

Obteniendo los coeficientes de restitución y arrastre en un solo experimento

O.D. Pavioni and F.M. Ortega
Facultad de Ingeniería U.N.C.P.B.A.
Av. Del Valle 5737 - B7400JWL - Olavarría, Buenos Aires, Argentina,
e-mail: opavioni@fio.unicen.edu.ar

Received 27 October 2014; accepted 16 January 2015

En el presente trabajo se muestra una forma sencilla y novedosa de obtener el coeficiente de restitución correspondiente al choque entre una pelota y el piso, en la cual se obtiene, además, el coeficiente de arrastre característico de una superficie esférica.

Descriptores: Coeficiente de restitución; coeficiente de arrastre; número de Reynolds.

In this paper is shown a simple and novel way of finding the coefficient of restitution for the collision between a ball and the floor, where also the drag coefficient of a spherical shape is obtained.

Keywords: Coefficient of restitution; drag coefficient; Reynolds number.

PACS: 01.50.Pa; 01.50.Wg; 45.50.Tn; 47.27.Ak.

1. Introducción

En el estudio de la dinámica de los cuerpos que colisionan, un caso atractivo para los estudiantes es el que puede realizarse con una pelota brincadora. La experiencia consiste en dejar caer un cuerpo esférico desde una cierta altura de manera tal que al colisionar con el piso rebote, moviéndose luego verticalmente hacia arriba. Abandonada a sí misma la pelota continúa subiendo y bajando tras sucesivas colisiones. En cada colisión la pelota pierde parte de su energía, manifestándose este hecho en la disminución de la altura que alcanza cada vez. Esta disminución puede caracterizarse por el valor del coeficiente de restitución r definido como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación [1], que para el caso de una colisión normal de un cuerpo contra el suelo, considerado este en reposo, se reduce a la relación (1).

$$r = \frac{v'}{v}. \quad (1)$$

En la Ec. (1), v es el módulo de la velocidad de la pelota justo antes del choque contra el piso y v' el módulo de la velocidad inmediatamente después, como se representa en la Fig. 1.

Experimentalmente, es posible registrar la posición de la pelota en función del tiempo utilizando un sensor de posición y un equipo para la recolección automática de datos. Representando el conjunto de valores recogidos en un sistema cartesiano se obtienen gráficos característicos como el mostrado en la Fig. 2, logrado, en este caso, haciendo botar una pelota inflable de plástico.

La determinación del coeficiente de restitución en forma experimental puede realizarse obteniendo las velocidades involucradas en su definición en forma indirecta, a través de las alturas inicial y final de la pelota antes y después de cada rebote. Si se supone despreciable la fricción con el aire, la energía mecánica se conserva en todo el trayecto en descenso, entonces se puede escribir la igualdad (2).

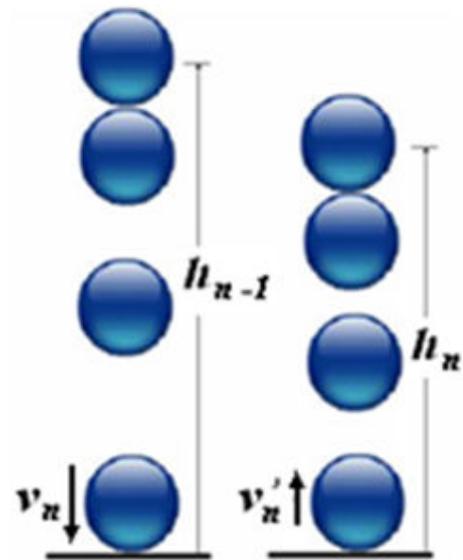


FIGURA 1. Esquema donde se muestran las denominaciones simbólicas de las alturas y velocidades antes y después del choque número n .

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = mgh_{n-1}. \quad (2)$$

De la misma manera, entre el piso, luego del rebote, y su nueva altura máxima, se verifica la relación (3).

$$\frac{1}{2}mv_n'^2 = mgh_n. \quad (3)$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, se obtiene la igualdad (4).

$$\left(\frac{v_n'}{v_n}\right)^2 = \frac{h_n}{h_{n-1}}. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la definición (1), la expresión (4) puede ser escrita como una relación lineal entre la altura alcanzada

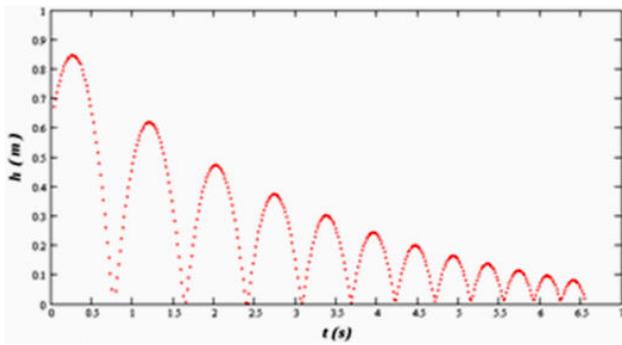


FIGURA 2. Registro de la altura de la pelota en función del tiempo obtenido experimentalmente.

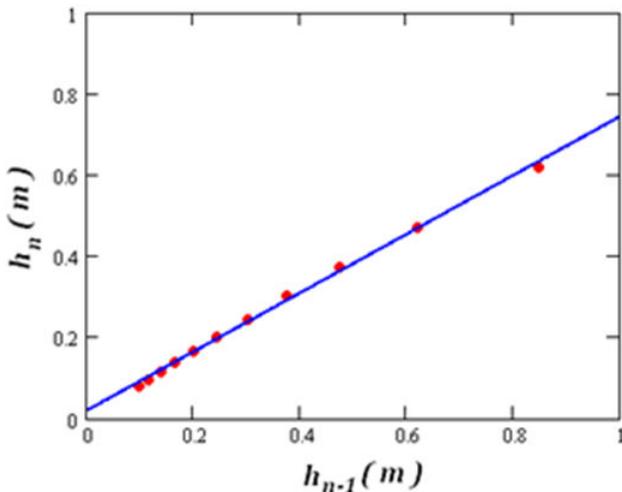


FIGURA 3. Altura alcanzada por la pelota luego de cada rebote y su recta de regresión lineal.

luego del n -ésimo rebote y la altura que alcanzó en el rebote anterior, en la cual el coeficiente buscado, elevado al cuadrado, es la constante de proporcionalidad. Esta relación se expresa en (5).

$$h_n = r^2 h_{n-1}. \tag{5}$$

Representando gráficamente h_n en función de h_{n-1} debería obtenerse una recta de pendiente r^2 . Para la pelota cuya altura en función del tiempo se muestra en la Fig. 2, se obtuvo la gráfica mostrada en la Fig. 3, donde, además de las alturas requeridas en (5), se representó también la recta que mejor se ajusta a los datos obtenidos experimentalmente.

La pendiente de la recta de ajuste es 0.7243 con una incerteza de 0.0114 con lo que resulta $r = 0.851 \pm 0.007$.

Si bien el coeficiente de correlación lineal obtenido puede resultar satisfactorio, igual a 0.99753, se advierte a simple vista en la gráfica de la Fig. 3 un ligero desvío de la linealidad. Dicho desvío, que se repitió en cada una de diez tiradas efectuadas, sugiere que el rozamiento viscoso entre la pelota y el aire no debe ser desatendido.

2. Incluyendo el rozamiento viscoso

Si se considera que la pelota de masa m se mueve en un medio viscoso, como lo es el aire, los cambios de energía entre dos alturas máximas consecutivas se deberán en parte al choque con el piso y en parte al rozamiento. Asumiendo que en un segmento considerablemente mayor del total de la trayectoria de la pelota el número de Reynolds es mayor que 1 (Apéndice A), el modelo que mejor se ajusta para el rozamiento con el aire es aquel donde la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la velocidad [2]. En la Fig. 4 se representan los sentidos de las fuerzas que actúan sobre una pelota de masa m durante un movimiento vertical, cuando descende con una velocidad v en (a) y cuando asciende con una velocidad v en (b). Se adoptó un sistema de referencia representado por un eje y y vertical con origen en el suelo.

Teniendo en cuenta las fuerzas actuantes sobre la pelota: el peso mg , el empuje hidrostático E y el rozamiento viscoso γv^2 , la segunda ley de Newton admite escribir la Ec. (6).

$$E - mg \pm \gamma v^2 = mv \frac{dv}{dy} \tag{6}$$

donde la expresión habitual de la aceleración, dv/dt , ha sido reemplazada por su equivalente $v(dv/dy)$.

Separando variables en (6) e integrando ambos miembros de la Ec. (7), válida para la caída previa al choque número n , se obtiene la expresión (8) que da la velocidad de la pelota justo antes de impactar contra el suelo.

$$\int_0^{v_n} \frac{v dv}{E - mg + \gamma v^2} = \frac{1}{m} \int_{h_{n-1}}^0 dy, \tag{7}$$

$$v_n^2 = \frac{E - mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{2\gamma}{m} h_{n-1}} \right). \tag{8}$$

La velocidad v'_n con que inicia el movimiento ascendente hasta alcanzar la altura h_n , luego del choque n -ésimo, puede obtenerse similarmente resolviendo la Ec. (9), resultando luego la igualdad (10).

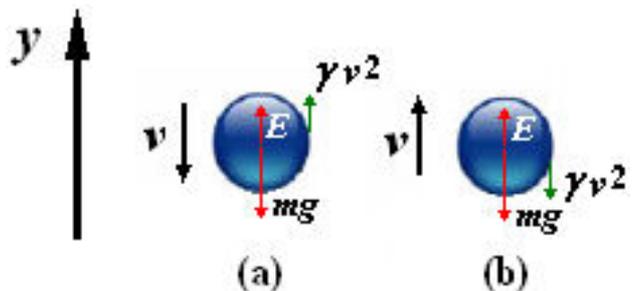


FIGURA 4. Esquema de las fuerzas actuantes sobre la pelota. (a) cuando descende, (b) cuando asciende.

$$\int_{v'_n}^0 \frac{v dv}{E - mg - \gamma v^2} = \frac{1}{m} \int_0^{h_n} dy \quad (9)$$

$$v_n'^2 = \frac{E - mg}{\gamma} \left(e^{\frac{2\gamma}{m} h_n} - 1 \right). \quad (10)$$

En virtud de la definición dada para el coeficiente de restitución en la Ec. (1), puede escribirse la relación (11),

$$r^2 = \frac{v_n'^2}{v_n^2}. \quad (11)$$

Sustituyendo luego las velocidades por las expresiones (8) y (10) se obtiene la Ec. (12).

$$r^2 = \frac{e^{\frac{2\gamma}{m} h_n} - 1}{1 - e^{\frac{-2\gamma}{m} h_{n-1}}}. \quad (12)$$

A continuación, despejando h_n en función de h_{n-1} , se llega finalmente a la Ec. (13), en la que además de r , aparece también el coeficiente de proporcionalidad γ .

$$h_n = \frac{m}{2\gamma} \ln \left[1 + r^2 \left(1 - e^{\frac{-2\gamma}{m} h_{n-1}} \right) \right]. \quad (13)$$

3. Relación entre γ y C_D

Es habitual encontrar en la bibliografía [3] una expresión para la fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo que se mueve a través de un medio viscoso, de la forma (14).

$$f = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \quad (14)$$

donde C_D recibe el nombre de coeficiente de arrastre, ρ es la densidad del medio en el cual se mueve el cuerpo y A es el área de la sección transversal al movimiento. El coeficiente C_D es adimensional y depende tanto de la forma del objeto como de la naturaleza del flujo alrededor del cuerpo, caracterizada por el número de Reynolds Re .

Es posible, entonces, identificar al coeficiente γ de la Ec. (6) con el término $(1/2)C_D\rho A$ de la (14). Por lo tanto, el coeficiente de arrastre puede ponerse como se muestra en la igualdad (15).

$$C_D = \frac{2\gamma}{\rho A}. \quad (15)$$

4. Obtención de r y C_D

Un procedimiento para obtener r y C_D se describe a continuación.

Haciendo $x = (2\gamma/m)h_{n-1}$, la Ec. (13) puede reescribirse como se muestra en (16).

$$h_n = \frac{m}{2\gamma} \ln \left[1 + r^2 \left(1 - e^{-x} \right) \right] \quad (16)$$

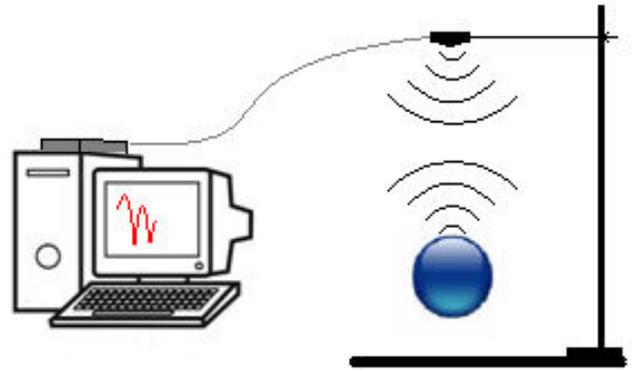


FIGURA 5. Esquema del dispositivo experimental utilizado en el que se observa la ubicación del sensor de posición.

Si x es pequeño (próximo a 0), puede tomarse $(1 - e^{-x}) \cong x$, despreciando los términos de mayor grado en el desarrollo en serie de la función $(1 - e^{-x})$ (Apéndice B). Con esta aproximación la Ec. (16) se reduce a la expresión (17).

$$h_n = \frac{m}{2\gamma} \ln(1 + r^2 x). \quad (17)$$

Un nuevo desarrollo en serie permite escribir $\ln(1 + r^2 x) \cong r^2 x - (1/2)r^4 x^2$, despreciando términos de grado mayor que 2 en el polinomio de Taylor correspondiente (Apéndice B).

Finalmente, con las aproximaciones realizadas, se logra escribir la altura luego del n -ésimo rebote en función de la altura alcanzada en el rebote anterior, de la manera que se muestra en la Ec. (18). En ella aparecen los parámetros r y γ , de valor desconocido.

$$h_n = r^2 \left(h_{n-1} - \frac{\gamma}{m} h_{n-1}^2 \right) \quad (18)$$

La Ec. (18) es una función cuadrática de la forma $y = ax + bx^2$. Identificando los términos equivalentes de la Ec. (18) con la cuadrática genérica se puede poner r y γ como se indica en (19) y (20).



FIGURA 6. Pelotas utilizadas en distintos ensayos. Los datos numéricos consignados en este trabajo corresponden a la de mayor tamaño.

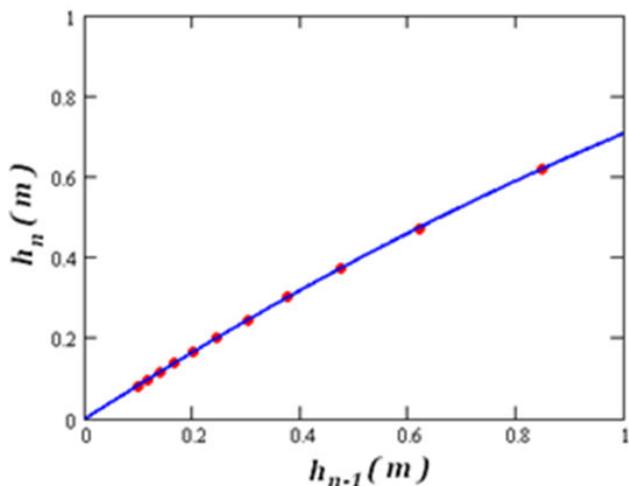


FIGURA 7. Altura alcanzada por la pelota luego de cada rebote y la parábola obtenida por mínimos cuadrados.

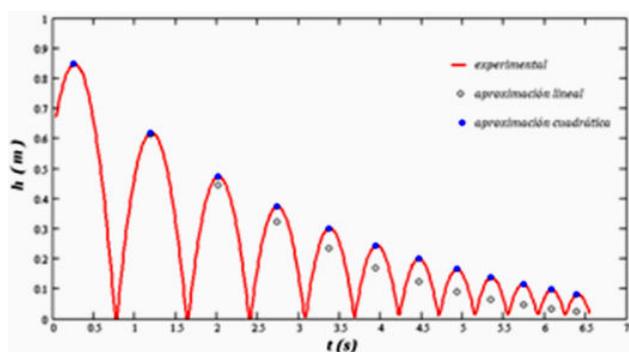


FIGURA 8. Altura de la pelota en función del tiempo, obtenida experimentalmente, y alturas máximas calculadas mediante el modelo lineal y el cuadrático.

$$r = \sqrt{a} \tag{19}$$

$$\gamma = -\frac{b}{r^2}m = -\frac{b}{a}m. \tag{20}$$

Hallando los coeficientes a y b mediante la aplicación del procedimiento de mínimos cuadrados a la sucesión de alturas máximas alcanzadas en cada rebote (Apéndice B), se llega a obtener los valores de r y γ empleando las Ecs. (19) y (20), y luego, por medio de la relación (15), el coeficiente de arrastre correspondiente a una superficie esférica.

5. Parte experimental

Se determinó en forma directa la altura de una pelota en función del tiempo con un dispositivo provisto de un sensor que emite y recibe pulsos acústicos, registrando en forma automática la posición de un objeto que los refleje (Motion Sensor II, CI-6742, conectado a la interfaz Science Workshop 700 Interface de Pasco®). El dispositivo se montó como se esquematiza en la Fig. 5. Se utilizó una pelota plástica inflable de 283.26 g de masa y 26.34 cm de radio, la de mayor tamaño entre las mostradas en la Fig. 6.

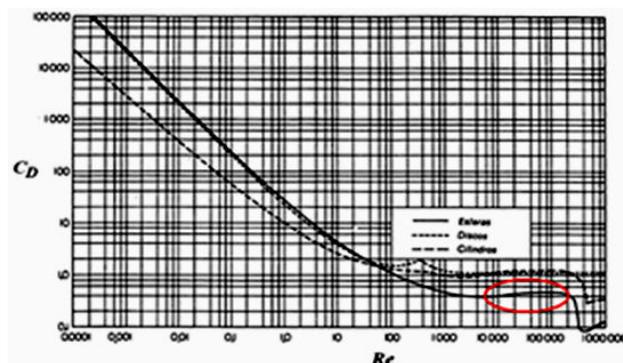


FIGURA 9. Gráfica típica de la variación de C_D con Re para distintos cuerpos. Encerrado con una elipse se señala el intervalo de Re en el cual principalmente se mueve la pelota [5].

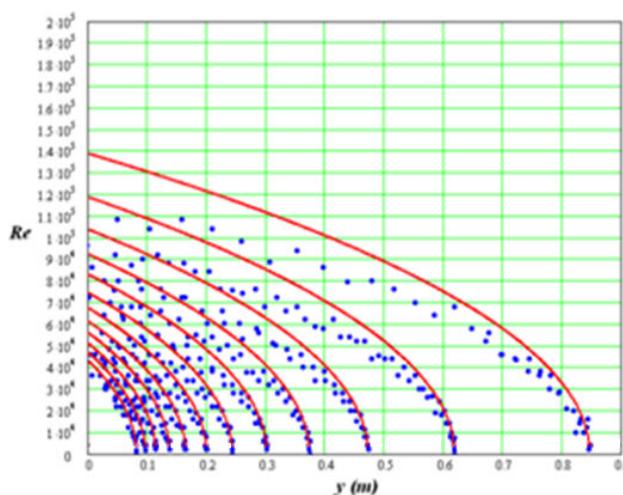


FIGURA 10. Representación de los números Re en función de la altura. En línea llena, tomando velocidades que alcanzaría la pelota en ausencia de rozamiento. Los puntos corresponden a cálculos efectuados con datos experimentales.

Las condiciones ambientales en el momento del experimento fueron:

- Presión atmosférica: 1010 hPa
- Temperatura: 24°C
- Humedad relativa: 45 %

Con estos datos se calculó la densidad del aire con la fórmula CIPM-1981/91 [4], resultando ser $\rho = 1.18 \text{ kg/m}^3$.

Para la primera tirada, cuyos datos fueron representados en las Fig. 2 y Fig. 3, se hallaron los parámetros de la cuadrática que mejor ajusta al conjunto de puntos obtenidos, resultando ser $a = 0.859$ y $b = -0.151$.

Por medio de las Ecs. (19) y (20) se hallaron los valores de r y γ , siendo estos $r = 0.927$ y $\gamma = 0.050 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}$.

Posteriormente, con la Ec. (15), se halló el valor del coeficiente de arrastre correspondiente, resultando $C_D = 0.388$.

En la Fig. 7, la función cuadrática obtenida yuxtapuesta a los puntos experimentales, muestra que éste modelo resulta

TABLA I. Valores de los coeficientes r y C_D obtenidos en diez ensayos realizados.

Número de ensayo	r	C_D	Número de ensayo	r	C_D
1	0.927	0.388	6	0.912	0.325
2	0.936	0.425	7	0.911	0.332
3	0.928	0.326	8	0.917	0.486
4	0.916	0.344	9	0.943	0.459
5	0.910	0.321	10	0.936	0.358

una mejor aproximación que la proporcionada por el modelo lineal. En el ajuste cuadrático resulta un coeficiente de correlación igual a 0.99996, más próximo al ideal de 1, que el obtenido con el ajuste lineal, igual a 0.99753.

Las Ecs. (5) y (18), lineal y cuadrática respectivamente, predicen las alturas que alcanzará la pelota luego de cada rebote. Si se representa cada una de las alturas h_n dadas por esas ecuaciones sobre la curva de la posición de la pelota en función del tiempo, hallada experimentalmente, puede observarse como las alturas obtenidas con el modelo cuadrático reproducen con mayor fidelidad lo ocurrido en el experimento real. Ver Fig. 8. Los resultados obtenidos en diez ensayos realizados se resumen en la Tabla I.

A partir de los resultados tabulados se obtuvieron los valores representativos: $r = 0.92 \pm 0.02$ y $C_D = 0.38 \pm 0.06$.

6. Conclusión

En este trabajo se ha presentado un experimento sencillo, factible de ser implementado en cursos de Física básica de carreras de grado, con el cual se obtiene simultáneamente el coeficiente de restitución para el rebote de una pelota contra el suelo y el coeficiente de arrastre propio de una esfera que se mueve en un medio viscoso. Los resultados obtenidos son satisfactorios pues se obtiene un valor de C_D similar a los que se publican en la bibliografía especializada, válido para esferas que se mueven con un número de Reynolds del orden entre $1 \cdot 10^4$ y $2 \cdot 10^5$. En la Fig. 9 se muestra una gráfica típica de la variación de C_D con el número de Reynolds y , encerrada con una elipse, la zona correspondiente al movimiento de la pelota del ensayo, donde C_D toma aproximadamente el valor 0.4.

Mediciones efectuadas con pelotas de distinto tamaño permiten concluir que se obtienen resultados más próximos al C_D esperado cuanto mayor es el diámetro de la pelota.

Una posible explicación es que cuando el tamaño de la pelota es mayor, la superficie que refleja los pulsos hacia el detector se aproxima más a una superficie plana, encubriéndose así las pequeñas desviaciones de la vertical en los sucesivos rebotes de la pelota.

Apéndice A

El número de Reynolds [6] para el caso de una esfera se calcula mediante la Ec. (A.1).

$$Re = \frac{2R\rho v}{\eta} \quad (\text{A.1})$$

donde R es el radio de la esfera, ρ la densidad del fluido que la rodea y η su viscosidad.

Si se quiere conocer el número de Reynolds en cada punto de la trayectoria de la pelota se debe expresar la velocidad en función de la altura instantánea y . En el caso ideal, sin rozamiento, cuando la pelota cae desde la altura h_{n-1} , la velocidad está dada por la Ec. (A.2).

$$v = \sqrt{2g(h_{n-1} - y)}. \quad (\text{A.2})$$

Para una mejor aproximación a la velocidad real, es conveniente realizar la derivada de la función representada en la Fig. 2. Puesto que los datos registrados con el sensor se obtienen como una colección discreta de las distintas alturas y sus tiempos correspondientes, la derivada puede ser aproximada por los cocientes de los incrementos, como se indica en la Ec. (A.3).

$$v = \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \right|. \quad (\text{A.3})$$

Remplazando (A.2) y (A.3) en (A.1) se logran expresiones del número de Reynolds en función de la altura y . La Ec. (A.4) constituye una cota máxima para el número de Reynolds dado que la velocidad empleada en ella es mayor que la real, excepto en los puntos donde la pelota alcanza cada una de las alturas máximas locales. La Ec. (A.5), por incluir datos experimentales, proporcionaría resultados más próximos a los valores reales.

$$Re(y) = \frac{2R\rho}{\eta} \sqrt{2g(h_{n-1} - y)} \quad (\text{A.4})$$

$$Re_i = \frac{2R\rho}{\eta} \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \right|. \quad (\text{A.5})$$

La representación gráfica de ambas funciones, tomando $\rho = 1.18 \text{ kg/m}^3$ y $\eta = 1.825 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$, se muestra en la Fig. 10. Esta gráfica permite observar que, efectivamente, la función (A.4) acota superiormente a los puntos que representan los Re obtenidos mediante la Ec. (A.5). Además, en ella se visualiza que el movimiento se efectúa en su mayor parte con números de Reynolds superiores a 1, lo que justifica el uso de una fuerza de fricción proporcional al cuadrado de la velocidad y , aún más, toma principalmente valores por encima de 10000 y por debajo de 200000, para los que se espera un valor del coeficiente C_D próximo a 0.4, como se pone de manifiesto en la Fig. 9.

Apéndice B

Desarrollos en series de Taylor usados en las aproximaciones efectuadas:

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{24}x^4 + \dots, \quad (\text{B.1})$$

$$\ln(1 + r^2x) = r^2x - \frac{1}{2}r^4x^2 + \frac{1}{3}r^6x^3 - \frac{1}{4}r^8x^4 + \dots. \quad (\text{B.2})$$

Fórmulas empleadas para el cálculo de los coeficientes de la parábola de la forma $y = ax + bx^2$ que mejor se ajustó a los datos experimentales, obtenida por el método de los cua-

drados mínimos:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N x_i^4 - \sum_{i=1}^N x_i^3 \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N x_i^4 - (\sum_{i=1}^N x_i^3)^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i - \sum_{i=1}^N x_i^3 \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N x_i^4 - (\sum_{i=1}^N x_i^3)^2}. \quad (\text{B.4})$$

Agradecimientos

Agradecemos la estimable colaboración de los estudiantes Paolo Braquet y Fermín Barragán quienes participaron en el registro de datos durante el transcurso de su paso por la cátedra Física I en la carrera de Ingeniería de la U.N.C.P.B.A.

-
1. P.A. Tipler, G. Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología* (Ed. Reverté, España, 2005). Vol. 1, p. 226.
 2. D.C. Giancoli, *Physics Principles with Application* (Prentice Hall, USA, 1985). p. 211.
 3. F.M. White, *Fluid Mechanics* (Mc Graw-Hill, Nueva York, 2002). p. 453.
 4. R.S. Davis, *Equation for the Determination of the Density of Moist Air* (1981/91), *Metrologia* 29 (1992). p. 67-70.
 5. R.H. Perry, D.W. Green, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, (Mc Graw - Hill, Nueva York, 2008). p. 6-52.
 6. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sand, *Feynman Lectures On Physics*, Vol. 2, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1964). p. 41-6.