Herramienta para la enseñanza de las ecuaciones de Lagrange basada en la simulación de sistemas dinámicos

D.A. Bravo M.
Ingeniero Físico, MsC. Profesor Departamento de Física. Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.
email: dibravo@unicauca.edu.co

C.F. Rengifo R.
Ingeniero Electricista, PhD. Profesor Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control. Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia,
email: caferen@unicauca.edu.co

Received 28 July 2014; accepted 21 November 2014

En este trabajo se propone una herramienta para la enseñanza de la mecánica clásica, modelando sistemas dinámicos con las ecuaciones de *Lagrange*, a partir de la simulación en Matlab ©. Este enfoque permite a los estudiantes de ingeniería y ciencias básicas, desarrollar competencias en programación, análisis numérico, con el uso de la física como herramienta fundamental para modelar y simular sistemas dinámicos complejos, como por ejemplo: robots industriales, robots bípedos y cualquier sistema mecánico con el propósito de analizar y estudiar sus propiedades cinemáticas y dinámicas.
Esta herramienta fue probada en el curso de Sistemas Dinámicos de la Universidad del Cauca, demostrando ser una herramienta de fácil y rápido aprendizaje por los estudiantes del programa de Ingeniería en Automática Industrial.

Descriptores: Enseñanza; ecuación de *Lagrange*; sistemas dinámicos; simulación.

In this paper we propose a tool for the teaching of classical mechanics, modeling dynamic systems with equations of *Lagrange*, from the simulation in Matlab®. This approach allows students to basic science and engineering, develop skills in programming, numerical analysis, with the use of physics as a fundamental tool for modeling and simulating complex dynamical systems, such as: industrial robots, biped robots and mechanical systems for the purpose of analyzing and studying their kinematic and dynamic properties.
This methodology was tested in the course of Dynamical Systems, University of Cauca, proving to be a quick and easy tool for students learning program in Industrial Automation Engineering.

Keywords: Teaching; *Lagrange* equation; dynamical systems; simulation.

PACS: 01.40.Fk; 01.40.Ha; 01.50.H-

1. Introducción

Los problemas actuales de las ciencias básicas y la ingeniería exigen una educación que permita a los futuros profesionales desarrollar habilidades en distintas disciplinas que incluyen la física, las matemáticas y la programación como herramientas fundamentales que permitirán abordar y generar soluciones a estos desafíos. Por lo tanto, los nuevos profesionales deben ser capaces no sólo de analizar los aspectos teóricos y técnicos de las soluciones, sino también de observar su relación con el contexto y otros campos profesionales. Los nuevos desafíos exigen que los profesionales desarrollen habilidades como: el autoaprendizaje para mantener la competitividad en un campo profesional en constante cambio, comunicación asertiva, toma de decisiones, conservación del medio ambiente, evaluar el impacto social de las soluciones y trabajar en equipo.

La reflexión de como mejorar la educación en ciencias e ingeniería siempre ha sido un tópico importante [1-3]. En [4], el autor discute sobre el proceso de formación de ingenieros en Colombia y propone desarrollar un ambiente de aprendizaje que promueva el desarrollo de competencias transversales para enfrentar el desánimo generalizado de los estudiantes de ingeniería por el aprendizaje de la física y las matemáticas durante los primeros semestres de formación, atribuida en parte, a la desarticulación entre la enseñanza de estas disciplinas con el propósito mismo de su formación profesional.

Dentro de este contexto, el curso de *sistemas dinámicos* se presenta como una excelente oportunidad para integrar las destrezas adquiridas por los estudiantes en materias como física, programación y matemáticas con el propósito de diseñar, modelar y simular sistemas dinámicos. Para lograr este objetivo, se desarrollo una herramienta software que permite modelar y simular sistemas mecánicos a partir de dos tipos de parámetros. Los primeros, denominados cinemáticos, definen las matrices de transformación entre los sistemas coordenados de referencia asociados a cada uno de los cuerpos que componen el sistema que se modela. Los otros parámetros son los dinámicos, que indican la masa, el momento de inercia y la posición del centro de gravedad de cada cuerpo.

El trabajo presentado en este artículo describe el uso de la herramienta con un caso de estudio (péndulo invertido de base móvil), el software desarrollado permite obtener las ecuaciones de movimiento, mediante el uso de cálculo simbólico sin la necesidad de escribir la energía cinética y potencial, para el cálculo de las ecuaciones de movimiento. Se muestra una metodología para la enseñanza del modelado de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de *Lagrange*.

La aplicación de esta herramienta en la enseñanza del modelado de sistemas mecánicos con las ecuaciones de *Lagrange*, y que se destacan por tener una gran abstracción matemática que algunas veces dificulta el aprendizaje de algunos estudiantes, demostró ser de gran ayuda en la comprensión de la dinámica de sistemas. Este documento está estructurado de la siguiente manera: la Sec. 2 describe la herramienta desarrollada para encontrar el modelo matemático de un sistema dinámico por medio de las ecuaciones de *Lagrange*, la Sec. 3 muestra un caso de estudio y el algoritmo implementado para la solución, seguido por los resultados en la Sec. 4 y concluyendo el artículo en la Sec. 5.

2. Descripción de la herramienta

La herramienta desarrollada permite modelar cadenas cinemáticas seriales y arborescentes en 2D. En las seriales, cada cuerpo tiene un único predecesor y un único sucesor. En las arborescentes cada cuerpo tiene un único predecesor pero puede tener múltiples sucesores, [5]. La herramienta no permite modelar cadenas cinemáticas cerradas, en estas un cuerpo puede tener múltiples predecesores.

Para utilizar la herramienta el usuario debe definir el sistema mecánico a modelar utilizando los parámetros cinemáticos y dinámicos explicados en la siguiente sección. Estos parámetros se ingresan a *Matlab* y este a su vez genera automáticamente un programa que es enviado a la herramienta de calculo simbólico *Maxima*, [6]. Dicha herramienta se ocupa de aplicar la ecuación de *Lagrange* y genera el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$A(q)\,\ddot{q} + H(q,\dot{q}) = \Gamma \tag{1}$$

Siendo $A(q)$ la matriz de inercia del sistema, $H(q,\dot{q})$ el vector de fuerzas centrifugas, de Coriolis y gravitacionales y Γ el vector de esfuerzos que actúan sobre el sistema. Si la coordenada generalizada q_i es un ángulo de rotación, como en el caso de una articulación rotoide, el componente i de Γ es el par que actúa sobre la articulación. Si la coordenada generalizada q_i es una distancia, el componente i de Γ es la fuerza exterior que actúa sobre la articulación.

Una vez *Maxima* ha calculado (1), las correspondientes expresiones simbólicas son enviadas a *Matlab* para convertirlas en funciones que pueden ser utilizadas por el usuario desde la herramienta *Simulink* para realizar una simulación de la dinámica del sistema.

2.1. Parámetros cinemáticos y dinámicos

A la herramienta desarrollada se le deben suministrar dos tipos de parámetros. Los primeros, denominados cinemáticos, definen las matrices de transformación entre los sistemas coordenados de referencia (en adelante denominados simplemente referentes) asociados a cada uno de los cuerpos que componen el sistema que se modela. Los otros parámetros son los dinámicos, que indican la masa, el momento de inercia y la posición del centro de gravedad de cada cuerpo.

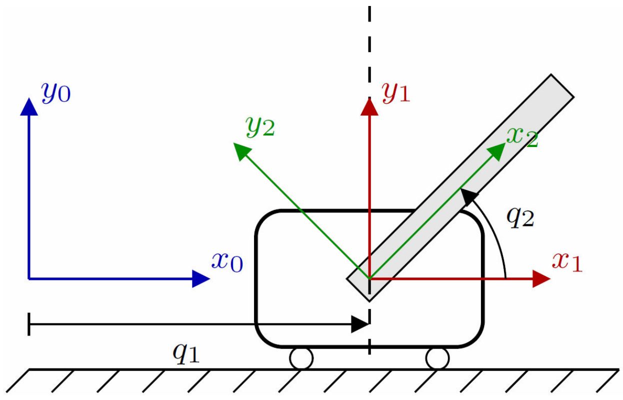

FIGURA 1. Péndulo de base móvil.

Antes de ingresar los parámetros cinemáticos y dinámicos se debe asignar un referente a cada uno de los cuerpos que componen la cadena cinemática objeto de estudio. Se recalca que las cadenas cinemáticas deben ser seriales o arborescentes y el antecedente de un cuerpo i, denotado como $p(i)$, es único. Para la asignación de los referentes deben tenerse presente las siguientes reglas: (i) Los ejes x y y deben estar en el plano de la pagina y el eje z será siempre perpendicular a esta. (ii) el referente inercial o Galileano se considera asociado al cuerpo cero. (iii) Si la articulación que une el cuerpo i al cuerpo $p(i)$ es prismática, entonces el eje x del referente $p(i)$ debe seguir la dirección de desplazamiento de dicha articulación. (iv) Si la articulación que une el cuerpo i al cuerpo $p(i)$ es rotoide entonces los origenes de los referentes $p(i)$ e i deben coincidir con el eje de rotación de la articulación.

En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de asignación de referentes para un sistema compuesto de dos articulaciones. La primera variable articular, denotada q_1, indica el desplazamiento del carro con respecto al origen del referente inercial. La segunda, denotada q_2, el ángulo que forma la barra del péndulo con respecto a la horizontal (eje x del referente 1).

Para ilustrar los parámetros cinemáticos y dinámicos que requiere la aplicación para generar el modelo dinámico, se utilizará como ejemplo el sistema presentado en la Fig. 1.

Los parámetros cinemáticos requeridos son:

- *Numeración de las articulaciones:* Este vector contiene una lista de caracteres con los nombres de cada una de las articulaciones. En el caso del presente ejemplo dicho vector corresponde a `Articulacion = ['1';'2'];`, indicando que el sistema contiene dos articulaciones denominadas 1 y 2. Las comillas simples indican a *Matlab* que el vector `Articulacion` contiene caracteres y no números.

- *Encadenamiento de los cuerpos:* Este vector contiene una lista de caracteres que indican el orden de precedencia entre los cuerpos. En el presente ejemplo se tiene `Precedente` = ['0';'1'];+. Esto indica que el cuerpo 2 esta precedido del cuerpo 1 y que el cuerpo 1 esta precedido del cuerpo 0 ó referente inmóvil.

- *Tipo de articulación:* El componente i de este vector indica si la articulación que conecta el cuerpo i con su predecesor $p(i)$ es prismática `'P'` (un grado de libertad), rotoide `'R'` (un grado de libertad) o si no existe conexión entre los cuerpos `'F'` (tres grados de libertad). En el caso del sistema de la Fig. 1, dicho vector corresponde a `Tipo` = ['P';'R']+. Indicando que el cuerpo 1 esta unido al cuerpo 0 a través de una articulación prismática y el cuerpo 2 esta unido al 1 a través de una articulación rotoide.

- *Ángulos de rotación:* El componente i de este vector contiene el ángulo que debe rotar el eje x del referente $p(i)$ para quedar paralelo al eje x del referente i. En el presente caso los referentes 0 y 1 están alineados y por lo tanto el ángulo de rotación es cero. El ángulo entre los referentes 1 y 2 es variable dado que la articulación es rotoide. En tal caso el valor a incluir en el vector de ángulos es `NaN` (de sus siglas en inglés *Not a Number*). De acuerdo con lo anterior se tiene `Angulos = [0; NaN]`.

- *Desplazamiento en el eje x:* El componente i de este vector es el desplazamiento del origen del referente i con respecto al origen del referente $p(i)$ según la dirección del eje x de $p(i)$. En el sistema objeto de estudio, el desplazamiento del origen del referente 1 con respecto al referente 0 según x_0 es variable debido a que la articulación que los une es prismática. En tal caso el valor a incluir en el vector de desplazamiento en x es `NaN`. El desplazamiento del origen del referente 2 con respecto al origen del referente 1 según x_1 es cero. Así, el vector de desplazamientos en x es `DesplazamientoX = [NaN; 0]`.

- *Desplazamiento en el eje y:* El componente i de este vector es el desplazamiento del origen del referente i con respecto al origen del referente $p(i)$ según la dirección del eje y de $p(i)$. En el sistema objeto de estudio, el desplazamiento del origen del referente 1 con respecto al referente 0 según y_0 es cero. El desplazamiento del origen del referente 2 con respecto al origen del referente 1 según y_1 es la constante r de la Fig. 1.

Los parámetros cinemáticos del sistema presentado en la Fig. 1 se resumen en la Tabla I.

En el encabezado de la Tabla I, i denota el cuerpo, $p(i)$ el precedente del cuerpo i, σ_i el tipo de articulación que une el cuerpo i con su precedente $p(i)$ (componente i del vector *Tipo*), α_i el ángulo de rotación entre los referentes i y $p(i)$ (componente i del vector *Angulo*), $\mathrm{d}x_i$ el desplazamiento entre los orígenes de los referentes i y $p(i)$ según el eje x de $p(i)$ (componente i del vector *Desplazamiento X*), $\mathrm{d}y_i$ el desplazamiento entre los orígenes de los referentes i y $p(i)$ según el eje y de $p(i)$ (componente i del vector *Desplazamiento Y*).

TABLA I. Parámetros cinemáticos del sistema descrito en la Fig. 1.

i	$p(i)$	σ_i	α_i	$\mathrm{d}x_i$	$\mathrm{d}y_i$
1	0	P	0	NaN	0
2	1	R	NaN	0	0

TABLA II. Parámetros dinámicos del sistema descrito en la Fig. 1.

Articulación	Masa	Inercia	C. Gravedad X	C. Gravedad Y
1	m_1	I_1	0	0
2	m_2	I_2	αL	0

Los parámetros dinámicos del cuerpo i son: su masa, su momento de inercia con respecto al eje z del referente i y las coordenadas de su centro de gravedad con respecto a los x y y del referente i. Dichos parámetros se resumen en la Tabla II.

3. Funcionamiento de la herramienta

Para generar el sistema de ecuaciones diferenciales que rige el comportamiento de un sistema mecánico [7], *Matlab* genera un programa en *Maxima* que implementa la secuencia de pasos descrita a continuación.

1. Con base en los parámetros cinemáticos se determinan las matrices de transformación entre los diferentes sistemas coordenados. Si la articulación es prismática, el valor `NaN` del parámetro $\mathrm{d}x_i$ se reemplaza por la coordenada generalizada q_i

$$^{\mathrm{p(i)}}\mathbf{T}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & q_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \mathrm{d}y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la articulación es rotoide el valor `NaN` del parámetro α_i se reemplaza por la coordenada generalizada q_i

$$^{\mathrm{p(i)}}\mathbf{T}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & \mathrm{d}x_i \\ \sin q_i & \cos q_i & \mathrm{d}y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Las matrices obtenidas en el paso anterior se combinan para obtener las matrices de transformación que conectan el referente i con el referente 0.

$$^{0}\mathbf{T}_{\mathrm{i}} = {}^{0}\mathbf{T}_{1} \times {}^{1}\mathbf{T}_{2} \ldots {}^{\mathrm{i-2}}\mathbf{T}_{\mathrm{i-1}} \times {}^{\mathrm{i-1}}\mathbf{T}_{\mathrm{i}}, \quad i = 2 \ldots n$$

3. A partir de la tabla de parámetros dinámicos se conforman los vectores con las posiciones de los centros de gravedad de cada uno de los cuerpos.

$$^{\mathrm{i}}Cg_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix}$$

$^{\mathrm{i}}Cg_{\mathrm{i}}$ denota la posición del centro de gravedad del cuerpo i en el referente i.

4. Con base en las matrices de transformación $^0\mathbf{T}_{\mathrm{i}}$ se expresan los centros de gravedad $^{\mathrm{i}}Cg_{\mathrm{i}}$ en el referente cero:

$$\begin{bmatrix} ^0Cg_{\mathrm{i}} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_{\mathrm{i}} \cdot \begin{bmatrix} ^{\mathrm{i}}Cg_{\mathrm{i}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Con base en las matrices de transformación $^0\mathbf{T}_{\mathrm{i}}$ se determinan las rotaciones totales de cada uno de los cuerpos con respecto al referente 0. Para ello basta calcular el coseno inverso del elemento $(1, 1)$ de la matriz $^0\mathbf{T}_{\mathrm{i}}$.

$$\beta_i = \arccos {}^0\mathbf{T}_{\mathrm{i}}(1, 1)$$

6. Se derivan con respecto al tiempo las posiciones absolutas de los centros de gravedad con el fin de obtener las velocidades lineales de los centros de gravedad con respecto al referente 0.

$$^0V_{\mathrm{i}} = {}^0\dot{C}g_{\mathrm{i}}$$

7. Se derivan con respecto al tiempo las rotaciones totales con el fin de obtener las velocidades angulares con respecto al referente 0.

$$\omega_i = \dot{\beta}_1$$

8. Se calcula la energía cinética total del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \left|{}^0V_{\mathrm{i}}\right|^2 + \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega_i^2$$

9. Se calcula la energía potencial total del sistema:

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot g \cdot \vec{u}^T \cdot {}^0Cg_{\mathrm{i}}$$

Siendo $\vec{u}$ un vector unitario que expresa la dirección de la fuerza de gravedad en el referente 0. Si la gravedad actúa en la dirección de x_0, entonces $\vec{u} = [1, 0]^T$, si es en la dirección de y_0 entonces $\vec{u} = [0, 1]^T$.

10. Se reemplaza $L = T - U$ en la ecuaciones de *Lagrange*, [8].

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = e(t)$$

La herramienta *Maxima* se encarga de realizar las derivadas parciales y las derivadas con respecto al tiempo.

4. Resultados

En la primera versión de la aplicación desarrollada no se utilizó *Maxima* sino la librería de calculo simbólico de *Matlab*. Esta, a pesar de tener todas las funciones necesarias para resolver las ecuaciones de *Lagrange*, tomaba demasiado tiempo en generar el modelo matemático del sistema. Adicionalmente, las deficiencias en los algoritmos simplificación simbólica conllevaba a que las expresiones del modelo resul-

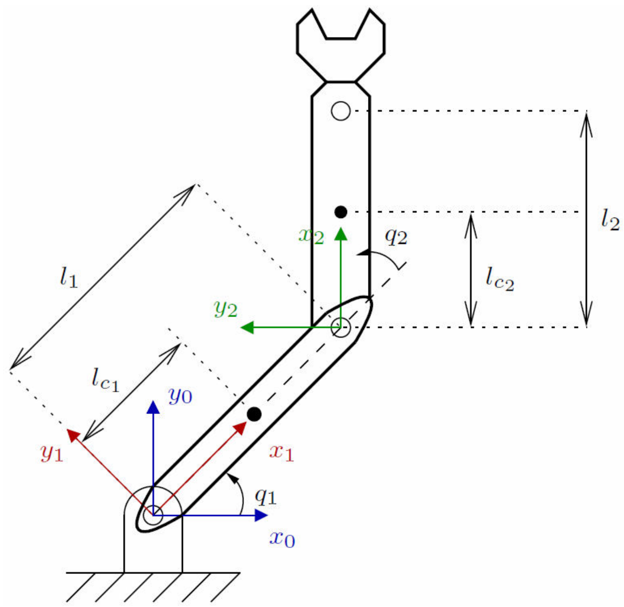

FIGURA 2. Robot SCARA de dos grados de libertad.

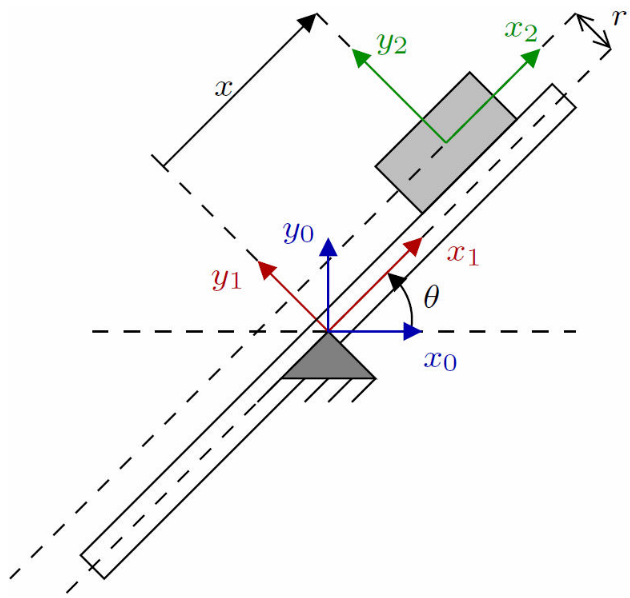

FIGURA 3. Masa que se desplaza sobre un riel de inclinación variables.

tante fueran enormemente costosas de evaluar en el sentido computacional, [9].

Para presentar a los estudiantes la aplicación de las ecuaciones de *Lagrange* al modelado de sistemas dinámicos, se elaboró una guía donde después de una breve introducción teórica, se aplica, a manera de ejemplo, la secuencia de pasos descrita en la sección anterior al modelado de los sistemas presentados en las Figs. 1 y 2. Posteriormente se propone que modelen el sistema de la Fig. 3 y que verifiquen con la herramienta desarrollada los resultados obtenidos mediante cálculos manuales. Finalmente los estudiantes deben utilizar la herramienta para modelar un péndulo de 5 cuerpos. El objetivo, de este ultimo ejercicio es que los estudiantes observen como aumenta la complejidad del modelo a medida que se adicionan cuerpos al sistema.

5. Conclusiones y perspectivas

En la Tabla III se presenta una lista de herramientas software que permiten simular el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos. Algunas de ellas como *ODE* o *Bullet* son librerías que el usuario integra desde un programa escrito en C o C++. *Physion* o *Box2D* son entornos de simulación 2D orientados a la enseñanza de la física. Otras herramientas como *Webots*, *VRep*, *Morse* o *Gazebo* son complejos entornos gráficos para simulación de robots. La característica común de las herramientas anteriormente mencionadas es que no entregan las ecuaciones de la cadena cinemática que se modela. Surge entonces el interrogante: ¿En que situaciones se requiere conocer explicitamente estas ecuaciones?.

En el caso de la formación de ingenieros en Automática, estas ecuaciones son insumo indispensable para el diseño de sistemas de control realimentado. Dichos sistemas, denominados simplemente controladores, son funciones que permiten calcular el vector Γ de la Ec. (1) en función de q y $\dot{q}$ con el fin de que el sistema resultante tenga unas propiedades deseadas. Como por ejemplo, que las articulaciones de un robot realicen un movimiento deseado.

TABLA III. Herramientas software para simulación de sistemas mecánicos.

ODE	`www.ode.org`
Bullet	`bulletphysics.org`
Physics	`developer.nvidia.com`
Physion	`physion.net`
Box2D	`box2d.org`
Webots	`www.cyberbotics.com`
VRep	`www.coppeliarobotics.com`
Morse	`www.openrobots.org/wiki/morse`
Gazebo	`gazebosim.org`

En perspectiva se tiene implementar una interfaz gráfica que permita al usuario introducir los parámetros cinemáticos y dinámicos del sistema a modelar. Adicionalmente se están estudiando algoritmos para permitir el modelado de cadenas cinemáticas cerradas.

Agradecimientos

Los autores de este artículo expresan sus mas sinceros agradecimientos a la Universidad del Cauca por todo el apoyo que les fue dado en la realización del proyecto.

1. J. M. Molina, "*Modelado de sistemas dinámicos y educación en ciencias e ingeniería*", *in Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education*, **2** (2007) 75-82.
2. L. Fernández-Samacá, J. M. Ramírez, and M. L. Orozco-Gutierrez, "*Project-based learning approach for control system courses*", Sba: Controle & Automa$\tilde{a}$s$\tilde{a}\phi$. *Sociedade Brasileira de Automatica* **23** (2012) 94-107.
3. D. D. Guevara and F. C. Vitery, "*Modelar, simular e implementar circuitos no lineales: una alternativa para la enseñanza de sistemas dinámicos*" *Revista Educación en Ingeniería*, **6** 11 (2011).
4. M. Corchuelo, "*Una aproximación a los procesos de formación de ingenieros*", *Revista Electrónica de la Red de Investigación Educativa*, **1** (2004) 1-22.
5. W. Khalil and E. Dombre, Modeling, *Identification and Control of Robots*, 2nd ed., ser. Kogan Page Science. (Paris, France: Butterworth - Heinemann, 2004).
6. J. E. Villate, *Introducción a los Sistemas Dinámicos: un enfoque práctico con Maxima*, (2007).
7. L. Landau and E. Lifshitz, *Mecánica, ser. Curso de Física Teórica*. Reverté, (1978), no. v. 1.
8. D. Wells, *Schaum's Outline of Lagrangian Dynamics, ser. Schaum's Outline Series* (McGraw-Hill Education, 1967).
9. K. Velten, *Mathematical Modeling and Simulation*. (Wiley, 2009).