Obtención y solución a la ecuación de movimiento de un cohete, actuando sobre él las fuerzas externas del campo gravitacional constante y el rozamiento del aire proporcional a la velocidad

A.V. Kraff[a], G.S. Vázquez[a], R.R. Mijangos[b] y J.A. Heredia-Cancino[b]
[a]*Departamento de Matemáticas e Ingeniería, Instituto Tecnológico de Sonora,*
5 de Febrero 818 Sur Col. Centro, 85000, Cd. Obregón, Sonora, México.
e-mail: abrahamr.velazquezk@correoa.uson.mx; selene.vazquez.gr@gmail.com;
[b]*Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora,*
Apartado Postal 5-88,83190, Hermosillo, Sonora, México.
e-mail: mijangos@cifus.uson.mx; jahc_88@hotmail.com

Received 26 May 2014; accepted 13 January 2015

Estudiaremos los sistemas de masa variable para el caso particular del problema del cohete, donde se pretende encontrar la ecuación que rige su movimiento y posteriormente resolverla bajo las condiciones del campo gravitacional homogéneo y la resistencia del aire, para poder conocer las cantidades físicas como lo son la velocidad y la posición en todo momento. Además de encontrar la solución del cohete para el caso en el que sólo actúa la fuerza gravitacional sobre él pudiendo observar la diferencia entre ambas soluciones. La solución encontrada en este trabajo para este problema no se encuentra en la bibliografía, de manera que este trabajo pretende deslumbrar la solución del enigmático problema del cohete.

Descriptores: Sistema de masa variable; conservación del momento.

In this work will be studied the variable mass system for the particular case of rocket problem, with intend obtain the equation that govern its movement and solve after under homogeneous gravitational field conditions and air resistance, know to allow the physics quantities, like velocity and position in all time. Furthermore get the rocket solution for the case that only acts the gravitational force on it, that allows to observe the difference between both solution. The found solution in this paper for this problem doesn't appear in the literature, such that this work purport dazzle the enigmatic solution of rocket problem.

Keywords: Variable mass system; conservation of momentum.

PACS: 45.20.D-; 45.20.d

1. Introducción

Este trabajo se centra principalmente en obtener y resolver la ecuación de movimiento de un cohete considerando las fuerzas externas que actúan sobre él (la solución obtenida será la dependiente del tiempo), fundamentalmente las del campo gravitacional homogéneo y la fuerza de rozamiento con el aire proporcional a la velocidad, además cabe recalcar que este estudio es basado en el marco de los límites cuando el cohete aun no ha tomado una gran altura y conserva velocidades relativamente bajas comparadas con las velocidades que puede llegar a alcanzar (bajos números de Reynolds Re < 1) [5], así como una breve introducción a los sistemas de masa variable [2]; este problema de interés general en el campo de la astronáutica ha sido estudiado a lo largo de los años por algunos científicos como por ejemplo el trabajo de K. E. Tsiolkovski publicado en mayo de 1903 en la "revista científica" [4], en donde obtiene la ecuación de movimiento y la solución para el caso de las fuerzas externas nulas, o el artículo de Martin S. Tiersten publicado en American Journal of Physics en enero de 1969 [1]. También hemos tomado como referencias algunos libros como "Física" Vol. 1 de Robert Resnick [2] o "curso breve de mecánica teórica" de S. Targ [4].

La importancia de este estudio es fundamental para nosotros ya que todos los sistemas de comunicación hoy en día se basan en poner a los satélites en órbita y la exploración de otros mundos para investigación científica, así que en este trabajo nos encargamos de explicar de manera muy didáctica como se obtienen algunas cantidades físicas como lo son la velocidad y posición en todo instante de tiempo como también comparar los casos cuando interviene o no la fuerza de fricción del aire.

2. Deducción de la ecuación de movimiento

Para estos sistemas tenemos que partir de la forma más general posible de la segunda ley de newton, permitiendo que actué una fuerza externa $\vec{F}_{\text{ext}}$ en el sistema. Esta fuerza no es la fuerza que impulsa al cohete (la cual es una fuerza interna para el sistema s'), si no es más bien la fuerza producida de algún agente externo al sistema, que pueden ser la fuerza de gravedad que ejerce la tierra o el rozamiento con el aire. El momento total del sistema s' (como se observa en la Fig. 1) es $\vec{P}$, entonces la segunda ley puede expresarse como:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}. \tag{1}$$

En el intervalo de tiempo Δt, el cambio del momento, $\Delta \vec{P}$ es:

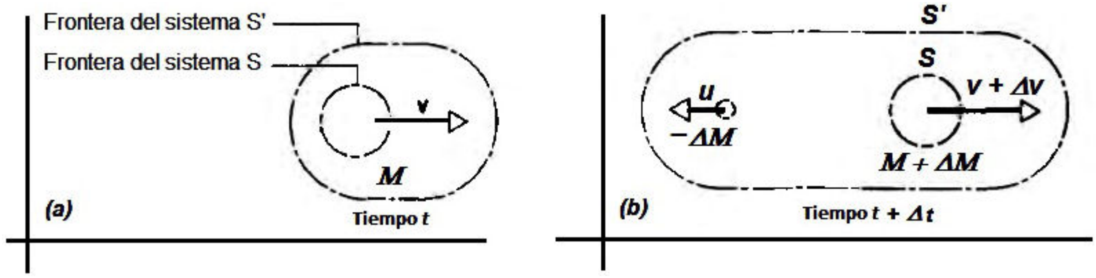

FIGURA 1. (a) Un sistema s' en el instante de tiempo t tiene una masa M que se mueve a velocidad v. (b) En un instante de tiempo posterior Δt, la masa que originalmente había M ha arrojado cierta cantidad de masa $-\Delta M$. La masa restante $M+\Delta M$, la cual llamamos subsistema s, se mueve ahora con una velocidad $v+\Delta v$ [2].

$$\Delta\vec{P} = \vec{p}_f - \vec{p}_i. \tag{2}$$

Donde $\vec{p}_f$ es el momento final del sistema s', en el instante de tiempo $t+\Delta t$, y $\vec{p}_i$ el momento inicial de s' en el instante de tiempo t, y sus expresiones son entonces respectivamente:

$$\vec{p}_i = M\vec{v} \tag{3a}$$

$$\vec{p}_f = (M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u}. \tag{3b}$$

De manera que el cambio del momento es:

$$\Delta\vec{P} = (M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u} - M\vec{v}. \tag{3c}$$

Sustituyendo la expresión (3c) del cambio del momento en la Ec. (1), obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \vec{v}\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\vec{v}\frac{\Delta M}{\Delta t} - \vec{u}\frac{\Delta M}{\Delta t}\right]. \tag{4}$$

Haciendo un poco de algebra y aplicando los límites a la expresión (4) se obtiene:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dM}{dt}. \tag{5a}$$

Hay que notar que el tercer término de la expresión (4) no aparece en la Ec. (5a), debido a que es un término infinitesimal de segundo orden y es despreciado, podemos identificar que el primer término $d\vec{v}/dt$ es la aceleración del sistema S' cuando empieza a perder masa a una velocidad $\vec{u}$ a una cantidad $|dM/dt|$ [2].

Para ver si en verdad la Ec. (5a) es la más general de la segunda ley de Newton, basta con identificar algunos términos y ponerlos como la derivada de el producto de las funciones de v y M. Para así obtener:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}) - \vec{u}\frac{dM}{dt}. \tag{5b}$$

Podemos notar que tanto $\vec{u}=0$, o $M=$ cte, se obtiene la Ec. (1), de tal manera que la Ec. (5b) es más general que la Ec. (1).

Ahora volvamos al problema de un cohete, de manera que su ecuación de movimiento estará gobernada por la Ec. (5a), en donde el término $(\vec{v}-\vec{u})$ es una velocidad relativa de los gases expulsados con relación al cohete. Así que podemos escribir la Ec. (5a) como:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\frac{dv}{dt} + \vec{u}_r\frac{dM}{dt}. \tag{5c}$$

Y el problema se reduce ahora a resolver la Ec. (5c) introduciendo las fuerzas que se ejercen sobre el cohete [2].

3. Solución a la ecuación de movimiento

Supongamos que el cohete está en presencia del campo gravitacional constante de la tierra y que su movimiento se restringe sólo a la dirección $\hat{\jmath}$, de tal manera que la expresión (5c) nos queda como:

$$-Mg = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_r\frac{dM}{dt} \tag{5d}$$

Dividiendo la Ec. (5d) por M y despejando $d\vec{v}/dt$ tenemos que:

$$\frac{dv}{dt} = -v_r\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} - g. \tag{5e}$$

De manera que integrando respecto al tiempo la Ec. (5e) para poder conocer la velocidad en cualquier instante de tiempo tenemos que introducir las condiciones iniciales del problema. En el instante de tiempo $t=0$, $M=m_0$ y $v=v_0$, para obtener:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dv}{dt'}dt = -v_r\int_{t_0}^{t}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt'}dt' - g\int_{t_0}^{t}dt'\,.$$

De manera que nos queda:

$$v(t) = v_o - gt - v_r\ln\left|1-\frac{D}{m_0}t\right|. \tag{6a}$$

De manera que ya conseguimos la velocidad del cohete para cualquier instante de tiempo habiendo hecho $M=m_0-Dt$, donde $D=-dM/dt$ es la velocidad con que se quema el combustible del cohete y es por lo general constante. Nos queda por saber cómo cambia su posición en el tiempo, note que si la masa M no cambia en el tiempo el segundo termino se hace cero y obtenemos una de las ecuaciones de cinemática para una partícula en caída libre expuesta al campo gravitacional constante [2-5]. Para obtener la posición usamos:

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{6b}$$

Así que sustituyendo lo anterior en la Ec. (6a) e integramos respecto el tiempo obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{dt'} dt' = v_0 \int_{t_0}^{t} dt' - v_r \frac{1}{D} \int_{t_0}^{t} \ln \left| \frac{M}{m_0} \right| dM - g \int_{t_0}^{t} t dt' .$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + (v_0 + v_r)t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &\quad + v_r \frac{m_0 - Dt}{D} \ln \left| 1 - \frac{D}{m_0} t \right| . \end{aligned} \tag{7}$$

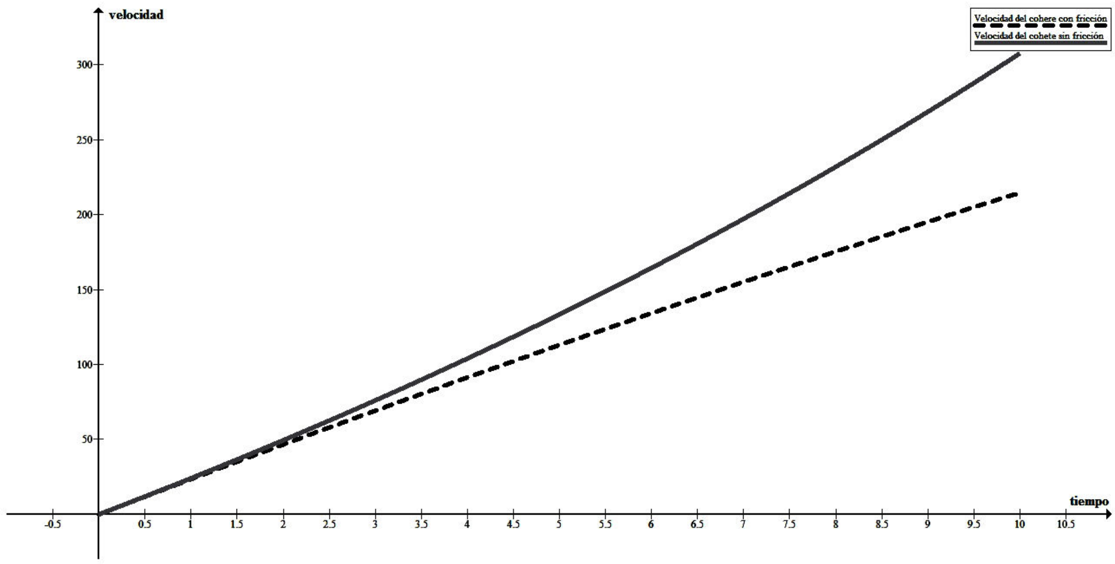

FIGURA 2. Grafica de las velocidades del cohete con fricción y sin fricción en función del tiempo. La curva de la línea punteada es la velocidad del cohete considerando la fuerza de fricción proporcional a la velocidad, mientras que la curva con la línea continua es la velocidad del cohete sin considerar la fuerza de fricción.

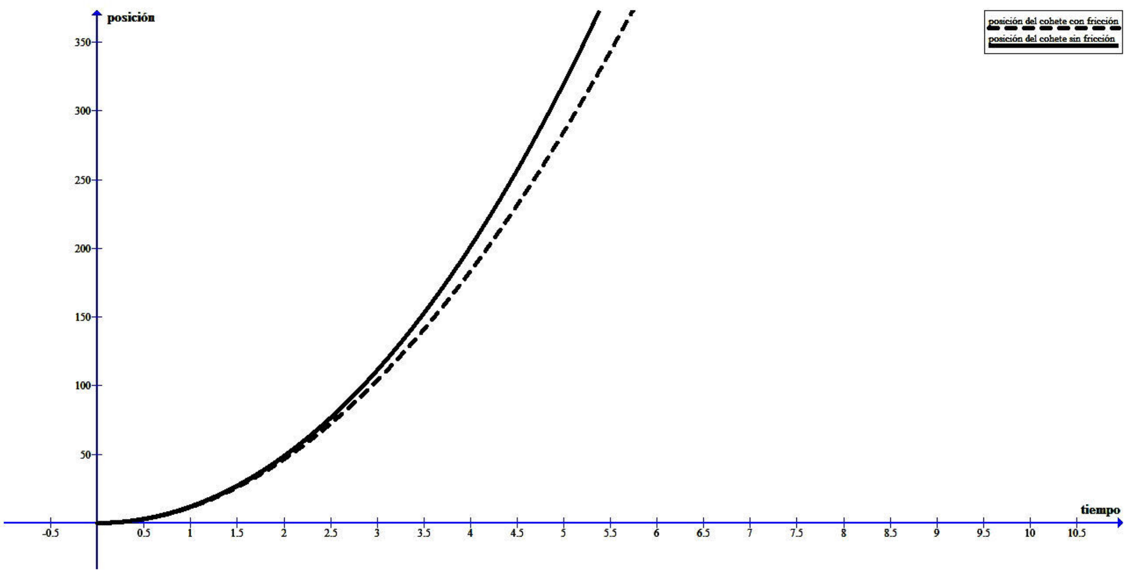

FIGURA 3. Grafica de las posiciones del cohete con fricción y sin fricción en función del tiempo. La curva de la línea punteada es la posición del cohete considerando la fuerza de fricción proporcional a la velocidad, mientras que la curva con la línea continua es la posición del cohete sin considerar la fuerza de fricción.

Así hemos encontrado la posición del cohete para todo instante de tiempo de su trayectoria. Podemos observar también que si $M = m_0$, entonces obtenemos una de las ecuaciones de cinemática para la posición de una partícula en caída libre que es lo que sucede una vez que el cohete quema todo su combustible [2-5].

Ahora introduciendo en la Ec. (5c) la fuerza de rozamiento del aire proporcional a la velocidad, ya que este estudio es para velocidades y alturas bajas del cohete, es decir, para instantes de tiempo no muy largos, y la fuerza del campo gravitación constante en la dirección $\hat{\jmath}$. Obtenemos:

$$-bv - Mg = M\frac{dv}{dt} + v_r\frac{dM}{dt} \tag{8}$$

Reacomodando la Ec. (8) de la forma:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{M}v = -\frac{v_r}{M}\frac{dM}{dt} - g$$

Toma la forma de una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución es:

$$\begin{aligned} v(t) =\ & v_r\left[1 - m_0^{-\frac{b}{D}}(m_0 - Dt)^{\frac{b}{D}}\right] \\ & + \frac{g}{D-b}\left[(m_0 - Dt) - m_0^{1-\frac{b}{D}}(m_0 - Dt)^{\frac{b}{D}}\right] \\ & + v_0 m_0^{-\frac{b}{D}}(m_0 - Dt)^{\frac{b}{D}} \end{aligned} \tag{9}$$

De manera que hemos obtenido la velocidad del cohete para todo instante de tiempo t [5]. Así que si sustituimos $v = dy/dt$ en la Ec. (9) para determinar la posición del cohete en la dirección $\hat{\jmath}$ nos queda como:

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{D}{b}v_r t + & \left[\frac{v_r\left(\frac{D^2}{b} - D\right) - v_0(D-b) + gm_0}{D^2 - b^2}\right] \\ \times & \left[(m_0 - Dt)^{1+\frac{b}{D}} m_0^{-\frac{b}{D}} - m_0\right] \\ & - \frac{g}{2(D-b)D}\left[(m_0 - Dt)^2 - m_0^2\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Así hemos hallado la posición en la dirección $\hat{\jmath}$ para todo instante de tiempo t [5].

De tal manera que tenemos completo nuestro problema físico del cohete bajo las condiciones que establecimos de las fuerzas externas que actúan sobre él, donde podemos notar que tanto la velocidad como la posición del cohete son matemáticamente diferentes al caso de la fuerza externa del campo gravitacional. Si introducimos ciertos valores para calcular las cantidades físicas obtenidas de velocidad y posición de las ecuaciones (6), (7), (9) y (10) respectivamente obtenemos que la velocidad del cohete considerando la resistencia del aire es de $v = 212.44$ m/s mientras que la posición es de $y = 1100$ m suponiendo que el cohete parte del reposo, ahora bien, para el caso en donde no consideramos la fuerza de fricción del aire obtenemos que la velocidad es de $v = 307$ m/s mientras que para la posición es de $y = 1400$ m. Se puede ver que sí existe un notorio cambio en la velocidad y la posición cuando no se considera la resistencia del aire de tal forma que los resultados obtenidos son de importancia para la práctica de estudio de este problema. Los valores que se introdujeron para calcular lo anterior fueron:

- $m_0 = 3$ kg (2 *de carga util y 1 de combustible*).
- $v_r = 1000$ m/s, *velocidad de salida de los gases expulsados, respecto del cohete*.
- $D = 0.1$ kg/s, *razón con la que es quemado es combustible en el tiempo*.
- $b = 0.2$ kg/s, *coeficiente de rozamiento del aire*.
- $g = 9.8$ m/s^2, *aceleración de la gravedad a nivel del mar*.

Los siguientes resultados fueron obtenidos con el graficador Graph. Son las graficas de velocidad contra tiempo, posición contra tiempo, respectivamente, para poder comparar los resultados obtenidos tanto analíticamente como cuantitativamente.

4. Conclusión

Se logró obtener y resolver las ecuaciones de movimiento que rigen al cohete, ya que este problema no es del todo sencillo en muchos de los trabajos que pudimos ver no lo abordan con las fuerzas externas con las que se trabajó en este artículo, además que algunas soluciones son aproximadas, si comparamos las dos soluciones que obtuvimos del problema del cohete con fricción y sin ella, podemos notar que ambas ecuaciones llevan logaritmos, esto hace una similitud en ambas soluciones puesto que este factor logarítmico es típico del movimiento de sistemas de masa variable. Cabe recordar que si se comparan las ecuaciones para la velocidad y posición en los dos problemas resueltos en este trabajo se verá que hay un cambio muy grande en la forma de las soluciones, entonces se cree que este trabajo puede ser de importancia.

Cabe recalcar que aun en este trabajo realizado hace falta agregar más condiciones a las que el cohete en la realidad está expuesto, pero creemos que éste es un buen inicio al problema. Terminamos agregando que cuando se agota el combustible del cohete la velocidad termina siendo igual a la velocidad inicial y la posición termina siendo igual a una posición inicial, y esto tiene coherencia ya que en los estudios que hizo K.E. Tsiolkovski [4], introdujo la idea de que el cohete debería de componerse de varios contenedores de combustible y así una vez que se agote el combustible en un contenedor el problema se reinicia con una velocidad y posición iniciales respectivamente.

1. M.S. Tiersten, *American Journal of Physics* **37** (1969) 82.
2. R. Resnick, D. halliday y K.S. Krane, *Física*, 5a. Ed., Vol. 1 (CECSA, México 2005), pp. 149-151.
3. F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young y R.A. Roger, *Física universitaria*, Décimo primera Ed. Vol. 1 (Pearson Educación, México, 2004), pp. 311-313.
4. S.M. Targ, *Curso breve de mecánica teórica*, primera Ed. (Editorial Mir 1976), pp. 377-381.
5. H. Rodrigues, M.O. de Pinho, D. Portes Jr, and A. Santiago, *Eur. J. Phys.* **30** (2009) 185-190.