

Estudio de la dinámica y el control de una bicicleta robótica

Diego A. Bravo M.

*Ingeniero Físico, PhD. Profesor Departamento de Física ,
Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.
e-mail: dibravo@unicauca.edu.co*

Carlos F. Rengifo R.

*Ingeniero Electricista, PhD. Profesor Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control,
Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.
e-mail: caferen@unicauca.edu.co*

Received 14 October 2019; accepted 27 November 2019

En este trabajo se estudia el modelo cinemático y dinámico de una bicicleta robótica (Arduino Engineering Kit), con el propósito de desarrollar algoritmos de control para su estabilización automática. Se muestra el modelo matemático de la bicicleta mediante la formulación Euler-Lagrange. Este permite el diseño y la implementación de dos estrategias de control para garantizar el equilibrio automático. El estudio de este sistema dinámico se presenta como una excelente oportunidad para integrar las destrezas adquiridas por los estudiantes en materias como física, programación y matemáticas, con el propósito de diseñar, modelar y controlar sistemas dinámicos.

Descriptores: Enseñanza; ecuación de Lagrange; sistemas dinámicos; simulación.

In this paper, a kinematic and dynamic model study of a robotic bicycle (Arduino Engineering Kit) is carried out to develop control algorithms for the automatic stabilization of the bicycle. The mathematical model of the bicycle is shown by the Euler-Lagrange formulation. This model allows the design and implementation of two control strategies to ensure automatic balance. The study of this dynamic system is presented as an excellent opportunity to integrate the skills acquired by students in subjects such as physics, programming, and mathematics with the purpose of designing, modeling, and controlling dynamic systems.

Keywords: Teaching; Lagrange equation; dynamical systems; simulation.

PACS: 01.40.Fk; 01.40.Ha; 01.50.H-

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.62>

1. Introducción

Actualmente, las bicicletas son un medio de transporte muy popular, gracias a que no deterioran el ambiente, no dependen de ningún suministro de energía, tienen una alta eficiencia y son de fácil mantenimiento. Sin embargo, poseen un sistema inestable que requiere de la asistencia humana, por ejemplo, para controlar la dirección y balancear el cuerpo del conductor, con el propósito de dirigir y estabilizar la bicicleta. Se han diseñado y fabricado muchas bicicletas con asistencia eléctrica que evitan el pedaleo del usuario para desplazarse, pero no ayudan en la estabilización de su postura mientras conduce. Por lo tanto, es de interés científico e ingenieril evaluar la posibilidad de que la bicicleta se estabilice automáticamente.

La bicicleta puede utilizarse para ilustrar una gran variedad de conceptos en física e ingeniería de control, [1]. Dicho sistema es no lineal, inherentemente inestable, y presenta claramente la necesidad de implementar un algoritmo de control que permita controlar su inclinación. Debido a su naturaleza, la bicicleta se ha empleado para la enseñanza de sistemas dinámicos e Ingeniería de control, por ejemplo, en la Universidad de Lund, la Universidad de California y la Universidad de Cornell, [2].

Una bicicleta robótica de dos ruedas comparte las mismas características de un péndulo invertido, [1], es no lineal, inestable, multivariable y está fuertemente acoplada [3]. Tales particularidades han incrementado el interés de muchos

investigadores en proporcionar herramientas de enseñanza e investigación que permitan afianzar los conocimientos relacionados con las diferentes estrategias de control, el procesamiento de señales y la obtención de modelos cinemáticos y dinámicos [4]. Actualmente se cuenta con algunos modelos con propósitos de control, como el de Åström [1]. El objetivo de control para la bicicleta es mantener el balance de la misma, pues este tipo de vehículo se ve afectado por disturbios externos, dinámicas no modeladas, errores en la estimación de los parámetros y ruido adicional en las medidas obtenidas por los sensores, entre otros [5]; por lo tanto, en el diseño del sistema control se debe garantizar una mayor exigencia de precisión y robustez.

Dentro de la literatura consultada se encuentra la aplicación de diferentes técnicas de control para estos sistemas, tanto lineales como no lineales. Ambas técnicas requieren de una buena comprensión del modelo matemático [6], que puede obtenerse mediante la ecuación de Lagrange [7], el algoritmo de Newton-Euler [8] y leyes de Newton [9]. Para la estrategia de control lineal, el modelo que se obtiene con cualquiera de las anteriores técnicas debe ser linealizado, caso contrario al control no lineal, donde se utiliza directamente el modelo matemático obtenido.

El trabajo presentado en este artículo comprende desde el modelo cinemático y dinámico de la bicicleta hasta el diseño e implementación de dos estrategias de control: un controlador PID lineal y un controlador no lineal (control por

par calculado) para el balance automático de la bicicleta. El artículo se estructura de la siguiente manera: la Sec. 2 describe los componentes del prototipo de la bicicleta robótica, la Sec. 3 está dedicada a la construcción del modelo matemático del sistema dinámico, la Sec. 4 ilustra sobre las estrategias de control lineal y no lineal implementadas, seguida por los resultados en la Sec. 5 y finaliza con las conclusiones del artículo en la Sec. 6.

2. Bicicleta robótica del Arduino Engineering Kit

La bicicleta robótica (Fig. 1) del Arduino Engineering Kit está constituida por un servo-motor, un motor c.c con caja reductora y encoder para mover la llanta trasera; un motor de c.c se encarga de mover un disco de gran inercia, un sensor de ultrasonido y tres tarjetas electrónicas. La tarjeta principal implementa el controlador y permite establecer comunicación Wi-Fi, la segunda tarjeta es una *Unidad de Medida Inercial* (UMI) y la tercera es una interfaz de potencia para los motores.

3. Modelo matemático de la bicicleta

Es posible desarrollar un modelo matemático que describa la dinámica de un sistema a partir de las leyes físicas que lo gobiernan. Tal modelo puede incluir algunos parámetros desconocidos, que solamente se cuantifican mediante experimentación. La importancia de obtener un modelo aproximado del sistema, ya sea mediante formulación matemática o por métodos experimentales, radica en plantear alguna estrategia de control basada en modelos.

3.1. Modelo cinemático

La geometría de una bicicleta puede aproximarse por un sistema mecánico como el presentado en la Fig. 2. Toda la masa M de la bicicleta se concentra en su centro de masa (CoM)

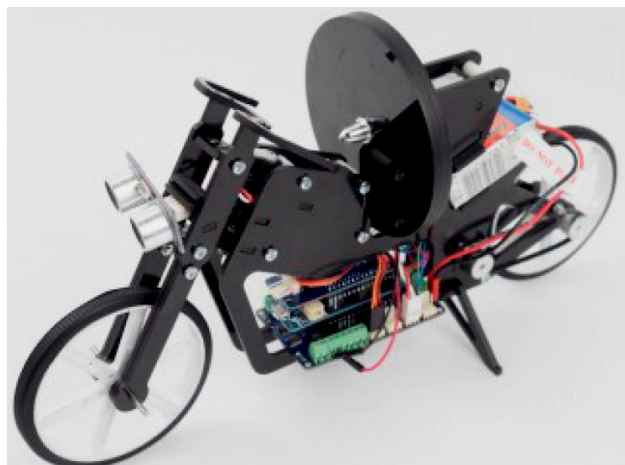


FIGURA 1. Bicicleta robótica de Arduino Engineering Kit.

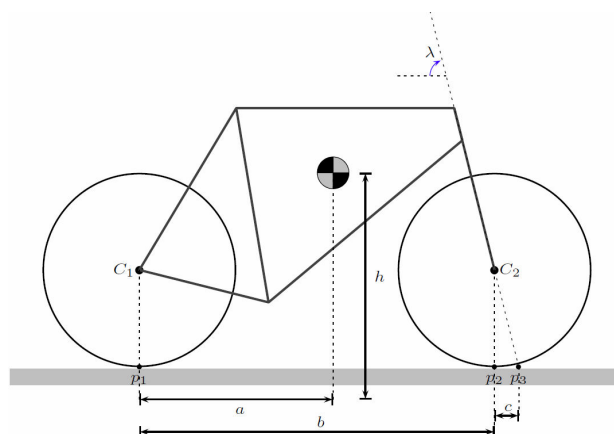


FIGURA 2. Parámetros geométricos de la bicicleta.

(CoM) de coordenadas (a, h) , que se encuentra a una distancia h sobre el suelo y a una distancia a entre el punto de contacto p_1 de la rueda trasera y la proyección del CoM sobre el suelo; b es la distancia entre los puntos de contacto de ambas ruedas, p_3 es la proyección del eje de la dirección de la bicicleta sobre el suelo, y c es la distancia entre el punto de contacto p_2 de la rueda delantera y p_3 .

Consideraciones del modelo

- La bicicleta se desplaza en dirección del eje x a una velocidad constante v en una superficie plana.
- No existe ningún tipo de deslizamiento (ni derrape lateral ni deslizamiento rotacional) en las llantas.
- El eje de la dirección es vertical, por lo tanto $\lambda = 90^\circ$ y la distancia $c = 0$.
- El ángulo de inclinación θ es el único grado de libertad.
- La señal de control es el ángulo de giro ϕ , Fig. 3.
- Los ángulos ϕ , θ , ψ se consideran pequeños, es decir: $\phi \ll 1$ rad, $\theta \ll 1$ rad, $\psi \ll 1$ rad y las siguientes aproximaciones son válidas.

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

- Cuando $\phi = 0$, la bicicleta puede considerarse como un único cuerpo rígido. En esa posición angular de la dirección, se define J como el momento de inercia de este cuerpo con respecto al eje x , y $D = -J_{xy}$, como el producto de inercia con respecto a las abscisas xy .

Con el objetivo de describir la cinemática del sistema, se definen los sistemas de referencia de la Fig. 3 [10]. El referente inercial es $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$, mientras que $\langle x, y, z \rangle$ es el referente del punto de contacto p_1 entre la rueda trasera y el suelo. Por su parte, ψ es el ángulo de rotación alrededor del eje y_g , necesario para hacer coincidir el eje x_g con el eje

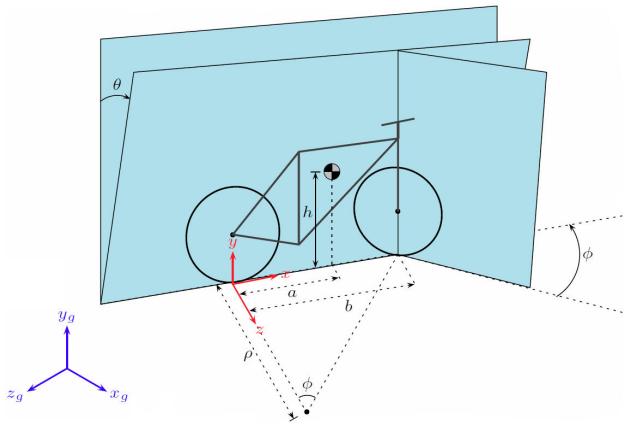


FIGURA 3. Sistemas de referencia.

x , θ mientras que es el ángulo de rotación alrededor del eje x_g , necesario para hacer coincidir el eje y_g con el eje y .

A partir de la definición de los sistemas de referencia, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \psi \\ \dot{z} &= v \sin \psi \\ \dot{\psi} &= \frac{v}{\rho} = \frac{v \tan \phi}{b} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $\rho = b/\tan \phi$ es el *radio de curvatura* de la trayectoria que sigue la bicicleta cuando el ángulo que forma la dirección con respecto al eje x es ϕ .

3.2. Modelo dinámico

Los parámetros del modelo dinámico se derivaron del modelo CAD de la bicicleta robótica. Las especificaciones del modelo CAD incluyen los momentos de inercia y el centro de masa de cada cuerpo; sin embargo, estos no incorporan la masa de elementos como las tarjetas electrónicas, el cableado y los espacios huecos en las partes plásticas. El modelo obtenido no considera fenómenos tales como la fricción en los engranajes, las no-linealidades en los motores eléctricos [11], etc. Esto significa que la posición controlada en los motores en la simulación puede tener un comportamiento diferente en el mundo real, aunque el controlador debe estar diseñado para compensar estas fuentes de error. La Tabla I muestra los parámetros dinámicos utilizados en esta sección.

La ecuación de *Lagrange* permite obtener el modelo matemático de un sistema dinámico a partir de las expresiones que describen sus energías cinética y potencial [12]:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial R(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = e(t) \quad (2)$$

TABLE I. Parámetros dinámicos del modelo.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa de la Bicicleta	m_0	0.4 kg
Masa del Volante de Inercia	m_1	0.0764 kg
Momento de Inercia	J_0	0.0023 kg·m ²
Momento de Inercia	J_1	0.0038 kg·m ²
Radio de la rueda	r	0.05 m
Distancia	y_1	0.13 m
Gravedad	g	9.81 m·s ⁻²

El vector q contiene las coordenadas generalizadas del sistema. El vector \dot{q} representa la derivada con respecto al tiempo del vector q . La función $L(q, \dot{q})$, conocida como *La-grangiano*, es la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema. La primera se denota como $T(q, \dot{q})$ y la segunda, como $U(q)$. La función $R(q, \dot{q})$ contiene los términos de disipación de energía. Por su parte e es el vector de esfuerzos generalizados aplicados al sistema. En el caso de sistemas mecánicos, este término contiene las fuerzas y torques externos que actúan sobre el sistema.

Para modelar la bicicleta mediante la ecuación de *Lagrange* se siguieron las recomendaciones del algoritmo presentado en [4]. El algoritmo sugiere definir los parámetros cinemáticos y dinámicos del sistema a modelar, con el objetivo de definir las matrices de transformación entre los sistemas coordinados de referencia asociados a los cuerpos del sistema que se modela, para posteriormente obtener el *La-grangiano* del sistema. Los sistemas de referencia de la Fig. 4 muestran los tres cuerpos que componen la bicicleta, estos son: la bicicleta –sin tener en cuenta la rueda de inercia (giróscopo J_1) y la dirección junto con la rueda delantera– giróscopo y volante de inercia.

La ubicación en el espacio de un sistema mecánico de n grados de libertad y compuesto de m cuerpos rígidos exige utilizar $6 + n$ variables. Las seis primeras describen la posición y la orientación del cuerpo de base de la cadena cinemática con respecto a un sistema de ejes coordinados llamado referente inercial. Las otras n variables describen la configuración de las articulaciones del sistema. Si el número

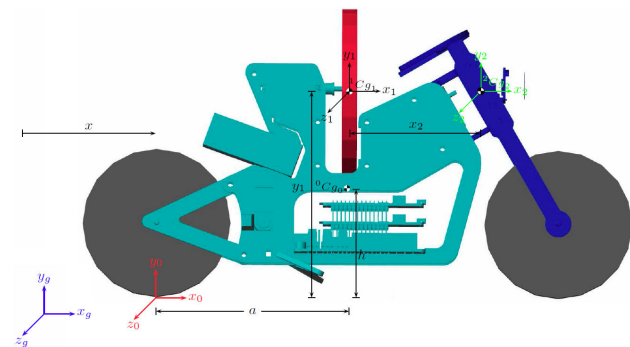


FIGURA 4. Sistemas de referencia de los cuerpos que componen la bicicleta.

de variables utilizadas en la descripción del sistema es mínimo, estas son llamadas coordenadas generalizadas [13]. En el caso del presente trabajo, el vector de coordenadas generalizadas está compuesto por dos tipos de variables: (i) el vector ${}^g p_0 \in \mathbb{R}^3$, que define la posición cartesiana del referente cero en el referente inercial $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$ de la Fig. 3, y (ii) las coordenadas generalizadas usadas para describir el movimiento, donde x se emplea para la traslación, θ denota la inclinación de la bicicleta, φ es el ángulo de rotación de la rueda de inercia y ϕ es el ángulo de giro de la dirección.

$$q_p \triangleq \begin{bmatrix} {}^g p_0 \\ \sigma \\ q \end{bmatrix} \quad (3)$$

El vector ${}^g p_0$ y el conjunto σ definen la matriz de transformación que permite expresar una coordenada Cartesiana, dada en el referente 0, en el referente inercial.

$${}^g \mathbf{T}_0(\sigma) = \begin{bmatrix} {}^g \mathbf{R}_0(\sigma) & {}^g p_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

La posición del centro de gravedad de la bicicleta en el referente 0 se denotará ${}^0 C g_0$ y la posición del centro de gravedad del giróscopo en el referente 1 se denotará ${}^1 C g_1$.

$${}^0 C g_0 = \begin{bmatrix} a \\ h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1 C g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2 C g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con base en las matrices de transformación ${}^g \mathbf{T}_0$ y ${}^0 \mathbf{T}_1$, se expresan los centros de gravedad ${}^0 C g_0$, ${}^1 C g_1$ y ${}^1 C g_1$ en el referente inercial.

$${}^g C g_0 = {}^g \mathbf{T}_0 \cdot \begin{bmatrix} {}^0 C g_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^g C g_1 = {}^g \mathbf{T}_0 \cdot {}^0 \mathbf{T}_1 \cdot \begin{bmatrix} {}^1 C g_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^g C g_2 = {}^g \mathbf{T}_0 \cdot {}^0 \mathbf{T}_1 \cdot {}^1 \mathbf{T}_2 \cdot \begin{bmatrix} {}^2 C g_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^g C g_1$, ${}^g C g_1$ y ${}^g C g_2$ se derivan con respecto al tiempo, con el fin de obtener las velocidades lineales de los centros de gravedad en relación con el referente inercial.

La energía cinética total del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left| {}^g \dot{C} g_0 \right|^2 + \frac{1}{2} m_1 \left| {}^g \dot{C} g_1 \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| {}^g \dot{C} g_2 \right|^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2$$

La energía potencial del sistema es:

$$U = m_0 g \cdot {}^g C g_0(y) + m_1 g \cdot {}^g C g_1(y) + m_2 g \cdot {}^g C g_2(y)$$

Donde ${}^g C g_0(y)$, ${}^g C g_1(y)$ y ${}^g C g_2(y)$ son los componentes en y de los vectores ${}^g C g_0$, ${}^g C g_1$ y ${}^g C g_2$. El Lagrangiano está dado por la diferencia entre T y U .

$$L = T - U$$

Las ecuaciones de movimiento de la bicicleta pueden escribirse de la forma:

$$\mathbf{A}(q) \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \mathbf{G}(q) = \mathbf{\Gamma} \quad (4)$$

En este modelo, $q \in \mathbb{R}^5$ es el vector de coordenadas generalizadas. Este vector contiene dos tipos de coordenadas: (i) $({}^g x_0, {}^g y_0, {}^g z_0)$, que denotan la posición cartesiana del marco de referencia $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ en el marco inercial $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$, y (ii) θ, φ, ϕ necesarias para definir el movimiento de la bicicleta.

$$q = \begin{bmatrix} {}^g x_0 & {}^g z_0 & \theta & \varphi & \phi \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} {}^g \dot{x}_0 & {}^g \dot{z}_0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$$

$\dot{q} \in \mathbb{R}^5$ es el vector de coordenadas generalizadas y $\ddot{q} \in \mathbb{R}^5$, el vector de aceleraciones generalizadas. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es la matriz de inercia. $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^5$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^5$ es el vector de fuerzas gravitacionales. $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^5$ es el vector de torques aplicados en los accionamientos de la bicicleta robótica.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 + m_1 + m_2 & -\sin \theta (h m_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta (h m_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2) & m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + J_0 + J_1 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}^2 \cos \theta (h m_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(m_0 + m_1 + m_2) \\ -g \sin \theta (h m_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = [\tau_g/r \quad 0 \quad 0 \quad \tau_m \quad \tau_d]^T$$

4. Estrategias de control

En esta sección se describen las estrategias de control implementadas para mantener el ángulo de inclinación θ de la bicicleta robótica en $\theta_d = 0^\circ$.

4.1. Control lineal PID

La bicicleta puede estabilizarse con un controlador PID [14] mediante la ley de control:

$$T_m(s) = -k_p \Theta(s) + \frac{k_p}{T_i s} (\Theta_d(s) - \Theta(s)) - \frac{k_p T_d s}{T_d s + 1} \Theta(s) \quad (6)$$

El algoritmo descrito por la Ec. (6) se llama *controlador PID en forma de velocidad* [15]. Esta configuración se usa para evitar cambios muy fuertes a la salida del controlador ante cambios súbitos de la referencia, simplificar los cambios de modo manual a automático, así como para disminuir la posibilidad de saturar el actuador.

La ley de control Ec. (6) especifica que la aceleración angular $\ddot{\varphi}$ del volante de inercia de la bicicleta se mueve en dirección opuesta al ángulo de inclinación θ . Es decir, cuando la bicicleta se inclina hacia un lado, la rueda de inercia se acelerará en la dirección opuesta (ver, Fig. 5), para mover la bicicleta nuevamente hacia el equilibrio deseado $\theta_d = 0^\circ$. Este es un equilibrio estable, lo que significa que cuando el sistema se perturba desde la posición de equilibrio, retornará de nuevo al hacia el equilibrio. La Fig. 6 muestra el sistema de control implementado.

La señal que se envía al motor de corriente continua debe normalizarse entre -1 y 1. Para hacer esto se divide la salida de la señal de control entre el valor del par motor.

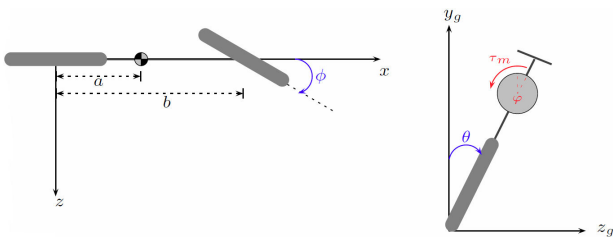


FIGURA 5. Dirección del par de accionamiento τ_m del volante de inercia.

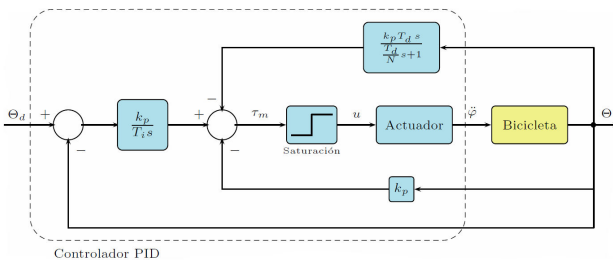


FIGURA 6. Diagrama de bloques del control PID.

La función *saturación* se define como [16]:

$$\text{sat } u = \begin{cases} u_{\text{low}} & \text{si } u \leq u_{\text{low}} \\ u & \text{si } u_{\text{low}} < u < u_{\text{high}} \\ u_{\text{high}} & \text{si } u \geq u_{\text{high}} \end{cases} \quad (7)$$

Por lo tanto, los valores de u_{low} y u_{high} son -1 y 1 , respectivamente. El esquema anti-windup para evitar la saturación del actuador (motor c.c) puede implementarse mediante la función de saturación, Ec. (7), como se ilustra en la Fig. 6.

4.2. Control no lineal CTC

El controlador *Computed Torque Control (CTC)* se implementa para mantener el equilibrio de la bicicleta. Dicha estrategia de control tiene en cuenta el modelo no-lineal de la bicicleta, Ec. (4). La técnica consiste en cancelar las no-linealidades del modelo con la ley de control y el modelo estimado de la bicicleta, de esta forma el controlador a implementar se reduce a un control lineal de un doble integrador [17].

Con los parámetros estimados del modelo, Ec. (4), se define la ley de control:

$$\tau_m(t) = -\hat{C}_b \omega(t) + \hat{C}_a \sin \theta(t) \quad (8)$$

Donde

$$\hat{C}_a = g (h m_0 + y_1 m_1)$$

$$\hat{C}_b = m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0$$

Al sustituir la Ec. (8) en Ec. (4) el problema de control se reduce a un control lineal del doble integrador para el control de balance de la bicicleta robótica:

$$\ddot{\theta} = \omega(t) \quad (9)$$

En este caso, el objetivo es solamente alcanzar la posición deseada θ_d . Una posible ley de control para $\omega(t)$ que permita obtener el balance de la bicicleta es:

$$\omega(t) = k_p (\theta_d - \theta) + k_d \dot{\theta} \quad (10)$$

Si el modelo estimado es muy cercano al real, al sustituir $\omega(t)$ por θ se obtiene la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$\ddot{\theta}(t) + k_d \dot{\theta}(t) + k_p \theta = k_p \theta_d \quad (11)$$

La Ec. (11) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que representa un sistema lineal desacoplado. La solución de $\theta(t)$ es asintóticamente estable para algunos valores adecuados de las constantes del controlador dinámico k_p y k_d .

La Fig.7 representa el sistema de control no-lineal implementado.

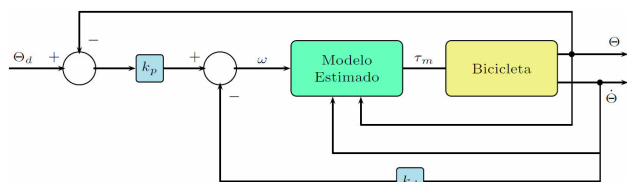


FIGURA 7. Diagrama en bloques del controlador dinámico.

Las constantes del controlador dinámico k_p y k_d se ajustan para una dinámica deseada con un coeficiente de amortiguamiento ξ y un ancho de banda ajustado a una frecuencia ω_0 .

$$k_p = \omega_0^2$$

$$k_d = 2 \xi \omega_0$$

5. Resultados

Los resultados obtenidos de la implementación de cada estrategia de control se ilustran en las Figs. 8 y 9.

La Fig. 8 muestra el ángulo de inclinación θ y la Fig. 9 señala el comportamiento temporal de la ley de control.

Índices de desempeño

Los siguientes *índices de desempeño* [18] se usaron para validar estadísticamente los algoritmos de control propuestos en la Sec. 4.

Desviación estándar del error

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\theta_d(k) - \theta(k)]^2} \tag{12}$$

ϵ_e es la desviación estándar de la señal de error, N el número de muestras, $\theta_d(k) \triangleq 0^\circ$ es el ángulo de inclinación deseado y $\theta(k)$, el ángulo de inclinación medido.

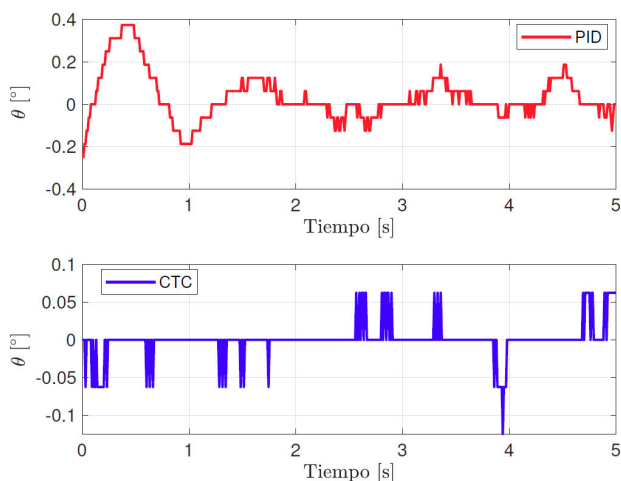


FIGURA 8. Respuesta temporal de los controladores implementados (ángulo de inclinación) (i) PID, (ii) CTC.

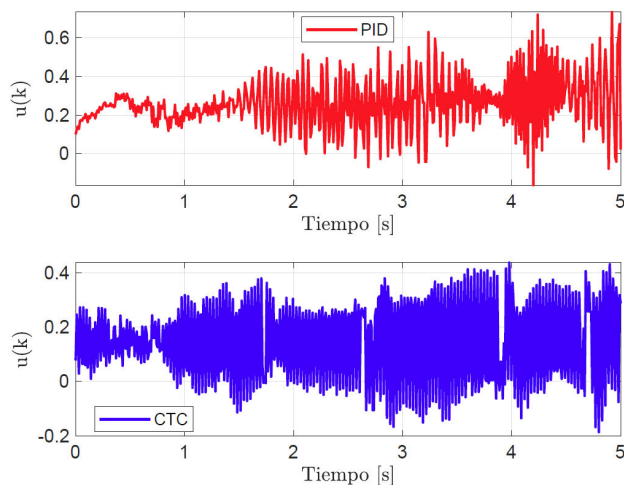


FIGURA 9. Esfuerzo de Control de los controladores implementados (i) PID, (ii) CTC.

Desviación estándar del esfuerzo de control

$$\epsilon_u = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k)} \tag{13}$$

ϵ_u es la desviación estándar del esfuerzo de control $u(k)$.

La Tabla II muestra el valor promedio de los índices de desempeño para 10 experimentos, el número de datos total para cada uno de los experimentos es de $N = 1000$, con una referencia de $\theta_d = 0^\circ$ para cada uno de los controladores.

La Tabla III muestra los radios de los índices de desempeño de los controladores lineales y el control no-lineal para los índices de desempeño propuestos.

A partir de los resultados de la Tabla III, el coeficiente entre la desviación estándar promedio del error para el control PID y CTC es 3.3574, esto significa que el controlador CTC muestra un mejor comportamiento en la respuesta temporal para el error, frente al otro control lineal PID. Mientras que el coeficiente entre la desviación estándar promedio del es-

TABLA II. Comparación del promedio de las desviaciones estándar obtenidas a partir de los experimentos con cada controlador.

Controlador	ϵ_e	ϵ_u
PID	0.1719	0.4397
CTC	0.0512	0.2906

TABLA III. Comparación de los radios de la desviación estándar del esfuerzo de control para cada controlador.

$\frac{\epsilon_e \text{ PID}}{\epsilon_e \text{ CTC}}$	Menor Error
3.3574	CTC
$\frac{\epsilon_u \text{ PID}}{\epsilon_u \text{ CTC}}$	Menor Esfuerzo de Control
1.5131	CTC

fuerzo de control para el control PID y CTC es 1.5131, lo que demuestra que el controlador CTC muestra el menor esfuerzo de control en comparación con el control PID para mantener el equilibrio de la bicicleta robótica.

6. Conclusiones

Este artículo presenta los resultados de investigación sobre la dinámica y el control de la bicicleta robótica del Arduino Kit Engineering. Para cumplir con los objetivos propuestos, primero se obtuvo el modelo matemático del robot mediante el formalismo de Euler-Lagrange, para obtener las ecuaciones de movimiento de la bicicleta, las cuales se caracterizan por ser ecuaciones diferenciales no-lineales.

Una vez obtenido el modelo que representa la dinámica de la bicicleta, se diseñó e implementó un control PID para la estabilización de la bicicleta en reposo. Con la dinámica no-lineal se elaboró y, puso en marcha un control dinámico (CTC) con el objetivo de comparar esta estrategia de control con el control lineal PID.

Todas las estrategias de control anteriores se validaron inicialmente mediante simulación. El modelo CAD de la bicicleta se ensambló en Simscape Multibody™ de Matlab, pues contiene todas las propiedades físicas de cada una de las piezas constitutivas de la bicicleta robótica. Sin embargo, incluso con un modelo perfecto, hay fenómenos del mundo

real que nuestro modelo no tiene en cuenta o no se pueden identificar. Estos incluyen la fricción de los engranajes en los servomotores e incertidumbres paramétricas. Tales fuentes de error, ocasionan que la simulación se pueda comportar de forma distinta al robot real, a menos que el controlador esté diseñado para compensar estas dinámicas no modeladas.

Finalmente, se compararon las dos estrategias de control para la estabilización en reposo de la bicicleta robótica mediante dos índices de desempeño; el primero de ellos utiliza la desviación estándar de la señal de error, mientras que el segundo emplea el valor cuadrático medio del esfuerzo de control. La relación entre los dos controladores permite concluir que el control CTC presenta menor desviación con respecto a la señal de referencia y menor consumo de energía.

Como trabajo futuro se espera implementar un algoritmo de control predictivo basado en modelos para el seguimiento de trayectorias en la dirección de la bicicleta manteniendo su estabilidad.

Agradecimientos

Los autores de este artículo expresan sus más sinceros agradecimientos a la Universidad del Cauca por todo el apoyo recibido para la realización del proyecto (Grant number 5116/2019).

1. K. J. Åström, R. E. Klein, and A. Lennartsson, *IEEE Control Systems* **25** (2005) 26-47.
2. J. Papadopoulos, *Bicycle steering dynamics and self-stability: A summary report on work in progress* Cornell University, Tech. Rep., (1987).
3. J. Akesson, A. Blomdell, and R. Braun, Design and control of yaip - an inverted pendulum on two wheels robot, in *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Oct 2006, pp. 2178-2183.
4. D. A. Bravo and C. F. Rengifo, *Rev. Mex. Fis.* **60** (2014) 111-115.
5. G. V. Raffo, M. G. Ortega, V. Madero, and F. R. Rubio, *Control Engineering Practice*, **44** (2015) 231-242.
6. J. Edelmann, M. Haudum, and M. Plochl, *Bicycle rider control modelling for path tracking* **48** (2015) 55-60.
7. L. Consolini and M. Maggiore, *Automatica* **49** (2013) 2831-2839.
8. J. Mauny, M. Porez, and F. Boyer, *Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle*, *IFAC-PapersOnLine*, **vol. 50**, no. 1, pp. 7598-7605, (2017), 20th IFAC World Congress.
9. N. B. Hung, J. Sung, and O. Lim, *Applied Energy* **221** (2018) 319-333.
10. D. J. N. Limebeer and R. S. Sharp, *IEEE Control Systems* **26** (2006) 34-61.
11. D. A. Bravo and C. F. Rengifo, Dynamics filter for walking trajectories from human motion capture, in (2016) *IEEE Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA)*, Sept 2016, pp. 1-6.
12. D. Wells, *Schaum's Outline of Lagrangian Dynamics*, ser. Schaum's Outline Series. (McGraw-Hill Education, 1967).
13. F. Brian, *Analytical System Dynamics*, 1st ed., ser. Modeling and Simulation. Springer US, (2009), vol. 1.
14. D. A. Bravo M., C. F. Rengifo R., and J. F. Díaz O., Control of a robotic bicycle, in *2018 IEEE 2nd Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA)*, Nov (2018), pp. 1-5.
15. K. Åström and T. Hägglund, *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, (2006).
16. K. Åström and B. Wittenmark, *Computer- Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition*, ser. (Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications, 2011).
17. W. Khalil and E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, 3rd ed. Bristol, PA, USA: Taylor and Francis, Inc., 2002.
18. K. V. Chate García, O. E. Prado Ramírez, and C. F. Rengifo Rodas, in *Advances in Automation and Robotics Research in Latin America*, I. Chang, J. Baca, H. A. Moreno, I. G. Carrera, and M. N. Cardona, Eds. Cham: Springer International Publishing, (2017), pp. 144-156.