones de toda la muestra y P es el índice de dificultad del ítem. Los autores recomiendan seguir el criterio de que un ítem con una buena confiabilidad tiene un $r_{pbs} \geq 0.2$. Los autores también recomiendan calcular el promedio de los coeficientes punto biserial que es la suma de todos los coeficientes dividida por el número de ítems en el test. El rango recomendado para este promedio también ≥ 0.2.

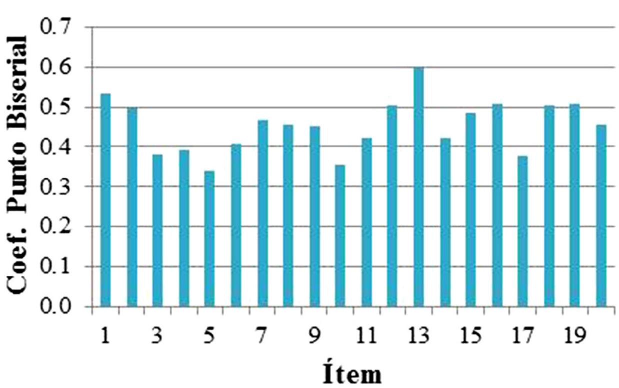


FIGURA 3. Coeficientes punto biserial de los ítems del test.

En la Fig. 3 se muestran los coeficientes punto biserial de cada ítem del test. Se observa que todos los ítems cumplen con esta condición. El promedio de los coeficientes punto biserial es 0.45. Este promedio cumple también con el criterio.

5.4. Índice de confiabilidad Kuder-Richardson

Ding *et al*. [2] mencionan que el índice de confiabilidad de Kuder Richardson es una medida de la consistencia de todo el test. La fórmula para calcular este índice es

$$r_{\text{test}} = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{K} P_i(1-P_i)}{\sigma_X^2}\right).$$

Donde K es el número de ítems en el test, σ_X es la desviación estándar de las calificaciones de toda la muestra y P_i es el índice de dificultad del ítem i. Los autores establecen el criterio ampliamente aceptado de que un índice de confiabilidad mayor a 0.7 es confiable para medidas de grupo, lo que es muy utilizado en la mayoría de circunstancias en educación de la física. El valor obtenido en este índice para el test es de 0.8 que cumple con este criterio.

5.5. Delta de Ferguson

Ding *et al*. [2] mencionan que la delta de Ferguson es una medida del poder discriminatorio de un test que investiga que tan ampliamente están distribuidas las calificaciones de un test en el rango posible. Se menciona que si un test es diseñado y utilizado para discriminar entre los estudiantes, uno esperaría una distribución amplia en las calificaciones totales. La fórmula para calcular la delta de Ferguson es

$$\delta = \frac{N^2 - \sum_{i=1}^{K} f_i^2}{N^2 - N^2/(K+1)}.$$

Donde N es el número de estudiantes que realizan el examen, K el número de ítems del test y f_i es el número de ocurrencias de cada una de las calificaciones. Los autores recomiendan seguir el criterio de que un test que ofrece un buen poder de discriminación es mayor a 0.9. La delta de Ferguson del test en español es 0.98 que se encuentran dentro del rango recomendado por los autores.

5.6. Resumen de las cinco pruebas estadísticas

En la Tabla II se muestra el resumen de las cinco pruebas estadísticas realizadas para evaluar la confiabilidad y poder discriminatorio del test de opciones múltiples. Como se observa todos los valores promedio cumplen con lo recomendado por los autores Ding *et al*. [2]. A partir de esto es posible afirmar que el examen TUV-español es un instrumento de evaluación confiable y con poder discriminatorio adecuado.

TABLA II. Resumen de pruebas estadísticas realizadas para el test.

Prueba estadística	Valores deseado	Test TUV-español
Índice de dificultad	[0.3,0.9]	Promedio: 0.64
Índice de discriminación	≥ 0.3	Promedio: 0.34
Coeficiente punto biserial	≥ 0.2	Promedio: 0.45
Índice Kuder-Richardson	≥ 0.7 para medidas grupales	0.8
Delta de Ferguson	> 0.9	0.98

6. Análisis del entendimiento conceptual de los estudiantes en el test

En esta sección se cubre el tercer objetivo de este estudio que es analizar el entendimiento en cada uno de los conceptos vectoriales evaluados en el test de 585 estudiantes que terminan sus cursos de física en una universidad privada mexicana. La sección está dividida en tres apartados. En el primer apartado se realiza un análisis del desempeño general de los estudiantes en el test. Luego en el segundo se agrupan los ítems del test según su grado de dificultad. Por último en el tercer apartado se efectúa un análisis del desempeño de los estudiantes en cada uno de los ítems del test describiendo con detalle el error más frecuente que cometen los estudiantes en cada ítem.

6.1. Desempeño general de los estudiantes en el test

Para estudiar el desempeño general de los estudiantes en el test se analizan las calificaciones obtenidas por los estudiantes. La distribución de las calificaciones del examen es una distribución negativamente asimétrica [39]. Para distribuciones de este tipo es mejor utilizar los cuartiles como medidas de dispersión. La mediana de la distribución es 13, el primer cuartil es 10, el tercer cuartil es 16, por lo que el rango intercuartil es 6. Una distribución con asimetría negativa indica un examen que no es muy difícil para los estudiantes, sin embargo si se considera que los estudiantes terminan el último curso de física introductoria de la institución, y que las propiedades y operaciones vectoriales evaluadas en el test son utilizadas frecuentemente en los cursos de física, es interesante notar que los estudiantes que se encuentran en la mediana (mediana=13) tienen dificultades para contestar correctamente 7 ítems del test.

6.2. Agrupación de los ítems del test según su grado de dificultad

La Tabla I muestra el porcentaje de estudiantes que contesta correctamente los ítems del test. El rango de respuesta correcta es muy amplio y va desde el 37 % en el ítem 3 (interpretación geométrica del producto punto) hasta el 91 % en el ítem 10 (representación de un vector escrito en notación de vectores unitarios). Para determinar el grado de dificultad que tiene cada uno de los ítems del test, se decidió agrupar a los ítems en tres diferentes grados de dificultad. Se estableció un grado de dificultad alto si el porcentaje de respuesta correcta en el ítem era menor o igual al 50 %, un grado medio si este porcentaje se encontraba entre 50 % y 75 %, y un grado bajo si este porcentaje era mayor a 75 %. Los siete ítems con un nivel bajo de dificultad son los ítems 4, 5, 6, 7, 9, 10 y 20. Los siete ítems con un nivel medio de dificultad son los ítems 1, 11, 14, 15, 16, 18 y 19. Finalmente, los seis ítems que tienen un nivel alto de dificultad son los ítems: 3 (interpretación geométrica del producto punto), 2 (representación del vector unitario), 8 (cálculo de producto punto de dos vectores escritos en vectores unitarios), 12 (interpretación gráfica del producto cruz), 13 (representación gráfica del vector resta en 2D) y 17 (cálculo de dirección de un vector escrito en vectores unitarios).

6.3. Entendimiento de los estudiantes en cada uno de los conceptos vectoriales

En la Tabla I se muestran los porcentajes que se obtuvieron en cada uno de los ítems. A continuación se analiza el desempeño de los estudiantes en cada uno de los ítems. En este análisis se presenta con detalle el error más frecuente que cometen los estudiantes en cada ítem describiendo los razonamientos y/o procedimientos incorrectos, identificados en las implementaciones con problemas abiertos, que llevan a los estudiantes a cometer este error.

6.3.1. Dirección de un vector

Los ítems 5 y 17 evalúan el entendimiento de los estudiantes en el concepto de dirección. En el ítem 5 se pide elegir los vectores de una lista que tienen la misma dirección que un vector a 45°. Este ítem es una modificación de un problema abierto diseñado por Nguyen y Meltzer [11]. El 84 % de los estudiantes responde de manera correcta este ítem. El error más frecuente (9 %, opción A) es incluir en su respuesta un vector que se encuentra a 56.3°. En las implementaciones con problemas abiertos se encontró que estos estudiantes justifican usualmente esta respuesta por el hecho de que el vector a 56.3° tiene componentes x y y positivas como el vector a 45°, o porque estos dos vectores apuntan hacia la misma región (noreste).

En el ítem 17 se pide encontrar la dirección de un vector escrito en notación de vectores unitarios ($\overrightarrow{\mathbf{A}} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$). Knight [10] diseñó un problema similar pero no identificó los errores más frecuentes en los estudiantes. El 50 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo la opción 126.87°. El error más frecuente (17 %, opción C) es establecer que la dirección es 143.13°. Estos estudiantes calculan el ángulo 53.13°, como la tangente inversa de cuatro tercios y luego suman incorrectamente 90° a este valor.

6.3.2. Magnitud de un vector

En el ítem 20 se pide calcular la magnitud de un vector escrito en notación de vectores unitarios ($\overrightarrow{\mathbf{A}} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$). Knight [10] diseñó un problema similar pero no identificó los errores más frecuentes en los estudiantes. El 79 % de los estudiantes contesta de manera correcta este ítem eligiendo la opción $\sqrt{8}$. El error más frecuente (7 %, opción D) es elegir el vector unitario del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ como respuesta $\left((2/\sqrt{8})\hat{\imath} + (2/\sqrt{8})\hat{\jmath}\right)$.

6.3.3. Representación de un vector

El ítem 10 evalúa el entendimiento de los estudiantes en la representación gráfica de un vector escrito en notación de vectores unitarios (vector $\overrightarrow{\mathbf{A}} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$). El 91 % de los estudiantes contesta de manera correcta este ítem. El error más frecuente (4 %, opción A) es elegir un vector del punto (-2,0) hasta el punto (0,3). En las implementaciones abiertas se observó que estos estudiantes dibujan las dos componentes del vector $-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ partiendo del origen con sus inicios juntos y luego dibujan el vector de la punta de la componente horizontal a la punta de la componente vertical.

6.3.4. Componente de un vector

Los ítems 4, 9 y 14 evalúan el entendimiento de los estudiantes en el concepto de componente de un vector. Estos ítems son modificaciones de problemas de opciones múltiples diseñados por Van Deventer [15]. En el ítem 4 se pide elegir la opción que muestra la representación gráfica de la componente y del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. El 80 % contesta de manera correcta este ítem. El error más frecuente (11 %, opción A) es elegir un vector con dirección correcta pero con una magnitud mayor que la adecuada. En las implementaciones con problemas abiertos se observó que algunos de estos estudiantes consideraban que la magnitud de la componente y es igual a la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

En el ítem 9 se pide elegir la opción que muestra la representación gráfica de la componente x del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. El 85 % de los estudiantes contesta de manera correcta este ítem. Igual que en el ítem anterior, el error más frecuente es elegir la opción A (7 %) que muestra una componente con la dirección correcta pero con una magnitud mayor a la adecuada. En las implementaciones con problemas abiertos se encontró que la mayoría de estos estudiantes consideraban, al igual que en el ítem pasado, que la magnitud de la componente x es igual a la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Por otra parte, en el ítem 14 se pide elegir la opción que muestra el cálculo de la magnitud de la componente x de un vector que forma un ángulo específico (ϕ) con respecto al eje vertical. El 71 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo la opción $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\text{sen}\phi$. El error más frecuente (21 %, opción D) es elegir la opción incorrecta $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\cos\phi$, la cual es la fórmula que los estudiantes usualmente memorizan para calcular la componente en x de un vector que forma un ángulo específico con respecto a la horizontal.

6.3.5. Vector unitario

En el ítem 2 se pide elegir la opción que muestra el vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ ($\overrightarrow{\mathbf{A}} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$). Sólo el 39 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo un vector con componentes x y y con una magnitud de 0.71 unidades (opción C). El error más frecuente (38 %, opción B) es seleccionar como respuesta un vector con componentes x y y de una unidad. En las implementaciones con problemas abiertos se constató que estos estudiantes tienen una concepción alternativa en la que consideran que este vector tiene una magnitud de una unidad.

6.3.6. Suma de vectores

Los ítems 1, 7 y 16 evalúan el entendimiento de los estudiantes en la suma de vectores. En el ítem 1 se pide elegir la opción que muestra el vector suma de dos vectores (que tienen sus inicios juntos) en dos dimensiones. Este ítem es una modificación de un problema abierto diseñado por Nguyen y Meltzer [11]. El 64 % de los estudiantes contesta de manera correcta (opción E). El error más frecuente (15 %, opción A) es elegir un vector resultante que se encuentra entre los dos vectores pero que carece de la precisión para ser considerado correcto.

Por otra parte, en el ítem 7 se muestran dos vectores de la misma magnitud que forman un ángulo de 90° y se pide elegir la opción que muestra la relación adecuada (mayor, menor o igual) entre la magnitud del vector suma de estos dos vectores y la magnitud de uno de los vectores, y el razonamiento adecuado que justifica esta relación. Nguyen y Meltzer [11] diseñaron un problema abierto similar. El 76 % de los estudiantes contesta de manera correcta señalando que la magnitud del vector suma es mayor "por la aplicación directa del teorema de Pitágoras" (opción B). El error más frecuente (10 %, opción C) es señalar que el vector suma tiene igual magnitud que uno de los vectores, "porque los dos vectores tienen la misma magnitud".

El ítem 16 tiene la misma forma que el ítem anterior. En este ítem se pide lo mismo que el anterior pero ahora los dos vectores forman un ángulo de 143.13° (no 90°). Flores *et al.* [12,13] diseñaron un problema abierto similar. El 60 % de los estudiantes contesta de manera correcta señalando que el vector suma es menor, "ya que si se realiza la operación gráfica de suma se constata que el vector suma es menor" (opción B). El error más frecuente (17 %, opción C) es señalar que el vector suma tiene una magnitud mayor "porque la suma de dos vectores da siempre un vector resultante con magnitud mayor a la magnitud de los vectores que se suman".

6.3.7. Resta de vectores

Los ítems 13 y 19 evalúan el entendimiento de los estudiantes en la resta de vectores. En el ítem 19 se pide elegir la opción que muestra el vector resta de dos vectores en 1D. Wang y Sayre [19] diseñaron un problema abierto similar. El 58 % de los estudiantes contesta de manera correcta este ítem (opción E). El error más frecuente (28 %, opción B) es elegir como respuesta el vector suma.

En el ítem 13 se pide elegir la opción que muestra el vector resta de dos vectores en 2D. Se presentan de manera gráfica dos vectores con sus inicios juntos, el vector $\vec{\mathbf{A}}(-3\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$ y el vector $\vec{\mathbf{B}}(-2\hat{\imath}-2\hat{\jmath})$, y se pide elegir la opción que muestra de manera gráfica el vector resta $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. Flores *et al.* [12,13] diseñaron un problema abierto similar. El 49 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo el vector $-1\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ (opción E). El error más frecuente (29 %) es elegir la opción D en la que se muestra el vector $-1\hat{\imath}+1\hat{\jmath}$. En el análisis del problema abierto asociado se encontraron dos procedimientos incorrectos más frecuentes. En el primero los estudiantes restan los vectores por componentes y suman, en vez de restar, las componentes en y de los dos vectores. En el segundo error los estudiantes dibujan incorrectamente el vector $-\vec{\mathbf{B}}$ como $2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ (en vez de $2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$), y luego suman los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{B}}$ obteniendo el vector $-1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$.

6.3.8. *Multiplicación de un vector por un escalar negativo*

El ítem 11 muestra gráficamente el vector $\vec{\mathbf{A}}$ y se pide elegir la opción que muestra el vector $-3\vec{\mathbf{A}}$. Este ítem es una versión modificada de un problema implementado por Van Deventer [15] en entrevistas. El 68 % de los estudiantes contesta de manera correcta (opción C). El error más frecuente (12 %, opción B) es elegir la opción en la que se muestra el vector $3\vec{\mathbf{A}}$. Estos estudiantes tienen dificultades para entender el rol que tiene el signo negativo en la multiplicación.

6.3.9. *Producto punto*

Los ítems 3, 6 y 8 evalúan el entendimiento de los estudiantes en el producto punto de dos vectores. En el ítem 3 se pide elegir la opción que muestra la mejor interpretación del producto punto de dos vectores. Solo el 37 % de los estudiantes contesta correctamente eligiendo la opción B en la que se establece que el producto punto es una proyección. El error más frecuente (25 %, opción A) es considerar que el producto punto de dos vectores es la magnitud de un vector entre los dos vectores.

En el ítem 6 se pide elegir la opción en la que se muestra el cálculo del producto punto de dos vectores que forman un ángulo específico θ. Knight [10] diseñó un problema similar pero no identificó los errores más frecuentes en los estudiantes. El 77 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo la opción $|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\cos\theta$ (opción B). El error más frecuente (8 %, opción D) es elegir la opción $|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\text{sen}\theta$, que es la opción para calcular la magnitud del producto cruz de los dos vectores.

En el ítem 8 se pide elegir la opción en la que se muestra el producto punto de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios ($\vec{\mathbf{A}} = 1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\imath}$). Knight [10] diseñó un problema similar pero no identificó los errores más frecuentes. Solo el 47 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo 5 como respuesta (opción A). El error más frecuente (23 %, opción C) es elegir la opción $5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$. En las implementaciones abiertas se observó que estos estudiantes calculaban erróneamente que el producto punto de las componentes en x de los vectores ($1\hat{\imath}$ y $5\hat{\imath}$) era $5\hat{\imath}$ y añadían a esta respuesta el vector componente en y del vector $\vec{\mathbf{A}}$ ($3\hat{\jmath}$).

6.3.10. *Producto cruz*

Los ítems 12, 15 y 18 evalúan el entendimiento de los estudiantes en el producto cruz de dos vectores. En el ítem 12 se pide elegir la opción que muestra la mejor interpretación del producto cruz de dos vectores. Van Deventer [15] implementó un problema similar en entrevistas. El 49 % de los estudiantes contesta de manera correcta este ítem (opción E). El error más frecuente (30 %, opción B) es elegir un vector perpendicular a los dos vectores pero con una dirección opuesta a la adecuada. Estos estudiantes tienen dificultades para aplicar la regla de la mano derecha.

En el ítem 18 se pide elegir la opción en la que se muestra el cálculo de la magnitud del producto cruz de dos vectores que forman un ángulo θ. Knight [10] diseñó un problema similar pero no identificó los errores más frecuentes en los estudiantes. El 59 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo $|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\text{sen}\theta$ (opción D). El error más frecuente (15 %, opción E) es seleccionar la ecuación $|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\cos\theta$ que es la expresión para el cálculo del producto punto.

En el ítem 15 se pide elegir la opción en la que se muestra el producto cruz de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios ($\vec{\mathbf{A}} = 1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\jmath}$). El 59 % de los estudiantes contesta de manera correcta eligiendo la opción $-15\hat{k}$ (opción A). El error más frecuente (21 %, opción D) es elegir la respuesta correcta pero con el signo incorrecto ($15\hat{k}$).

7. Recomendaciones para la instrucción de los conceptos vectoriales

McDermott [40] señala que todo cambio curricular debe partir de una investigación del entendimiento de los estudiantes. El análisis del entendimiento conceptual de los estudiantes en el test, realizado en la sección anterior para cubrir el tercer objetivo, cumple con este rol de investigación señalado por McDermott [40] y permite establecer algunas recomendaciones para la instrucción de los conceptos vectoriales en los cursos de física introductoria.

En la sección anterior se observó, al analizar las calificaciones, que la mediana de las calificaciones obtenidas por estudiantes que terminaban su último curso de física introductoria en una universidad mexicana era de 13 sobre 20. Esto llama la atención por el hecho de que las propiedades y operaciones vectoriales evaluadas en el test son frecuentemente utilizadas en los cursos de física. Se nota que los estudiantes que se encuentran en la mediana tienen dificultades para contestar correctamente 7 ítems del test. Este hecho muestra la necesidad de modificar la instrucción de los conceptos vectoriales para intentar incrementar el entendimiento conceptual de los estudiantes en este tema.

Después de este análisis se agruparon los ítems del test según su grado de dificultad. Se observó que los seis ítems más difíciles para los estudiantes eran los ítems: 3 (interpretación geométrica del producto punto), 2 (representación del vector unitario), 8 (cálculo de producto punto de dos vectores escritos en vectores unitarios), 12 (interpretación gráfica del producto cruz), 13 (representación gráfica del vector resta en 2D) y 17 (cálculo de dirección de un vector escrito en vectores unitarios). Nuestra recomendación es enfatizar en la instrucción estos conceptos y propiedades vectoriales.

Por último, el análisis del entendimiento de los estudiantes en cada uno de los ítems nos permite establecer otras recomendaciones. McDermott [40] establece que algunos errores conceptuales son muy persistentes en los estudiantes y que éstos deben ser directamente abordados en la instrucción. En el análisis de cada uno de los ítems se estableció y describió el error más frecuente de los estudiantes. Estos análisis pueden ser utilizados por maestros de física como un catálogo de los errores más frecuentes y más persistentes que deben ser abordados en la instrucción de cada uno de los conceptos y propiedades vectoriales.

8. Conclusiones

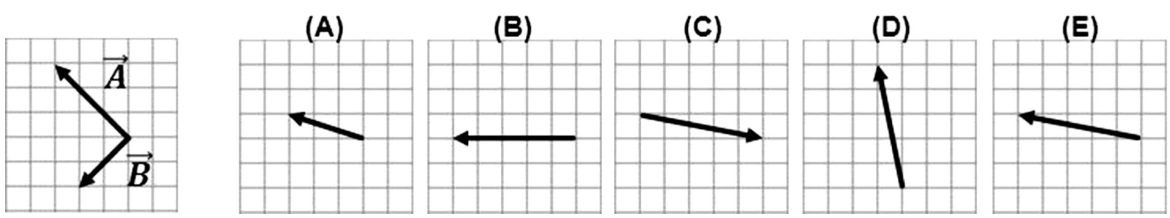
En el presente artículo se presenta primeramente el test en español (TUV-español) y su proceso de diseño. Luego se muestra que este test es un instrumento de evaluación confiable y con poder discriminatorio adecuado. Después se analiza el entendimiento en cada uno de los conceptos vectoriales evaluados en el test de estudiantes que terminan sus cursos de física introductoria en una universidad privada mexicana. Por último se establecen, a partir del último análisis, algunas recomendaciones para la enseñanza de los conceptos vectoriales utilizados en los cursos de física introductoria a nivel universitario.

Este artículo tiene diversas implicaciones. El proceso de diseño del examen y el análisis de confiablidad pueden ser utilizados por investigadores del área de la educación de la física que deseen diseñar exámenes con opciones múltiples. Por otra parte, el análisis del entendimiento de los estudiantes, la recomendaciones establecidas para la instrucción y el test en español (TUV-español), que se muestra en el apéndice del artículo, pueden ser considerados y utilizados por maestros de física que enseñan el tema de vectores en países hispanohablantes.

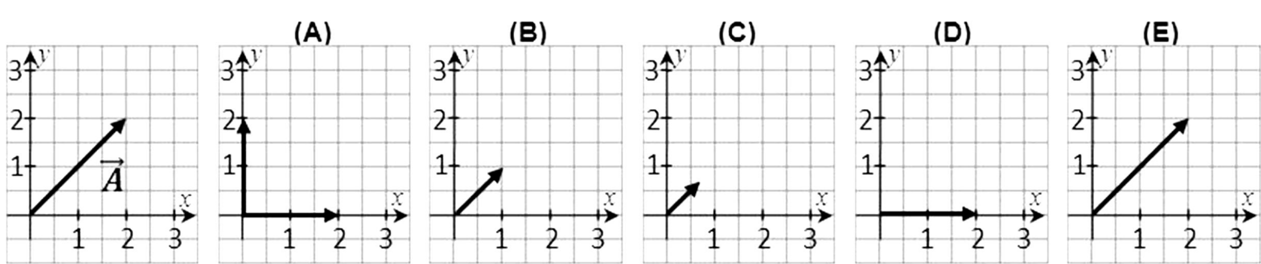
Apéndice

Test con opciones múltiples en español (TUV-español)

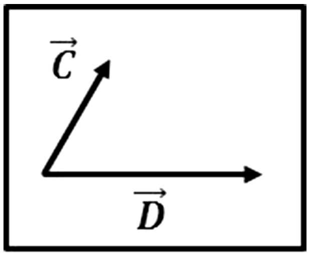
1. En la figura se muestran los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Elija la opción que muestra el vector suma $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}$.



2. Abajo se muestra el vector $\vec{\mathbf{A}}$. Elija la opción que muestra el vector unitario en dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$.



3. Abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{D}}$. ¿Cuál de las siguientes opciones es la interpretación más adecuada del producto punto ($\overrightarrow{\mathbf{C}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{D}}$)?



(A) La magnitud de un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

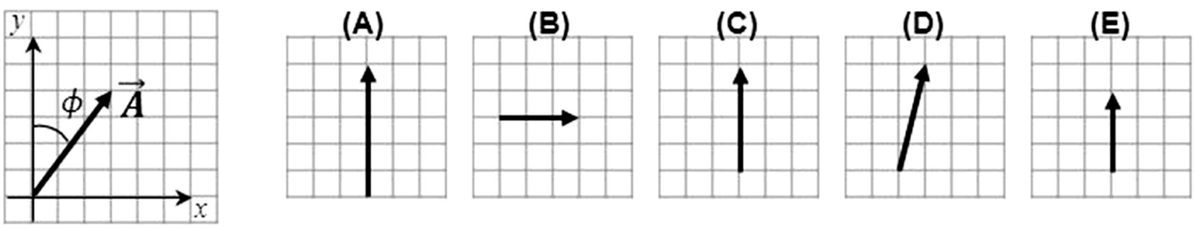
(B) La proyección del vector $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ sobre el vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ multiplicada por la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

(C) Un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

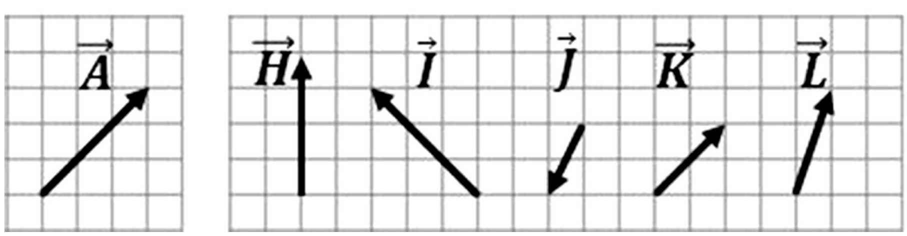
(D) Un vector perpendicular a los dos vectores.

(E) Un vector en la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

4. Abajo se muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, el cual forma un ángulo ϕ con respecto al eje vertical. Elija la opción que muestra la componente en y del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, es decir $\overrightarrow{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$.



5. Abajo se muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y una lista de vectores. ¿Cuál(es) de los vectores de la lista tiene(n) la misma dirección que el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$?



(A) $\overrightarrow{\mathbf{K}}$, $\overrightarrow{\mathbf{L}}$

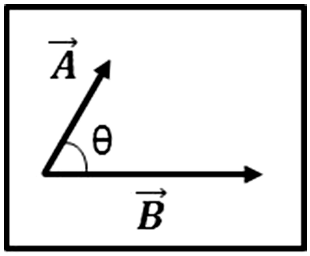
(B) $\overrightarrow{\mathbf{I}}$, $\overrightarrow{\mathbf{K}}$

(C) $\overrightarrow{\mathbf{K}}$

(D) $\overrightarrow{\mathbf{H}}$, $\overrightarrow{\mathbf{K}}$, $\overrightarrow{\mathbf{L}}$

(E) Ningún vector tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$

6. Abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ que forman un ángulo θ. $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $|\overrightarrow{\mathbf{B}}|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{B}}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra el producto punto ($\overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}$)?



(A) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\,|\overrightarrow{\mathbf{B}}|$

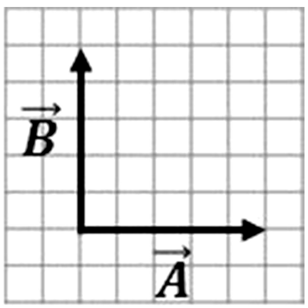
(B) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\,|\overrightarrow{\mathbf{B}}|\cos\theta$

(C) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathbf{B}}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

(D) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\,|\overrightarrow{\mathbf{B}}|\mathrm{sen}\,\theta$

(E) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\cos\theta\,|\overrightarrow{\mathbf{B}}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

7. En la figura de abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ que tienen la misma magnitud. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera con relación a la magnitud del vector suma de estos dos vectores?



(A) La magnitud del vector suma es igual que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. El vector suma solo cambia de dirección.

(B) La magnitud del vector suma es mayor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y se demuestra por la aplicación directa del teorema de Pitágoras.

(C) La magnitud del vector suma es igual que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, porque el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y el vector $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ tienen la misma magnitud.

(D) La magnitud del vector suma es igual que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y se demuestra por la aplicación directa del teorema de Pitágoras.

(E) La magnitud del vector suma es menor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, porque el ángulo entre los dos vectores es de noventa grados.

8. Se tiene el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}} = 1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y el vector $\overrightarrow{\mathbf{B}} = 5\hat{\imath}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra el producto punto ($\overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}$)?

(A) 5

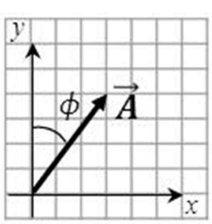
(B) $-15\hat{k}$

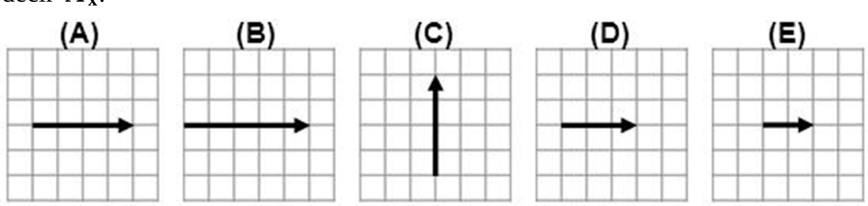
(C) $5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

(D) $6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

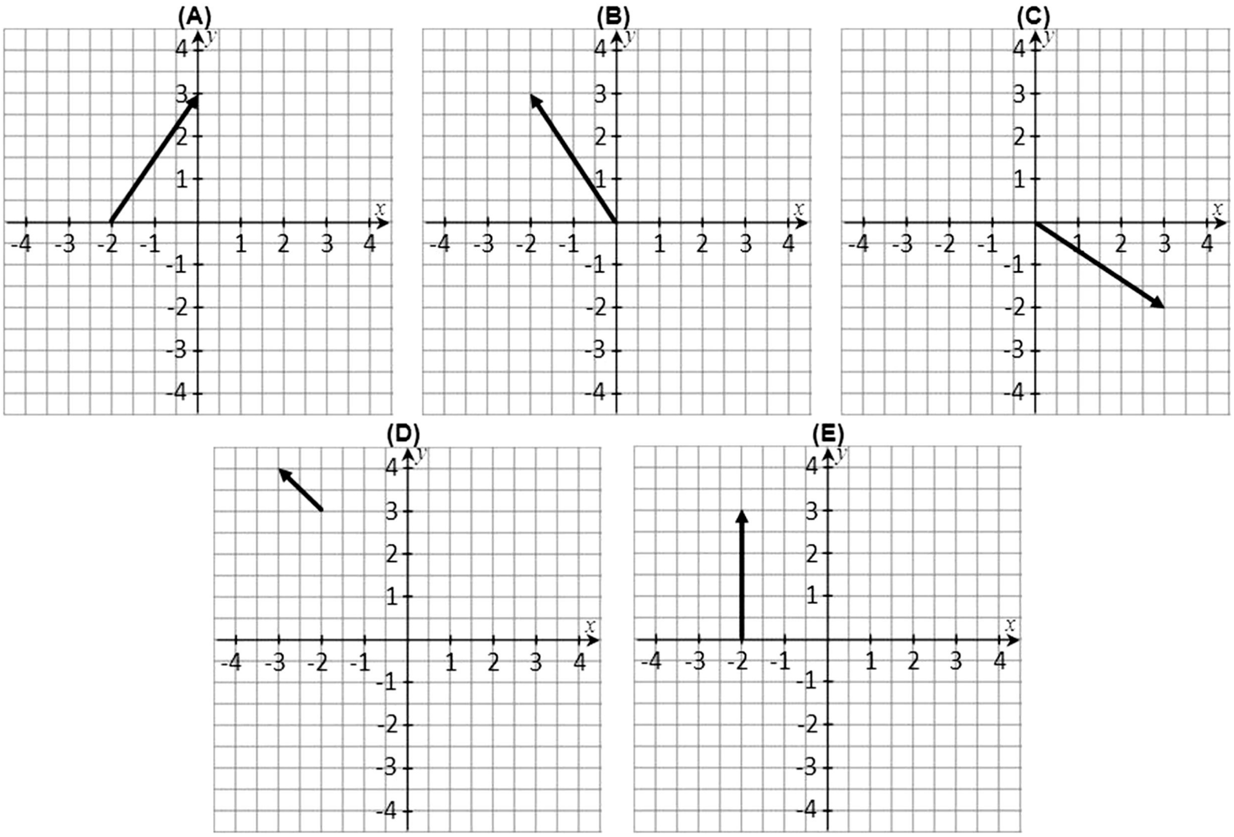
(E) $5\hat{\imath}$

9. Abajo se muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, el cual forma un ángulo ϕ con respecto al eje vertical. Elija la opción que muestra la componente en x del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, es decir $\overrightarrow{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$.

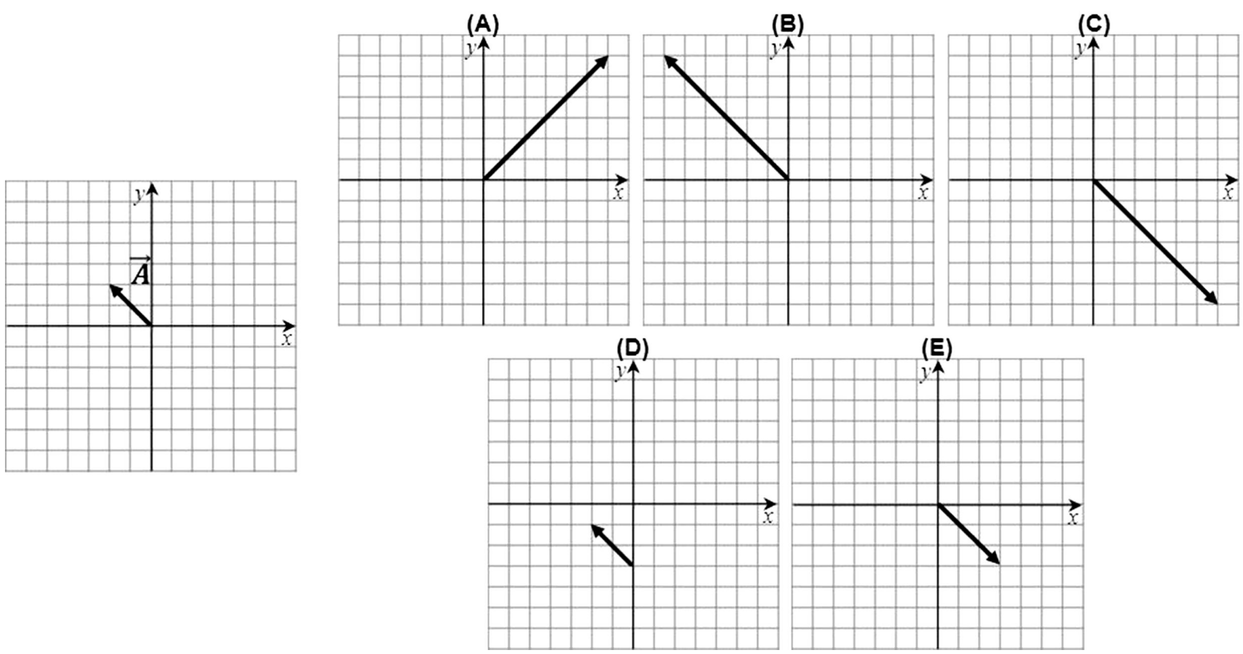




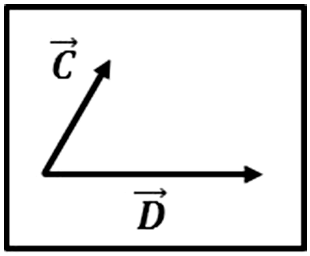
10. Elija la opción que muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$



11. Abajo se muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Elija la opción que muestra el vector $-3\overrightarrow{\mathbf{A}}$.



12. Abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{D}}$. ¿Cuál de las siguientes opciones es la interpretación más adecuada del producto cruz ($\overrightarrow{\mathbf{C}} \times \overrightarrow{\mathbf{D}}$)?



(A) Un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

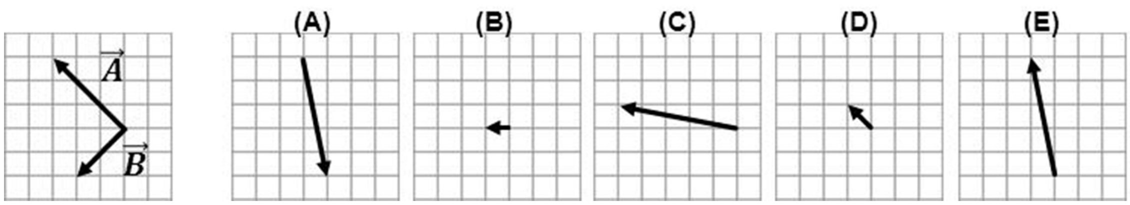
(B) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que “sale” de la hoja.

(C) La magnitud de un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ y la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$.

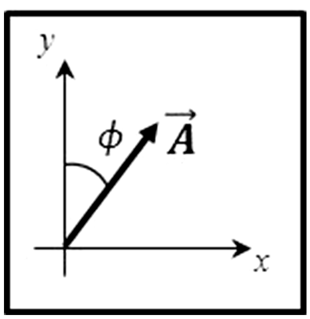
(D) Una cantidad con una dirección a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

(E) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que “entra” a la hoja.

13. En la figura se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{B}}$. Elija la opción que muestra el vector resta $\overrightarrow{\mathbf{A}} - \overrightarrow{\mathbf{B}}$.



14. Abajo se muestra el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ que forma un ángulo ϕ con respecto al eje vertical. $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la magnitud de la componente en x del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, es decir $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}|$?



(A) $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}| = |\overrightarrow{\mathbf{A}}|\ \tan\phi$

(B) $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}| = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{A}}|}{\cos\phi}$

(C) $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}| = |\overrightarrow{\mathbf{A}}|\text{sen}\phi$

(D) $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}| = |\overrightarrow{\mathbf{A}}|\cos\phi$

(E) $|\overrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{x}}| = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{A}}|}{\text{sen}\phi}$

15. Se tiene el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}} = 1\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ y el vector $\overrightarrow{\mathbf{B}} = 5\hat{\imath}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra el producto cruz ($\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$)?

(A) $-15\hat{k}$

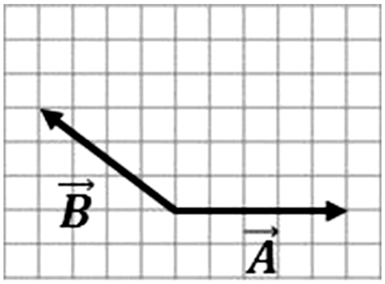
(B) $5\hat{\imath} + 15\hat{k}$

(C) $5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

(D) $15\hat{k}$

(E) $6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

16. En la figura de abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ que tienen la misma magnitud. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera con relación a la magnitud del vector suma de estos dos vectores?



(A) La magnitud del vector suma es mayor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y se demuestra por la aplicación directa del teorema de Pitágoras.

(B) La magnitud del vector suma es menor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, ya que si se realiza la operación gráfica de suma se constata que el vector suma es menor.

(C) La magnitud del vector suma es mayor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, porque la suma de dos vectores da siempre un vector resultante con magnitud mayor a la magnitud de los vectores que se suman.

(D) La magnitud del vector suma es igual que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y se demuestra por la aplicación directa del teorema de Pitágoras.

(E) La magnitud del vector suma es mayor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, porque la distancia entre las puntas de las flechas es mayor que la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

17. Considere el vector $\overrightarrow{\mathbf{A}} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la dirección de este vector medida a partir del eje x positivo?

(A) 126.87°

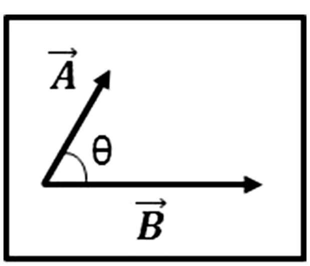
(B) 53.13°

(C) 143.13°

(D) 135°

(E) -53.13°

18. Abajo se muestran los vectores $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ que forman un ángulo θ. $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ y $|\overrightarrow{\mathbf{B}}|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{B}}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la magnitud del producto cruz ($\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$)?



(A) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\cos\theta|\overrightarrow{\mathbf{B}}|\text{sen}\,\theta$

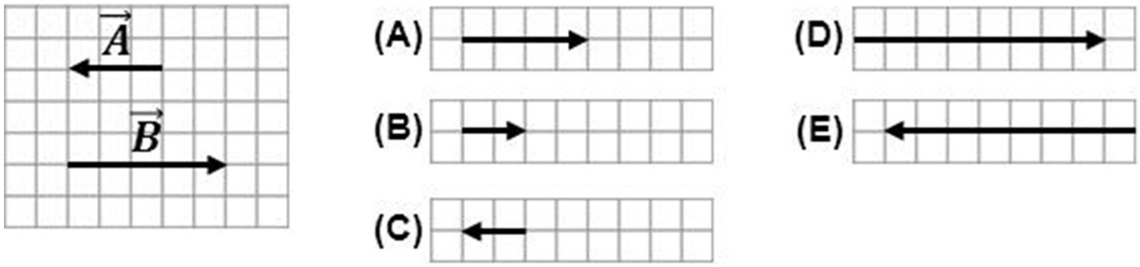
(B) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}||\overrightarrow{\mathbf{B}}|$

(C) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}||\overrightarrow{\mathbf{B}}|\,\text{sen}(90^\circ - \theta)$

(D) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}||\overrightarrow{\mathbf{B}}|\,\text{sen}\,\theta$

(E) $|\overrightarrow{\mathbf{A}}||\overrightarrow{\mathbf{B}}|\,\cos\theta$

19. En la figura se muestran los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Elija la opción que muestra el vector resta $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.



20. Considere el vector $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la magnitud de este vector?

(A) 2

(B) $\sqrt{8}$

(C) 4

(D) $\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath}$

(E) 8

1. P. Barniol y G. Zavala, *Testing Students' Understanding of Vector Concepts presented at the Physics Education Research Conference 2013*, (Portland, OR, 2013). http://www.compadre.org/Repository/document/ServeFile.cfm?ID=13098&DocID=3633
2. L. Ding, R. Chabay, B. Sherwood y R. Beichner, *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* **2** (2006) 010105-1.
3. E. Redish, *American Journal of Physics* **67**(1999) 562.
4. R. Beichner, *American Journal of Physics* **62** (1994) 750.
5. D. Hestenes, M. Wells y G. Swackhamer, *Physics Teachers* **30** (1992) 141.
6. L. Bao, K. Hosgg y D. Zollman, *American Journal of Physics* **70** (2002) 766.
7. R. Thornton y D. Sokoloff, *American Journal of Physics* **66** (1998) 338.
8. C. Singh y D. Rosengrant, *American Journal of Physics* **71** (2003) 607.
9. D. Maloney, T. O'Kuma, C. Hieggelke y A. Van Heuvelen, *American Journal of Physics* **69** (2001) S12.
10. R. D. Knight, *The Physics Teacher* **33** (1995) 74.
11. N. Nguyen y D. Meltzer, *American Journal of Physics* **71** (2003) 630.
12. S. Flores, S. E. Kanim y C. H. Kautz, *American Journal of Physics* **72** (2004) 460.
13. S. Flores-García, M. D. González-Quesada y A. Herrera-Chew, *Rev. Mex. Fis*. **53** (2007) 178.
14. J. Van Deventer y M. C. Wittmann, *AIP Conference Proceedings* **951** (2007) 208.
15. J. Van Deventer, *Comparing student performance on isomorphic and physics vector representations*. (Tesis de maestría no publicada, Universidad de Maine, Estados Unidos, 2008).
16. J. M. Hawkins, J. R. Thompson y M. C. Wittmann, *AIP Conference Proceedings* **1179** (2009) 161.
17. P. Barniol y G. Zavala, *AIP Conference Proceedings* **1179** (2009) 85.
18. J. M. Hawkins, J. R. Thompson, M. C. Wittmann, E. C. Sayre y B. W. Frank, *AIP Conference Proceedings* **1289** (2010) 165.
19. T. Wang y E. C. Sayre, *AIP Conference Proceedings* **1289** (2010) 329.
20. B. E. Hinrichs, *AIP Conference Proceedings* **1289** (2010) 173.
21. P. Barniol y G. Zavala, *AIP Conference Proceedings* **1289** (2010) 73.
22. G. Zavala y P. Barniol, *AIP Conference Proceedings* **1289** (2010) 341.
23. P. Barniol y G. Zavala, *AIP Conference Proceedings* **1413** (2012) 115.
24. G. Zavala y P. Barniol, *AIP Conference Proceedings* **1513** (2013) 438.
25. P. Barniol, G. Zavala y C. Hinojosa, *AIP Conference Proceedings* **1513** (2013) 58.
26. J. M. Aguirre, *Journal of Research in Science Teaching* **21** (1984) 439.
27. J. M. Aguirre y G. Rankin, *Physics Education* **24** (1989) 90.
28. P. S. Shaffer y L. C. McDermott, *American Journal of Physics* **73** (2005) 921.
29. S. Flores-García, L. L. Alfaro-Avena, O. Dena-Ornelas y M. D. González-Quesada, *Rev. Mex. Fis*. **54** (2008) 7.

30. S. Flores-García, S. M. Terrazas, M. D. Gonzalez-Quesada, J. L. Chávez Pierce y S. Escobedo Soto, *Rev. Mex. Fis*. **54** (2008) 133.
31. R. Lindell y L. Ding, *AIP Conference Proceedings* **1513** (2013) 27.
32. L. C. McDermott y E. F. Redish, *American Journal of Physics* **67** (1999) 755.
33. J. Benegas, *Latin American Journal of Physics Education* **1** (2007) 32.
34. T. Mäntylä y I. Koponen, *Science and Education* **16** (2007) 291.
35. D. E. Trowbridge y L. C. McDermott, *American Journal of Physics* **48** (1980) 1020.
36. L. C. McDermott y P. Shaffer, *American Journal of Physics* **60** (1999) 994.
37. R. A. Serway y J. W. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería* (Cengage Learning, México, 2008).
38. L. C. McDermott y P. Shaffer, *Tutoriales para física introductoria* (Pearson Education, Argentina, 2001).
39. A. Aron y E. Aron, *Estadística para psicología* (Pearson Education S.A., Argentina, 2001).
40. L. C. McDermott, *American Journal of Physics* **69** (2001) 1127.