

Modelando un punto cuántico: una aproximación pedagógica

H.E. Caicedo-Ortiz

*Grupo de Investigación en Tecnología y Ambiente, Corporación Universitaria Autónoma del Cauca,
Calle 5 No. 3-85, Popayán, Colombia.*

*Plantel Vasco de Quiroga, Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal,
Avenida Río de Guadalupe S/N, Col. El Mirador Del. Álvaro Obregón. 00167, México.*

*Facultad de Ingeniería, Universidad Anahuac,
Huixquilucan, 52786, Edo. de México, México.
e-mail: hernando.caicedo@uniautonomo.edu.co*

S.T. Perez-Merchancano

*Grupo de Semiconductores y Nuevos Materiales, Departamento de Física,
Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.*

E. Santiago-Cortés

*Grupo de Investigación en Tecnología y Ambiente, Corporación Universitaria Autónoma del Cauca,
Calle 5 No. 3-85, Popayán, Colombia.*

Received 13 January 2015; accepted 4 March 2015

Determinamos el comportamiento energético de un electrón en el interior de un punto cuántico. El punto cuántico se modela usando un pozo de potencial infinito y un oscilador armónico bidimensional y se soluciona a través del formalismo de segunda cuantización. Este sistema tiene una alta relevancia por sus potenciales aplicaciones en la construcción de dispositivos para el procesamiento cuántico de información. Esta descripción presenta las aplicaciones de problemas clásicos de la mecánica cuántica en el diseño y construcción de dispositivos optoelectrónicos y puede ser empleada en los cursos de física aplicada a nivel de licenciatura o posgrado.

Descriptor: Puntos cuánticos; oscilador armónico; compuertas cuántica; computador cuántico.

We determine the energy performance of an electron inside a quantum dot. The quantum dot is modeled using a infinite potential well and a two-dimensional harmonic oscillator and solved through the formalism of second quantization. This system has a high relevance for their potential applications in the construction of devices for quantum information processing. This description presents the applications of classical problems of quantum mechanics in the design and construction of opto-electronics devices and can be used in applied physics courses at undergraduate or postgraduate level.

Keywords: Quantum dots; harmonic oscillator; potential well; quantum gate; quantum computer.

PACS: 68.65.Hb; 68.55.ag; 03.67.Lx

1. Introducción

Los puntos cuánticos (QDs) [1-4], conocidos como nanocristales, heteroestructuras de baja dimensionalidad o átomos artificiales, son estructuras sólidas semiconductoras, compuestas principalmente de Arsenuro de Galio (GaAs), Arsenuro de Galio-Aluminio (GaAsAl), Seleniuro de Cadmio (CdSe), ó Galena (PbS). Los QDs actúan como una caja que confina partículas, ya sea electrones, huecos o excitones, donde número puede ser controlado aplicando una diferencia de potencial a través de dos electrodos metálicos conectados al sistema. El confinamiento de las partículas crea una cuantización discreta de los niveles de energía, que involucra cambios en las propiedades eléctricas y ópticas del sistema, permitiendo obtener nuevas posibilidades en el diseño de átomos y moléculas artificiales.

En los dispositivos semiconductores normales es necesario el uso de múltiples electrones para definir un cierto estado electrónico. En los puntos cuánticos, su estado electrónico queda determinado por un pequeño número de portadores.

Una compuerta lógica NOR (NO-O), construida con materiales semiconductores en bloque, opera correctamente

cuando se aplica un a diferencia de potencial de 5V. Este proceso involucra una gran cantidad de electrones. Para una compuerta cuántica NOR [5-7], esta puede ser implementada y operada con un punto cuántico, en el cual se encuentra confinado únicamente un solo electrón [8,9].

El descubrimiento de estas heteroestructuras se remonta a principios de los años ochenta. El grupo liderado por Alex Ekimov [10], del Instituto Fisicotécnico Ioffe de San Petersburgo, observó espectros ópticos muy curiosos en muestras de vidrio en Sulfuro de Cadmio (CdS) y Seleniuro de Cadmio (CdSe), ambos materiales semiconductores. Debido al calentamiento de las muestras, algunas pequeñas partículas de estos semiconductores (denominadas nanocristalinas) se precipitaron en el vidrio, causando un comportamiento óptico anómalo debido al confinamiento cuántico de los electrones en estos cristales.

Una forma de comprender este razonamiento es imaginar un electrón atrapado en una caja. Este sistema es modelado como un pozo de potencial infinito, de ancho l_i , donde los niveles de energía son de la forma

$$E_i = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu l_i^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

Si el tamaño l_i de la caja que confina al electrón disminuye, aumenta el nivel energético más bajo del electrón. Para el caso de las nanocristalinas semiconductoras, como las descubiertas por Ekimov, este nivel corresponde a la energía umbral de absorción óptica.

En este punto cabe preguntarse: ¿Qué tamaño debe tener el nanocrystal para que este fenómeno resulte visible?. En el vacío, los efectos de confinamiento son notorios cuando el electrón se encuentra atrapado en un volumen de 10Å de diámetro. Así mismo, debido al confinamiento, los potenciales electrostáticos de los átomos de la red cristalina que constituyen el sistema se superponen, produciendo un medio donde las ondas del electrón se propagan con menos resistencia que en el espacio libre. En dicho medio, la masa efectiva del electrón es menor que la real. Para materiales semiconductores como el Arsenuro de Galio (GaAs), la masa efectiva ronda el 7% de lo que sería en el vacío y para el Silicio (Si) es de 14% [11], por ello si se crea un punto cuántico con estos materiales, al medir el desplazamiento de la energía de absorción, el punto cuántico de GaAs presenta un mayor corrimiento que un punto cuántico de Si [12].

2. Características del Sistema Físico

El sistema aquí considerado es un punto cuántico de GaAs/AlGaAs de radio ρ , el cual confina en su interior a un electrón. Todo el sistema en conjunto es afectado externamente por un campo magnético homogéneo y constante de la forma $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ en la dirección paralela al eje z . Por razones experimentales [1,13], se considera que el potencial de confinamiento del electrón en el eje z es un pozo de paredes infinitas, mientras que sobre el plano xy se toma como un potencial armónico isotrópico bidimensional. Las interacciones electrostáticas de los diferentes núcleos atómicos del GaAs sobre el electrón se modelan bajo la aproximación de masa efectiva, asumiendo una descripción a temperatura $T \cong 0\text{K}$, con el fin de considerar únicamente los estados de más baja energía. Los parámetros empleados hacen referencia a puntos cuánticos fabricados con la técnica de gases bidimensionales de electrones (2DEG); aunque esta elección no es crucial para nuestro análisis, permite ilustrar de mejor forma nuestros resultados.

El hamiltoniano que describe este sistema, incluyendo la interacción debida al campo magnético externo y al espín del electrón es

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p} + \frac{q_e}{c} \hat{A} \right]^2 + \frac{\mu\omega_0^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + u(\hat{z}) - \frac{1}{2} g_s \mu \cdot \hat{\sigma} \mathbf{B}, \quad (2)$$

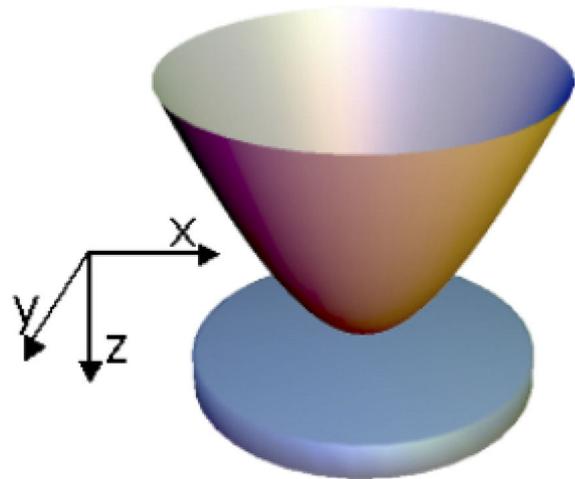


FIGURA 1. Diagrama esquemático del punto cuántico bajo un potencial de confinamiento paraboloide.

donde $\mathbf{A}(\hat{r}) = (B/2)(-\hat{y}, \hat{x}, 0)$ es un potencial vectorial del cual es posible derivar el campo magnético \mathbf{B} y cumple la condición de $\nabla \cdot \mathbf{A}(\hat{r}) = 0$, $\hat{p} = \hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z$ representa el momentum total del sistema, $(1/2\mu) |\hat{p} + (q_e/c)\mathbf{A}(\hat{r})|^2$ es la energía cinética, incluyendo la interacción de campo magnético asociada a $\mathbf{A}(\hat{r})$, μ es la masa efectiva del electrón en el GaAs, el término $(\mu\omega_0^2/2) (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$ representa el potencial bidimensional tipo oscilador armónico sobre el plano xy , $u(\hat{z})$ es el potencial de confinamiento en la dirección del eje z el cual se modela por un pozo de potencial de paredes infinitas y el último término representado por $(1/2)g_s\mu\hat{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ describe la interacción entre el espín del electrón con el campo magnético denominada acoplamiento Zeeman, donde g_s es el factor giro-magnético o factor de Landé y $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z$ son las matrices de Pauli.

La metodología empleada para determinar los autovalores de energía y las auto funciones asociadas a \hat{H} consiste en separar la Ec. 2 en dos hamiltonianos independientes entre sí; el primero, denotado por \hat{H}_0 que no incluye la interacción con el espín del electrón y se compone de los tres primeros términos de la Ec. 2, mientras que el segundo hamiltoniano \hat{H}_s si considera el efecto de espín y está constituido exactamente por el cuarto término de la Ec. 2.

3. Punto Cuántico sin Efectos de Espín

El hamiltoniano que representa al punto cuántico sin los efectos de espín es

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p} + \frac{q_e}{c} \mathbf{A}(\hat{r}) \right]^2 + \frac{\mu\omega_0^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + u(\hat{z}). \quad (3)$$

Considerando que $[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$; representando la frecuencia ciclotrónica como $\omega_c = q_e B / c\mu$, la proyección del momento angular orbital en el eje z como $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ y $\Omega^2 = \omega_0^2 + (1/4)\omega_c^2$, el término 3 toma la forma

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{\hat{p}_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\omega_c \hat{L}_z + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + u(\hat{z}), \quad (4)$$

la Ec. 4 se separa en dos hamiltonianos de variables independientes. El primer término describe el comportamiento del electrón en el plano xy , mientras que el segundo representa un confinamiento tipo pozo de potencial de paredes infinitas en el eje z . Por consiguiente

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel, \quad (5)$$

donde

$$\hat{H}_\perp = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\omega_c \hat{L}_z + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (6)$$

y

$$\hat{H}_\parallel = \frac{\hat{p}_z^2}{2\mu} + u(\hat{z}), \quad (7)$$

\hat{p}_z es el momentum en la dirección z y $u(\hat{z})$ el potencial de confinamiento en z , tipo pozo de potencial infinito.

3.1. Hamiltoniano en el plano xy

El hamiltoniano de la Ec. 6 representa un oscilador armónico bidimensional con una interacción de campo magnético externo B . El proceso para determinar los auto-valores de \hat{H}_\perp es análogo a la solución del oscilador armónico cuántico unidimensional. En este caso es necesario construir dos parejas de operadores de creación - destrucción, por ser un sistema bidimensional. Definiendo $\beta = \sqrt{\mu\Omega/\hbar}$, el primer conjunto de operadores se expresa en función de la posición y momentum, así

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{2} \left[\beta\hat{x} - \frac{i\hat{p}_x}{\beta\hbar} \right], \quad \hat{b}^+ = \frac{1}{2} \left[\beta\hat{y} - \frac{i\hat{p}_y}{\beta\hbar} \right], \quad (8)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \left[\beta\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{\beta\hbar} \right], \quad \hat{b} = \frac{1}{2} \left[\beta\hat{y} + \frac{i\hat{p}_y}{\beta\hbar} \right], \quad (9)$$

con lo cual, el hamiltoniano \hat{H}_\perp toma la forma

$$\hat{H}_\perp = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{b}^+ \hat{b} + 1 \right) + \frac{i\omega_c \hbar}{2} \left(\hat{a} \hat{b}^+ - \hat{a}^+ \hat{b} \right). \quad (10)$$

Introduciendo un segundo conjunto de operadores de creación y destrucción:

$$\hat{B}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}^+ - i\hat{b}^+ \right), \quad \hat{A}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}^+ + i\hat{b}^+ \right), \quad (11)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a} + i\hat{b} \right), \quad \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a} - i\hat{b} \right), \quad (12)$$

10 se reduce a

$$\hat{H}_\perp = \hbar\Omega \left(\hat{A}^+ \hat{A} + \hat{B}^+ \hat{B} + 1 \right) + \frac{\omega_c \hbar}{2} \left(\hat{A}^+ \hat{A} - \hat{B}^+ \hat{B} \right). \quad (13)$$

Denotando el producto de operadores $\hat{A}^+ \hat{A}$ y $\hat{B}^+ \hat{B}$ como \hat{N}_A y \hat{N}_B con auto-valores n_A y n_B respectivamente, este hamiltoniano se convierte en:

$$\hat{H}_\perp = \hbar\Omega \left(\hat{N}_A + \hat{N}_B + 1 \right) + \frac{\omega_c \hbar}{2} \left(\hat{N}_A - \hat{N}_B \right). \quad (14)$$

Sí $\omega_A = \Omega + (1/2)\omega_c$ y $\omega_B = \Omega - (1/2)\omega_c$, al aplicar el hamiltoniano sobre un estado arbitrario del sistema, el autovalor de energía queda expresado como

$$E_\perp = \hbar\omega_A \left(n_A + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_B \left(n_B + \frac{1}{2} \right). \quad (15)$$

La energía del punto cuántico en el plano xy depende de los auto-valores de los operadores \hat{N}_A y \hat{N}_B , así como de las frecuencias ω_A y ω_B , las cuales implícitamente están asociadas a la frecuencia de confinamiento del punto y del campo magnético externo aplicado sobre el sistema. Definiendo $n = n_A + n_B$ y $m = n_A - n_B$, la Ec. 14 toma la forma

$$E_\perp = \hbar\Omega (n + 1) + \frac{1}{2}\omega_c \hbar m, \quad (16)$$

siendo esta la energía en el plano xy asociada a un electrón confinado en un punto cuántico.

Para determinar la función de onda, es necesario hacer uso de las propiedades que presentan los operadores \hat{N}_A y \hat{N}_B , las cuales son exactamente iguales a las presentadas por el operador \hat{N} para el problema de un oscilador unidimensional. Cualquier estado del sistema se describe como una función del estado fundamental, sobre el cual actúan tales operadores. Esta relación es descrita por

$$|\varphi_{n_A, n_B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n_A)!(n_B)!}} (\hat{A}^+)^{n_A} (\hat{B}^+)^{n_B} |\varphi_{00}\rangle. \quad (17)$$

Para determinar la forma de $|\varphi_{00}\rangle$ se reemplaza en los operadores \hat{A} , \hat{A}^+ , \hat{B} , \hat{B}^+ por los operadores \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} , \hat{b}^+ representados en 8 y 9, adicionalmente, realizando un cambio de variable $z = x + iy$ y $z^* = x - iy$ y tomando como referencia el hecho que $A|\psi_{00}\rangle = 0$, $B|\psi_{00}\rangle = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{\beta}{2} z^* + \frac{1}{\beta} \partial_z \right) \psi_{00}(z, z^*) = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\beta}{2} z + \frac{1}{\beta} \partial_{z^*} \right) \psi_{00}(z, z^*) = 0, \quad (19)$$

siendo su solución la función de onda en el estado fundamental

$$|\psi_{00}\rangle = \sqrt{\frac{\beta^2}{\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}(x^2 + y^2)}. \quad (20)$$

3.2. Hamiltoniano en la dirección z

La Ec. 7, con un potencial $u(z)$ de la forma

$$u(z) = \begin{cases} \infty & z < -\frac{1}{2} \text{ ó } z > \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (21)$$

describe el problema de un pozo de potencial de paredes infinitas. El auto-estado del sistema está dado por:

$$|\varphi_{n_z}\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n z) & k_{n_z} = \frac{n_z \pi}{L}; n_z = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n z) & k_{n_z} = \frac{n_z \pi}{L}; n_z = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (22)$$

y los auto-valores de energía son

$$E_{||} = \frac{n_z^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu L^2}. \quad (23)$$

4. Punto Cuántico con Efectos de Espín

Para considerar los efectos de espín en este sistema, es necesario agregar al hamiltoniano \hat{H} un término que represente la interacción entre el espín \hat{S} del electrón con un campo magnético homogéneo en la dirección z , sin incluir la interacción espín-órbita. Este término está representado por

$$\hat{H}_s = -\hat{\mu}_s \cdot \mathbf{B}, \quad (24)$$

donde $\hat{\mu}_s = -(g_s \mu_B \mathbf{S}/\hbar)$, $\mu_B = (q_e \hbar/2\mu)$ y $\hat{S} = (\hbar/2)\hat{\sigma}$.

Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene

$$\hat{H}_s = \frac{g_s q_e \hbar}{4\mu} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (25)$$

donde $|\varphi_{m_z}\rangle = |+\rangle$ ó $|-\rangle$ $|\pm\rangle$, de tal forma que

$$\sigma_z |\varphi_{m_z}\rangle = \sigma |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle = \pm |\varphi_{m_z}\rangle, \quad (26)$$

debido a que el campo magnético solo está dirigido en la dirección z . Tomando el momento angular exclusivamente del espín ($g_s = 2$), la ecuación de valores propios asociada a este sistema es

$$\hat{H}_s |\varphi_{m_z}\rangle = \frac{q_e \hbar}{2\mu} \hat{\sigma}_z \mathbf{B} |\pm\rangle.$$

Al actuar sobre un estado $|\varphi_{m_z}\rangle$ arroja un auto-valor de energía dado por

$$E_s = \pm \frac{q_e \hbar}{2\mu} B. \quad (27)$$

El vector de estado para el electrón ubicado en el punto cuántico, bajo una interacción de campo magnético en la dirección z , se puede expresar como el producto tensorial entre el vector de estado correspondiente al oscilador armónico bidimensional (hamiltoniano xy), el vector de estado del pozo de potencial infinito (hamiltoniano z) y el vector de estado del electrón con espín dada en la ecuación anterior. Por consiguiente el vector total de estado es

$$|\psi\rangle = |\varphi_{n_A, n_B}\rangle \otimes |\varphi_{n_z}\rangle \otimes |\varphi_{m_z}\rangle = |\varphi_{n_A, n_B, n_z, m_z}\rangle. \quad (28)$$

Así mismo, el auto-valor de energía total del sistema es

$$E = \hbar\Omega (n + 1) + \frac{\hbar\omega_c}{2} (m) + \frac{n_z^2 \pi^2 \hbar^2}{2L^2 \mu} \pm \frac{q_e \hbar}{2\mu} B. \quad (29)$$

5. Resultados

Como la frecuencia ciclotrónica ω_c es una función del campo magnético y la frecuencia de confinamiento ω_o es función del radio, es posible observar el comportamiento que presentan los auto-valores de energía del sistema al variar estos parámetros. Este análisis se restringe inicialmente a la energía asociada al hamiltoniano xy y posteriormente se consideran los efectos de espín.

Al tomar la Ec. 16 y expresarla en función de ω_c/ω_o , la energía del sistema en el plano xy es

$$E_{\perp} = \hbar\omega_o \left(\left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_c}{\omega_o} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (n+1) + \left(\frac{\omega_c}{\omega_o} \right) \left(\frac{m}{2} \right) \right). \quad (30)$$

Si ω_o es constante, el radio ρ del punto cuántico se considera fijo. La variable ω_c/ω_o puede tomar diversos valores, los cuales dependen exclusivamente de ω_c y por consiguiente de la magnitud del campo magnético en la dirección z .

En la Fig. 2 se observa como los niveles de energía presentan una degeneración al crecer ω_c/ω_o , es decir, al aumentar el campo magnético \mathbf{B} . Este comportamiento, en el cual los niveles de energía con m positivo o negativo se desplazan ya sea hacia arriba o abajo se debe a que el campo magnético tiende a orientar los momentos magnéticos ya sea en forma paralela o anti-paralela, lo cual se traduce en un aumento o disminución de energía. Este particular fenómeno energético fue descrito analíticamente por Fock [14] y Darwin [15] en los años 30 e indica para que valores de m (+ ó -) la energía del sistema es diferente.

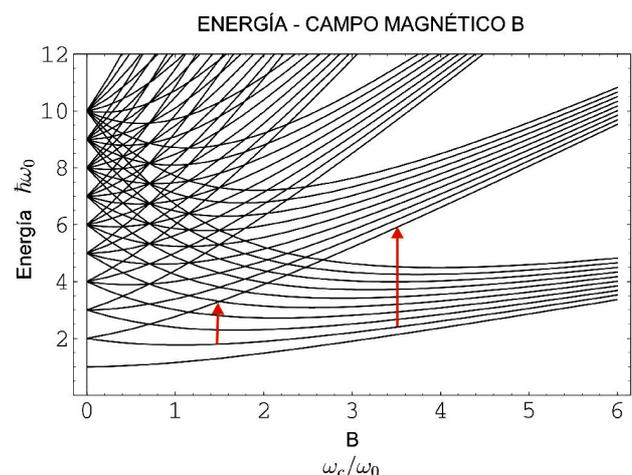


FIGURA 2. Comportamiento energético de un punto cuántico de radio ρ constante y bajo la acción de campo magnético externo \mathbf{B} paralelo al eje z en términos de ω_c/ω_o .

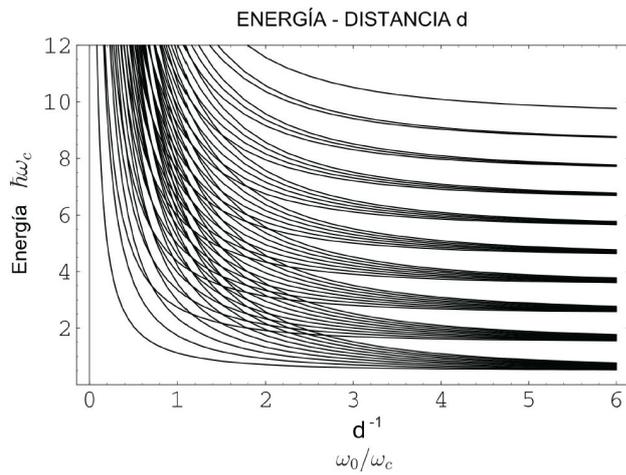


FIGURA 3. Espectro de energía para un punto cuántico de radio variable sobre el cual actúa un campo magnético constante \mathbf{B} en la dirección z .

Para grandes campos magnéticos, el comportamiento de electrón libre prevalece sobre el confinamiento oscilatorio y los niveles de energía forman una secuencia llamadas bandas de Landau, la cual es un cruce de los estados energéticos y se presenta para valores de $n \geq 2$. Las flechas verticales en la Fig. 2 representan algunas de las posibles transiciones ópticas permitidas en el sistema, las cuales para ciertos valores de campo magnético donde se hace visible la intersección de niveles, se dan de forma natural.

Factorizando ahora de la Ec. 16 a ω_c , el campo magnético permanece constante y la variable ω_0/ω_c depende únicamente del radio ρ , por lo tanto

$$E_{\perp} = \hbar\omega_c \left[\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} [n+1] + \frac{m}{2} \right], \quad (31)$$

La Fig. 3 representa este comportamiento energético, en el cual se observa una relación de inversa proporcionalidad entre el radio del punto y la energía del oscilador, esto debido a que los efectos de confinamiento y reducción en la dimensiones del semiconductor se ven reflejados en su comportamiento energético.

Esta situación es similar a la observada en un pozo cuántico de potencial, para el cual una disminución de ρ -un mayor confinamiento sobre el sistema- conduce inmediatamente a una mayor discretización de los niveles de energía. Cuando el radio del punto aumenta, es decir, hay una disminución de la variable ω_0/ω_c , los niveles de energía aumentan, formando un continuo, en el cual no es posible caracterizarlos y distinguirlos unos de otros. El sistema deja de exhibir un comportamiento cuántico y la energía se transforma en un continuo.

Al considerar el efecto del espín del electrón sobre el punto cuántico, es posible expresar la Ec. 29 todo este término en función de ω_c/ω_0 , por lo tanto

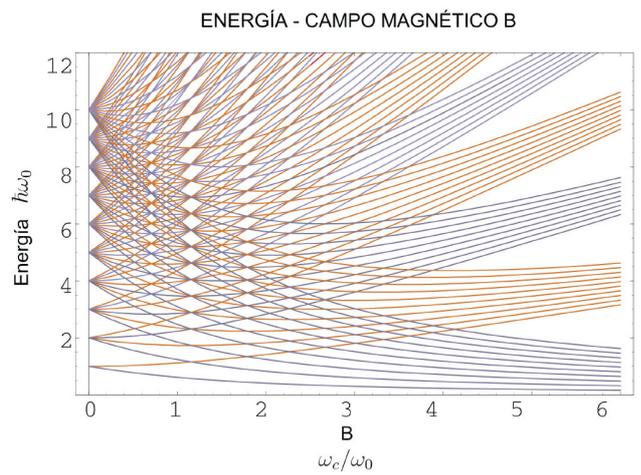


FIGURA 4. Espectro de Fock-Darwin para un punto cuántico considerando los efectos de espín.

$$E = \hbar\omega_0 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} [n+1] + \hbar\omega_0 \left[\frac{\omega_c}{\omega_0} \right] \left[\frac{m}{2} \right] \pm \frac{1}{2c} \left[\frac{\omega_c}{\omega_0} \right]. \quad (32)$$

La Fig. 4 describe este comportamiento, donde se han incluido los efectos de espín, los cuales producen un degeneración hiperfina de los subniveles de energía debido a que en cada uno de ellos pueden existir dos electrones con diferente orientación de espín, lo que da lugar a un doble espectro de energía de Fock-Darwin. Los niveles de color rojo incluyen la interacción con espín $|\uparrow\rangle$ mientras que los niveles de color azul representan al espín $|\downarrow\rangle$.

Este fenómeno es conocido como efecto Zeeman anómalo y su gran importancia radica en sus aplicaciones en computación cuántica, ya que este efecto define claramente un sistema de dos niveles, lo que permite pensar en la construcción de compuertas cuánticas de $1 - qubit$ como son las de rotación y las de negación [16], en las cuales las operaciones se realizan a través de diversas técnicas. Una de ellas, es aplicando un campo magnético de microonda \mathbf{B}_r en resonancia con el “splitting” Zeeman, es decir, con una onda a una frecuencia $f = \Delta E/\hbar$. Este efecto, conocido como resonancia paramagnética [17,18] permite que el nuevo campo magnético \mathbf{B}_r , oscilante y a la vez perpendicular a \mathbf{B} , haga rotar el espín del electrón y adicionalmente, para un cierto tiempo fijo, sea posible la creación de un estado de superposición entre el $|\uparrow\rangle$ y el $|\downarrow\rangle$.

6. Conclusiones

Usando el formalismo de operadores de creación y destrucción, se logra determinar los auto-valores de energía así como la forma general de las funciones de onda asociadas a un punto cuántico de GaAs, el cual confina un electrón en su interior y está afectado por un campo magnético externo \mathbf{B} constante.

La energía de este sistema, sin considerar los efectos del espín del electrón, describen un interesante comportamiento, en el cual algunos de los niveles de energía se cruzan entre sí. Este fenómeno es conocido como espectro de Fock-Darwin, presenta una característica importante y es que al aumentar la intensidad del campo magnético \mathbf{B} , la degeneración, así como la cuantización de los niveles de energía se hace cada vez más representativa, debido al aporte energético que esta interacción realiza y que claramente se observa en el aumento de la energía cinética del sistema.

Existe una fuerte dependencia de la cuantización energética del sistema en función del radio del punto cuántico, donde la relación funcional de entre estas variables es de

inversa proporcionalidad, es por ello que al disminuir el tamaño del punto, su espectro energético hace visible una mayor discretización en los niveles de energía.

Al incluir el espín en nuestro análisis, aparece un fenómeno denominado Efecto Zeeman Anómalo, el cual separa los niveles de energía entre sí creando una estructura hiperfina en el espectro de energía. Esta última característica es de gran interés en el campo de la computación cuántica, por que permite la creación de compuertas cuánticas de *1-qubit* como la compuerta de rotación y donde su control se realiza aplicando un campo magnético oscilante \mathbf{B}_r perpendicular a \mathbf{B} , lo que permite que el espín del electrón rote y por consiguiente cambie de nivel.

-
1. H. Pawel, L. Jacak, and A. Wójs, *Quantum Dots* (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
 2. Y. Masumoto and T. Takagahara, *Semiconductor Quantum Dots* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
 3. A. Tartakovskii, *Quantum Dots: Optics, Electron Transport and Future Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
 4. S.M. Reimann and M. Manninen, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 1283.
 5. M. Nielsen and C.I., *Quantum Computation and Quantum Information*, 1st ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
 6. C. Williams, *Explorations in Quantum Computing* (Springer-Verlag, London, 2011).
 7. H. Caicedo-Ortiz and E. Santiago Cortes, "Theoretical and computational research in the 21st century," (Apple Academic Press, 2014) Chap. Overview of Quantum Computation, 1st ed.
 8. S.N. Molotkov and S.S. Nazin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **110** (1996) 1439.
 9. D. Loss and D. DiVincenzo, *Phys. Rev. A.* **57** (1998) 120.
 10. A. I. Ekimov and A. A. Onushchenko, *JETP Lett.* **34** (1981) 345.
 11. J. Davies, *The Physics of Low Dimensional Semiconductor* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
 12. M.A. Reed, *Scientific American* **118** (1993).
 13. L.P. Kouwenhoven *et al.*, *Science* **278** (1997) 1788.
 14. V. Fock, *Z. Phys.* **47** (1928) 446.
 15. C.G. Darwin, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **27** (1930).
 16. D. DiVincenzo, *Phys. Rev. A.* **51** (1995) 1015.
 17. R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics* (Plenum Press, New York, 1994) p. 392.
 18. R. Hanson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 196802.