

Modelación de sistemas dinámicos de la mecánica clásica

Alejandro González y Hernández^a, César Mora^b, y Ma. del Pilar Segarra Alberú^a

^aDepartamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM,

Universidad 3000, Circuito Exterior s/n, 04510, Ciudad Universitaria, Ciudad de México.

^bCentro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694. Col. Irrigación, 11500, Ciudad de México.

Received 31 January 2020; accepted 9 May 2020

Los sistemas dinámicos tienen su origen en la Mecánica Clásica. La segunda Ley de Newton, representada matemáticamente por una ecuación de movimiento o ecuación diferencial de segundo orden, modela la evolución en el tiempo de los sistemas dinámicos de la Mecánica Clásica, constituidos por uno o más cuerpos masivos sujetos a fuerzas externas. El tratamiento de dichos sistemas mediante la ecuación de movimiento y su solución correspondiente, permite establecer el comportamiento dinámico de los sistemas mecánicos en el tiempo. Para obtener la modelación completa de un sistema mecánico en particular, es fundamental obtener la solución de la ecuación de movimiento, ya sea por medio de métodos matemáticos analíticos o numéricos. Sin embargo, los métodos analíticos frecuentemente requieren de una matemática más compleja que la utilizada en los métodos numéricos y que es más difícil de conocer y aplicar para cualquier sistema dinámico. Por este motivo, aquí le damos preferencia al desarrollo de los métodos numéricos de solución de la ecuación de movimiento que se adaptan adecuadamente al estudio de diferentes sistemas mecánicos modelados en este trabajo y que sufren muy pocas variaciones al aplicarlos de un sistema mecánico a otro.

Descriptor: Sistemas dinámicos; métodos analíticos y numéricos; modelación.

Dynamical systems are rooted in classical mechanics. Newton's second law represented mathematically by an equation of motion or second-order differential equation models the time evolution of dynamical systems of classical mechanics consisting of one or more massive bodies subject to external forces. The treatment of dynamical systems of classical mechanics or mechanical systems for short, using the equation of motion and its corresponding solution, allows for the dynamic behavior of mechanical systems in time. To get the complete modeling of a mechanical system, in particular, is essential to obtain the solution of the equation of motion, either through analytical or numerical mathematical methods. However, analytical methods often require more complex mathematics used in numerical methods and more difficult to understand and apply to any dynamic system. For this reason, here we give preference to the development of numerical methods for solving the equation of motion that is very well suited to studying different mechanical systems modeled in this work and who suffer very little variation when is applied from a mechanical system to another.

Keywords: Dynamic systems; analytical and numerical methods; modeling.

PACS: 45.20.D-; 45.50.Dd; 47.54.De

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.201>

1. Introducción

Un sistema mecánico puede estudiarse desde el punto de vista experimental o a partir de su modelación teórica [1-4]. Sin embargo, un enfoque dual establece un mayor entendimiento del sistema mecánico bajo estudio, debido en gran medida a la retroalimentación que se establece entre ambos puntos de vista [5,6]. La investigación experimental de un sistema mecánico en particular da como resultado una modelación empírica fundamentada mediante la modelación teórica, basada en primeros principios de la Física [7,8]; por otra parte, la modelación teórica es más completa entre más se ajuste a los datos extraídos experimentalmente del sistema mecánico bajo estudio [9]. En otras palabras la mayor coincidencia entre los hallazgos experimentales y teóricos determina la mejor forma de comprender el comportamiento físico del sistema mecánico investigado [10].

En la Mecánica Clásica, la segunda ley de Newton, representada matemáticamente por una ecuación analítica de movimiento o ecuación diferencial de segundo orden lineal o no lineal, es la llave para el estudio de la dinámica de los sistemas mecánicos o de su comportamiento a lo largo del

tiempo. Si bien existen diferentes métodos matemáticos para realizar este tipo de estudios, pueden catalogarse en dos tipos: los analíticos y los numéricos de solución de la ecuación de movimiento [11].

La diferencia entre ambos radica en el empleo en el primero de la matemática de variable continua y en el segundo de la matemática de variable discreta. En el primer caso, las soluciones de la ecuación de movimiento se establecen mediante funciones analíticas entre las variables que determinan el comportamiento dinámico del sistema mecánico, los parámetros que lo definen y el tiempo obtenido de manera continua, lo cual resulta suficiente para determinar de cualquiera de las variables en un tiempo determinado al sustituir el valor numérico del tiempo dado y los valores numéricos de los parámetros que definen el sistema mecánico en las funciones relacionadas con las variables en cuestión. En cambio, las soluciones numéricas no se obtienen mediante funciones analíticas, como en el caso anterior; por el contrario, solo se obtienen mediante tablas de datos numéricos entre las variables del sistema mecánico y los tiempos correspondientes de ocurrencia discreta de estas variables en tiempos separados por un intervalo Δt [12].

Para un mismo sistema mecánico, la coincidencia entre ambos métodos puede examinarse de manera gráfica, en donde una variable en especial se grafica contra el tiempo, mediante ambos métodos; en el caso numérico como puntos discretos de la curva que modela el comportamiento dinámico del sistema mecánico y en el caso analítico como la misma curva continua que envuelve a los datos numéricos. La semejanza, la proximidad y el ajuste entre datos discretos y la curva continua establecerá la coincidencia buscada entre ambos métodos, siempre y cuando se refieran a la modelación del mismo sistema mecánico y las discrepancias por la propagación de errores de cálculo numérico se hayan disminuido o corregido matemáticamente.

En la actualidad, la utilización de los métodos numéricos en la modelación de los sistemas mecánicos ha aumentado debido a la posibilidad de realizar los cómputos numéricos con gran rapidez y grandes volúmenes de datos en sistemas de cómputo de todo tipo. No obstante, su principal cualidad consiste en su aplicación a ecuaciones de movimiento no lineales que analíticamente son difíciles o imposibles de resolver [13]. Operativamente la aplicación de métodos numéricos a la modelación de diferentes sistemas mecánicos bajo la misma estrategia de cálculo permite profundizar sobre el análisis analógico y comparativo de la física de estos sistemas mecánicos sin entrar necesariamente en complejidades matemáticas [14].

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sec. 2 se describe el método de Euler, en la Sec. 3 se muestra el Método de Euler de medio paso, en la Sec. 4 se expone el método de Verlet, y en la Sec. 5 los métodos de Euler modificado de medio paso y de Verlet complementado se extienden a dos dimensiones. Posteriormente, en la Sec. 6, se muestran cuatro aplicaciones a diversos sistemas dinámicos, su comparación con algunas soluciones analíticas y las modelaciones de sistemas mecánicos bajo un mismo esquema simbólico de modelación numérica. Finalmente, en la Sec. 7 se presentan las conclusiones.

2. Método numérico de Euler

El método numérico de Euler para la solución de la ecuación de movimiento de un sistema dinámico puede derivarse de la segunda ley de Newton y deducirse a partir de los valores medios de esta misma ley. Así, la ecuación algebraica que describe la segunda ley de Newton se expresa en una dimensión como:

$$F = ma, \quad (1)$$

donde m es la masa de un cuerpo que se mueve con aceleración a debido a una fuerza externa neta F que interacciona con el cuerpo y que puede depender de la posición x , la velocidad v del cuerpo o del mismo tiempo t , esto es:

$$F = F(x, v, t). \quad (2)$$

La aceleración a del cuerpo en cualquier instante se define de acuerdo con la siguiente expresión matemática:

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (3)$$

donde v es la velocidad del cuerpo en movimiento, la cual a su vez se define como:

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (4)$$

Al sustituir estas dos últimas definiciones y la Ec. (2) establecida para la fuerza F en la Ec. (1), tenemos la siguiente transformación:

$$F(x, v, t) = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (5)$$

que determina la forma general de la ecuación de movimiento en una dimensión de un cuerpo de masa m sujeto a la fuerza externa F .

Diversos métodos matemáticos analíticos se desarrollaron para encontrar soluciones de la ecuación de movimiento en la Ec. (5), las más generales para ecuaciones de movimiento lineales y de manera menos extensa para las ecuaciones de movimiento no lineales. Sin embargo, su revisión específica para la ecuación de movimiento en Ec. (5) ha sido material de mucho estudio que aquí sería imposible desarrollar.

Una vía alternativa más sencilla es la solución numérica de la Ec. (5) a través del método de Euler, la cual sin ser la mejor solución numérica que puede aplicarse a la ecuación de movimiento, si da la pauta para desarrollar cualquier otra solución numérica aplicada a esta misma ecuación.

Como ya se mencionó, el método de Euler se deriva de la Ec. (1) cuando se considera la discretización de esta ecuación. Si en lugar de tomar los valores instantáneos de aceleración en la Ec. (3), se toma su valor medio:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (6)$$

en el intervalo de tiempo Δt . La ecuación de movimiento en Ec. (5) puede ser equivalente a las ecuaciones algebraicas:

$$\bar{F} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (7)$$

y

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (8)$$

siempre y cuando el intervalo Δt sea lo suficientemente pequeño para que los valores medios se aproximen lo mejor posible a los valores instantáneos de velocidad y aceleración correspondientes.

Hay que observar que en las Ecs. (7) y (8) los valores medios \bar{F} y \bar{v} corresponden a algún valor intermedio de la fuerza F y la velocidad v en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. Si se considera que:

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i, \quad (9)$$

y

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \tag{10}$$

donde x_i, v_i, x_{i+1} y v_{i+1} son las posiciones y las velocidades del cuerpo correspondientes a los tiempos t_i y t_{i+1} , respectivamente.

Las ecuaciones ya discretizadas (7) y (8) pueden expresarse como:

$$v_{i+1} = v_i + \left(\frac{\bar{F}}{m}\right) \Delta t, \tag{11}$$

y

$$x_{i+1} = x_i + \bar{v} \Delta t. \tag{12}$$

Para empezar a resolver el par de ecuaciones dadas en las expresiones (11) y (12) determinando los valores finales x_{i+1} y v_{i+1} en el tiempo t_{i+1} a partir de los valores iniciales x_i, v_i en el tiempo t_i y los valores promedios \bar{v} y \bar{F} (en general desconocidos) es necesario conocer estos últimos, más el intervalo de tiempo Δt .

Supongamos que a partir de un tiempo $t_0 = 0$, se conoce la posición x_0 del cuerpo y su velocidad v_0 , es decir, las condiciones iniciales del movimiento del cuerpo. Entonces es posible conocer la fuerza neta $F_0 = F(x_0, v_0, t_0)$ al inicio del intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$, donde el intervalo de tiempo Δt se elige arbitrariamente pequeño.

Bajo estas consideraciones, las Ecs. (11) y (12) se aproximan a las siguientes ecuaciones, cuando se calculan a partir del tiempo inicial $t_0 = 0$ (o a partir de $i = 0$) y los valores iniciales x_0 y v_0 , los valores x_1 y v_1 en el tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ al final del intervalo Δt , esto es:

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{F_0}{m}\right) \Delta t, \tag{13}$$

y

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t, \tag{14}$$

y en ese caso, también ya se puede determinar $F_1 = F(x_1, v_1, t_1)$.

El par de Ecs. (13) y (14) inician un método iterativo de solución de este tipo de ecuaciones, ya que para el tiempo $t_2 = t_1 + \Delta t$, las Ecs. (11) y (12) toman la forma:

$$v_2 = v_1 + \left(\frac{F_1}{m}\right) \Delta t, \tag{15}$$

y

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t, \tag{16}$$

donde también se obtiene $F_2 = F(x_2, v_2, t_2)$ y así sucesivamente hasta llegar a un tiempo final $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, en donde se tiene que:

$$v_n = v_{n-1} + \left(\frac{F_{n-1}}{m}\right) \Delta t, \tag{17}$$

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t, \tag{18}$$

y $F_n = F(x_n, v_n, t_n)$.

El método de Euler tiene un defecto de origen, debido a que los valores medios \bar{F} y \bar{v} en cada i -ésima iteración, se han sustituido por valores iniciales F_i y v_i , a partir de la primera iteración en $t_0 = 0$. Utilizar los valores iniciales para F y v en lugar de sus valores medios exactos desde la primera iteración, provoca que se propague el error en las siguientes iteraciones, hasta lograr que la solución numérica para muy pocas iteraciones posteriores se haya perdido completamente. Esta clase de error no se mejora, aún si el intervalo de tiempo Δt , disminuye, pues su desviación solo se retarda con la solución exacta.

3. Método de Euler de medio paso

Para tratar de resolver este tipo de error de origen en el método de Euler se han propuesto métodos de Euler modificados, que implican la mejora en el cálculo de los valores medios. Una de estas modificaciones considera sustituir la primera ecuación dada en la expresión (13). por la ecuación:

$$v_{1/2} = v_0 + \left(\frac{F_0}{m}\right) \left(\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{19}$$

donde el cálculo de la velocidad se ha realizado no al final del intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$, sino a la mitad es decir, en el tiempo $t_{1/2} = t_0 + \Delta t/2$, a partir de lo cual se obtuvo una velocidad $v_{1/2}$ que se aproxima a la velocidad media \bar{v} en este el intervalo de tiempo Δt . Esta aproximación de la velocidad media no es exacta, ya que aún el valor de la fuerza media \bar{F} en este intervalo sigue siendo aproximado por el valor inicial F_0 conocido de la fuerza; sin embargo, esta aproximación mejora si el intervalo de tiempo Δt se reduce lo más posible (aunque es notable la mejoría con el método de Euler, no hay que descartar que para variaciones grandes de x y v en intervalos de tiempo Δt pequeños, esta aproximación puede no ser tan buena y no obtener los resultados esperados).

Al sustituir la velocidad inicial v_0 en la Ec. (14) por la $v_{1/2}$ de la Ec. (19) se obtiene:

$$x_1 = x_0 + v_{1/2} \Delta t, \tag{20}$$

en $t_1 = t_0 + \Delta t$.

Para llevar a cabo la iteración de este método modificado de Euler, hay que agregar más pasos a la iteración, ya que ahora se determinarán los valores de las variables no solo al principio y al final de cada intervalo de tiempo, sino también a la mitad de los intervalos de tiempo. Por ello, para calcular $F_{1/2}$, es necesario calcular:

$$x_{1/2} = \frac{(x_0 + x_1)}{2}, \tag{21}$$

y entonces

$$F_{1/2} = F(x_{1/2}, v_{1/2}, t_{1/2}), \tag{22}$$

donde $t_{1/2} = t_0 + \Delta t/2$.

Así, al utilizar el valor de $F_{1/2}$ es posible determinar un valor de v_1 que mejora el valor correspondiente al calculado en la Ec. (13), esto es:

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{F_{1/2}}{m}\right) \Delta t. \quad (23)$$

y adicionalmente,

$$F_1 = F(x_1, v_1, t_1), \quad (24)$$

donde $t_1 = t_0 + \Delta t$.

Para continuar la iteración, es necesario calcular los valores intermedios de posición, velocidad y fuerza para la siguiente mitad del intervalo de tiempo $t_{3/2} = t_{1/2} + \Delta t/2$. Así,

$$v_{3/2} = v_{1/2} + \left(\frac{F_1}{m}\right) \Delta t, \quad (25)$$

$$x_{3/2} = x_{1/2} + v_1 \Delta t, \quad (26)$$

$$F_{3/2} = F(x_{3/2}, v_{3/2}, t_{3/2}), \quad (27)$$

con $t_{3/2} = t_{1/2} + \Delta t$.

Finalmente, los valores de posición y velocidad para el siguiente intervalo de tiempo se conocen mediante:

$$x_2 = x_1 + v_{3/2} \Delta t, \quad (28)$$

$$v_2 = v_1 + \left(\frac{F_{3/2}}{m}\right) \Delta t, \quad (29)$$

y también

$$F_2 = F(x_2, v_2, t_2), \quad (30)$$

en $t_2 = t_1 + \Delta t$.

De esta manera, la iteración se puede llevar a cabo hasta un tiempo $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, si se calculan las Ecs. (19), (20), (21) y (22) y se opera con las siguientes ecuaciones a partir de $i = 1, \dots, n$:

$$F_{(2i-1)/2} = F(x_{(2i-1)/2}, v_{(2i-1)/2}, t_{(2i-1)/2}), \quad (31)$$

$$v_i = v_{i-1} + \left(\frac{F_{(2i-1)}}{m}\right) \Delta t, \quad (32)$$

$$F_i = F(x_i, v_i, t_i), \quad (33)$$

$$v_{(2i+1)/2} = v_{(2i-1)/2} + \left(\frac{F_i}{m}\right) \Delta t, \quad (34)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{(2i+1)/2} \Delta t, \quad (35)$$

$$x_{(2i+1)/2} = x_{(2i-1)/2} + v_i \Delta t, \quad (36)$$

donde $t_{(2i+1)/2} = t_{(2i-1)/2} + \Delta t$ y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

Debido a la sustitución del cálculo de los valores medios de \bar{F} y \bar{v} del inicio de los intervalos de tiempo a la mitad de los mismos para mejorar su aproximación por el método de Euler modificado se denomina método de medio paso [15].

Diversos métodos numéricos se han desarrollado para resolver ecuaciones diferenciales, como la ecuación de movimiento a partir del desarrollo en serie de Taylor de la posición y velocidad. El método de Verlet se deriva de esta manera con una aproximación hasta de segundo orden en la serie de Taylor, que lo hace más preciso que el método de Euler, el cual es un desarrollo de primer orden.

4. Método de Verlet

Consideremos $x = x(t)$ y $v = v(t)$ como funciones continuas y derivables en el tiempo. Este tratamiento funcional de las variables físicas del movimiento de un cuerpo permite utilizar los conceptos matemáticos desarrollados para tales funciones.

Así, en el caso de $x = x(t)$, su derivada se expresa como:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} = v(t); \quad (37)$$

por otra parte, $x = x(t)$ puede expresarse como un polinomio en potencias de Δt según su desarrollo en serie de Taylor, de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}x^{(3)}(\zeta)\Delta t^3, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} x(t - \Delta t) &= x(t) - x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}x^{(3)}(\zeta)\Delta t^3, \end{aligned} \quad (39)$$

donde $t - \Delta t \leq \zeta \leq t + \Delta t$.

Entonces $v(t) = x'(t)$ se puede expresar si se despeja de la resta de las expresiones (38) y (39), esto es:

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (40)$$

donde $O(\Delta t^2)$ es el error de segundo orden que se comete al aproximar la derivada $x'(t)$ por su valor aproximado $v'(t)$ dado en la expresión (40).

En el caso $v = v(t)$, su derivada se expresa como:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t - \Delta t)}{2\Delta t} = a(t); \quad (41)$$

por otra parte, al ampliar el desarrollo de Taylor de la función $x = x(t)$ a una potencia más de Δt según su desarrollo en serie de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}x^{(3)}(t)\Delta t^3 + \frac{1}{24}x^{(4)}(\zeta)\Delta t^4, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} x(t - \Delta t) &= x(t) - x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}x^{(3)}(t)\Delta t^3 + \frac{1}{24}x^{(4)}(\zeta)\Delta t^4, \end{aligned} \quad (43)$$

donde $t - \Delta t \leq \zeta \leq t + \Delta t$.

Entonces $v'(t) = x''(t)$ se puede expresar si se despeja de la suma de las dos expresiones anteriores, esto es:

$$a(t) = \frac{x(t + \Delta t) + x(t - \Delta t) - 2x(t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2), \quad (44)$$

donde $O(\Delta t^2)$ es el error de segundo orden que se comete al aproximar la derivada $v'(t)$ por su valor aproximado $a(t)$ dado en la expresión (44).

En las expresiones (40) y (44) se sustituyen los valores $x_{i-1} = x(t - \Delta t)$, $x_i = x(t)$, $x_{i+1} = x(t + \Delta t)$, $v_i = v(t)$ y $a_i = a(t)$, a partir de lo cual se obtiene

$$v_i = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{2\Delta t} \quad (45)$$

y

$$a_i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t^2}. \quad (46)$$

Al despejar x_{i+1} de la Ec. (46) y sustituir a_i por F_i/m se tiene:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \left(\frac{F_i}{m}\right) \Delta t^2, \quad (47)$$

y

$$F_i = F(x_i, v_i, t_i). \quad (48)$$

Estas aproximaciones son susceptibles de un error de segundo orden $O(\Delta t^2)$ como se estableció en las Ecs. (41) y (44).

De acuerdo con las Ecs. (45) y (47), la iteración se inicia con $i = 1$, esto es:

$$x_2 = 2x_1 - x_0 + \left(\frac{F_1}{m}\right) \Delta t^2, \quad (49)$$

$$v_1 = \frac{(x_2 - x_0)}{2\Delta t}, \quad (50)$$

y

$$F_1 = F(x_1, v_1, t_1). \quad (51)$$

La desventaja del método de Verlet es que no puede auto iniciarse, dado que si se empieza en el tiempo t_1 , es necesario conocer los valores de x_0 y v_0 en el tiempo $t_0 = 0$, independientemente de este método.

Para lograr estos valores, es necesario utilizar el siguiente desarrollo de Taylor:

$$x(t - \Delta t) = x(t) - x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3), \quad (52)$$

o bien,

$$x_0 = x_1 - v_1\Delta t + \frac{1}{2}a_1\Delta t^2, \quad (53)$$

donde en la Ec. (52) se utilizó la notación $x_0 = x(t)$, $x_1 = x(t + \Delta t)$, $v_1 = x'(t)$ y $a_1 = x''(t)$ y se despejó x_0 .

De esta manera, al calcular la Ec. (53) y luego las Ecs. (49), (50) y (51), se inicia el método de Verlet complementado, al suponer como conocidos los valores x_1 , v_1 y $a_1 = F_1/m = F(x_1, v_1, t_1)/m$ en el tiempo $t_1 = \Delta t$.

La iteración de este método se sigue al aplicar las Ecs. (47), (45) y (48) para $i = 2, \dots, n$.

5. Métodos numéricos en dos dimensiones

Para determinar la dinámica de un movimiento en el plano, representado por dos coordenadas x e y , es necesario establecer dos ecuaciones de la forma de la Ec. (1), una para cada coordenada, y obtener la solución simultánea para encontrar la dependencia de estas coordenadas con el tiempo.

Para ello, la solución numérica de estas ecuaciones debe aplicarse dos veces, como se muestra en la Tabla I, donde se ha desarrollado el método de Euler de medio punto para dos dimensiones.

La programación de este método se puede realizar en cualquier hoja de cálculo, en particular, en Excel, como se muestra en la Cuadro 1. Ahí, la columna E corresponde al índice de iteración i que va de 0 a n (aquí solo se muestra hasta $i = 3$). Las columnas F a L corresponden a la solución numérica de la coordenada x , y las columnas N a S corresponden a la solución numérica de la coordenada y . El renglón 17 corresponde a los encabezados de las variables que se calculan por el método numérico, el renglón 18, a los valores iniciales, el renglón 19 corresponde a las fórmulas para los tiempos $t_{1/2} = t_0 + \Delta t/2$ y $t_1 = t_0 + \Delta t$ y en el renglón 19 se programan las fórmulas generales para los tiempos $t_{(2i+1)/2} = t_{(2i-1)/2} + \Delta t$ y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, para $i = 1$. Para completar la solución numérica a valores del índice $i > 1$ hasta n , a intervalos de tiempo Δt , el renglón 20, con todas sus columnas, se copia en los siguientes renglones hasta el renglón n (con $n \gg 1$), hasta que una condición establecida por el programador detenga la iteración de las fórmulas.

TABLA I. Método de Euler de medio paso para dos dimensiones.

Condiciones iniciales:		$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), v_{x,0} = v_x(t_0), v_{y,0} = v_y(t_0)$	
Intervalo de tiempo:		$\Delta t < 0.01$	
#	t	coordenada x	coordenada y
1		$i = 0$	
2	$t_0 = 0$	$F_{x,0} = F(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0}, t_0)$	$F_{y,0} = F(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0}, t_0)$
3	$t_{\frac{1}{2}} = t_0 + \Delta t/2$	$v_{x,\frac{1}{2}} = v_{x,0} + (F_{x,0}/m)(\Delta t/2)$	$v_{y,\frac{1}{2}} = v_{y,0} + (F_{y,0}/m)(\frac{\Delta t}{2})$
4	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_{x,1/2}\Delta t$	$y_1 = y_0 + v_{y,1/2}\Delta t$
5		$x_{\frac{1}{2}} = (x_0 + x_1)/2$	$y_{1/2} = (y_0 + y_1)/2$
6		$F_{x,1/2} = F(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}, v_{x,\frac{1}{2}}, v_{y,\frac{1}{2}}, t_{\frac{1}{2}})$	$F_{y,\frac{1}{2}} = F(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}, v_{x,\frac{1}{2}}, v_{y,\frac{1}{2}}, t_{\frac{1}{2}})$
7		$i = 1$	
8.1	$t_i = t_{i-1} + \Delta t$	$v_{x,i} = v_{x,i-1} + (F_{x,2i-1}/m)\Delta t$	$v_{y,i} = v_{y,i-1} + (F_{y,2i-1}/m)\Delta t$
8.2		$F_{x,i} = F(x_i, y_i, v_{x,i}, v_{y,i}, t_i)$	$F_{y,i} = F(x_i, y_i, v_{x,i}, v_{y,i}, t_i)$
8.3	$t_{\frac{2i+1}{2}} = t_{\frac{2i-1}{2}} + \Delta t$	$v_{x,\frac{2i+1}{2}} = v_{x,\frac{2i-1}{2}} + (F_{x,i}/m)\Delta t$	$v_{y,\frac{2i+1}{2}} = v_{y,\frac{2i-1}{2}} + (F_{y,i}/m)\Delta t$
8.4	$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$x_{i+1} = x_i + v_{x,\frac{2i+1}{2}}\Delta t$	$y_{i+1} = y_i + v_{y,\frac{2i+1}{2}}\Delta t$
8.5		$x_{\frac{2i+1}{2}} = x_{\frac{2i-1}{2}} + v_{x,i}\Delta t$	$y_{\frac{2i+1}{2}} = y_{\frac{2i-1}{2}} + v_{y,i}\Delta t$
8.6		$F_{x,(2i+1)/2} = F(x_{\frac{2i+1}{2}}, y_{\frac{2i+1}{2}}, v_{x,\frac{2i+1}{2}}, v_{y,\frac{2i+1}{2}}, t_{\frac{2i+1}{2}})$	$F_{y,\frac{2i+1}{2}} = F(x_{\frac{2i+1}{2}}, y_{\frac{2i+1}{2}}, v_{x,\frac{2i+1}{2}}, v_{y,\frac{2i+1}{2}}, t_{\frac{2i+1}{2}})$
8.7		$i = i + 1$	

CUADRO I. Programación del Método de Euler de medio paso para dos dimensiones en Excel.

	E	F	G	H	I	J	K	L
17	t	x	x _{1/2}	v _x	v _{x,1/2}	F _x	F _{x,1/2}	
18	0	=t_0	=x_0	=v_x_0		=F_x(G18,N18,I18,P18,F18)		
19	1	=F18+Dt	=G18+J19*Dt	=(G18+G19)/2	=I18+(L19/m)*Dt	=I18+(K18/m)*(Dt/2)	=F_x(G19,N19,I19,P19,F19)	
20	2	=F19+Dt	=G19+J20*Dt	=H19+I19*Dt	=I19+(L20/m)*Dt	=I19+(K19/m)*Dt	=F_x(G20,N20,I20,P20,F20)	

	M	N	O	P	Q	R	S
17	y	y _{1/2}	v _y	v _{y,1/2}	F _y	F _{y,1/2}	
18	=y_0		=v_y_0		=F_y(G18,N18,I18,P18,F18)		
19	'=N18+Q19*Dt	=(N18+N19)/2	=P19+(S19/m)*Dt	=P18+(R18/m)*(Dt/2)	=F_y(G19,N19,I19,P19,F19)	=F_y(H19,O19,I19,Q19,F18+Dt/2)	
20	'=N19+Q20*Dt	=O19+P19*Dt	=P19+(S20/m)*Dt	=Q19+(R19/m)*Dt	=F_y(G20,N20,I20,P20,F20)	=F_y(H20,O20,I20,Q20,F18+Dt/2)	

En el Cuadro I, los componentes x e y de la fuerza se han formulado, de acuerdo con las variables en las cuales los componentes dependan en general de ellas, pero en casos particulares, solo se usarán aquéllas que aparezcan en los componentes de la fuerza y el resto se eliminará.

Como podrá observarse, al cambiar de fenómeno de movimiento, para un cuerpo de masa m , solo se modifican las fórmulas para los componentes de las fuerzas en tanto permanece inalterable el resto de la formulación programada en la hoja de cálculo. De esta forma, es posible estudiar la solución de diferentes sistemas dinámicos aplicando el mismo método de solución numérica a cada uno de ellos.

6. Modelos de sistemas mecánicos

Los sistemas mecánicos en una dimensión que se estudian consisten en uno o más cuerpos de diversas masas, sujetos a fuerzas netas de la forma dada en la expresión (2) en una

dimensión o en dos dimensiones, según la expresión:

$$F = F(x, y, v_x, v_y, t). \tag{54}$$

El conocimiento de la fuerza neta aplicada a una masa en especial de un sistema mecánico dado, así como las condiciones iniciales de posición y velocidad del cuerpo correspondiente, son suficientes para aplicar el modelo de la ecuación de movimiento a ese cuerpo y utilizar alguno de los métodos numéricos descritos anteriormente, para determinar la solución de esta ecuación y describir por completo la dinámica del cuerpo en el sistema mecánico a través del tiempo.

Para ejemplificar la aplicación de los métodos numéricos a la ecuación de movimiento, se han seleccionado algunos sistemas mecánicos que pueden experimentarse en el laboratorio para modelar a través de este procedimiento.

Los sistemas mecánicos seleccionados son los siguientes:

- I Caída de un cuerpo esférico en un fluido.

- II Movimiento de un deslizador en un riel de aire sujeto a una fuerza de frenado magnético.
- III Movimiento oscilatorio de tres deslizadores acoplados con resortes en un riel de aire.
- V Lanzamiento de un proyectil en un plano inclinado con fricción.

Los primeros dos sistemas mecánicos consisten en una masa sujeta a interacciones con el medio de diferente clase que dan como resultado fuerzas constantes y fuerzas dependientes de la velocidad. El tercer caso, también en una dimensión, incluye la interacción entre las masas y el medio con fuerzas dependientes de la posición, de la velocidad y del tiempo. El cuarto caso ocurre en dos dimensiones y consiste en una masa sujeta a una fuerza de fricción constante en magnitud, pero variable en su dirección en el plano del movimiento.

6.1. Caída de un cuerpo esférico en un fluido

En un tubo lleno de agua se deja caer desde el reposo una esfera de vidrio de masa m y radio r . Las fuerzas que se ejercen sobre la esfera en su movimiento de descenso son la fuerza de gravedad $F_g = -mg$, la fuerza de flotación de Arquímedes $F_A = (4/3)\pi r^3 \rho_{H_2O} g$ y la fuerza de arrastre $F_D = (1/2)\rho_{H_2O} A C_D v^2$, donde g es la aceleración de la gravedad, ρ_{H_2O} es la densidad del medio, en este caso agua, $A = \pi r^2$ es el área transversal de la esfera, C_D es el coeficiente de arrastre y v es la rapidez de la esfera en el medio. Por lo tanto, la fuerza neta F sobre la esfera está dada por:

$$F(v) = -mg + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O} g - \frac{1}{2}\rho_{H_2O} A C_D |v|v \quad (55)$$

y la ecuación de movimiento que modela este sistema mecánico es:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O} g - \frac{1}{2}\rho_{H_2O} A C_D |v|v. \quad (56)$$

La solución de la Ec. (56) es compleja y ha sido explorada por Salome *et al.* [16] y Valladares *et al.* [17] para una esfera cayendo en un fluido, donde se ha elegido el comportamiento cuadrático debido a la velocidad terminal de -0.38 m/s medida experimentalmente y el número de Reynolds del orden de 10^4 que implica un flujo turbulento. La solución numérica de esta ecuación se obtiene del método de Euler de medio paso que se programa en una hoja de cálculo Excel, que facilita los cálculos iterativos matemáticos para que se encuentren al alcance de estudiantes de ciencias o ingeniería de primer año de la universidad.

En la Tabla II se dan los pasos a seguir en Excel para programar el método numérico de Euler de medio paso para este sistema mecánico [18].

En Excel se recomienda que cada parámetro o condición inicial diferente se indique por separado, mediante su expresión simbólica seguida por su valor numérico. Las celdas donde se encuentran los valores numéricos de los parámetros o condiciones iniciales pueden renombrarse con los mismos nombres dados a estos parámetros o condiciones iniciales. De esta manera, al hacer referencia a un valor en especial en una celda determinada de Excel, se puede emplear su nombre simbólico y utilizar expresiones simbólicas para hacer cálculos numéricos, sin el engorroso trabajo de referenciar las celdas por su nombre

TABLA II. Método de Euler de medio paso para una dimensión, aplicado al caso de la caída de una esfera de vidrio en el agua.

Parámetros:		$m = 0.00009 \text{ kg}, D = 0.004 \text{ m}, A = 0.00005 \text{ m}^2, V = 3.4 \times 10^{-8} \text{ m}^3, \rho_a = 2716 \text{ kg/m}^3, \rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3, g = 9.8 \text{ m/s}^2, \eta = 1.0 \times 10^{-3}, Re = 3.7 \times 10^4 \text{ y } C_D = 0.15.$
Condiciones iniciales:		$y_0 = 0 \text{ m}, v_0 = 0 \text{ m/s}$
Intervalo de tiempo:		$\Delta t = 0.000005 \text{ s}$
#	tiempo	Ecuación
1	$t_0 = 0$	$i = 0$
2		$F_0 = F(v_0)$
3	$t_{1/2} = t_0 + \Delta t/2$	$v_{1/2} = v_0 + (F_0/m)(\Delta t/2)$
4		$i = 1$
5.1		$F_{(2i-1)/2} = F(v_{(2i-1)/2})$
5.2	$t_i = t_{i-1} + \Delta t$	$y_i = y_{i-1} + v_{(2i-1)/2} \Delta t$
5.3		$v_i = v_{i-1} + (F_{(2i-1)/2}/m) \Delta t$
5.4		$F_i = F(v_i)$
5.5	$t_{(2i+1)/2} = t_{(2i-1)/2} + \Delta t$	$v_{(2i+1)/2} = v_{(2i-1)/2} + (F_i/m) \Delta t$
5.6		$i = i + 1$

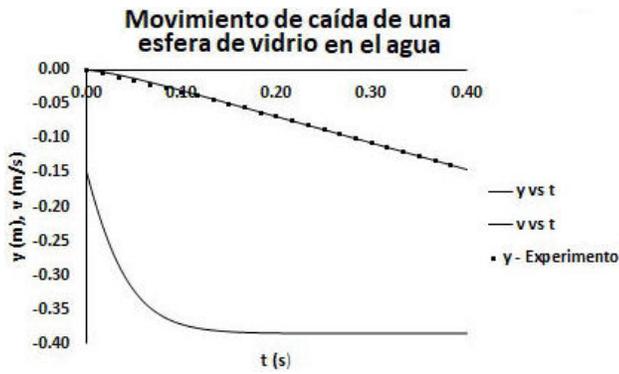


FIGURA 1. Modelo del movimiento de una esfera de vidrio en el agua a partir del reposo.

original de letra y número en fórmulas complejas como la usada para calcular la fuerza neta en los pasos iterativos del método numérico.

Así, habrá entradas diferentes para m , r , A , V , ρ_a , ρ_{H_2O} , g , η , t_0 , Δt , x_0 , v_0 y F_0 , acompañados de sus correspondientes valores numéricos. Si se acostumbra a usar el Sistema Internacional de Unidades, no es necesario agregar las unidades, pero si se desea, se pueden incluir enseguida de cada uno de los símbolos anteriores, encerrados entre paréntesis, por ejemplo m (kg)=, donde el signo igual se ha agregado para indicar que el valor numérico de esta cantidad está en la celda contigua.

En los primeros cinco renglones de la Tabla II se han dado los valores numéricos que deben incluirse en Excel antes de realizar los cálculos para las iteraciones del método numérico.

Para llevar a cabo los cálculos de las iteraciones del método numérico se preparan los encabezados de tantas columnas como ecuaciones diferentes sean para calcular estas iteraciones (Cuadro 1). Así, cada uno de los siguientes nombres simbólicos serán encabezados de las columnas que se usarán para realizar los cálculos del método numérico: t , y , v , $v_{x,1/2}$, F y $F_{1/2}$ (como los encabezados del Cuadro 1).

Enseguida del renglón con encabezados se programa el primer renglón, correspondiente a $i = 0$ con las condiciones iniciales y las fórmulas de los pasos 2 y 3 (Tabla II), mientras que el segundo renglón, correspondiente a $i = 1$, se programa con las fórmulas 5.1 a 5.5 de la tabla. Los siguientes renglones, correspondientes para $i > 1$, se copian del renglón 1, para realizar la iteración del método numérico, hasta el renglón n donde una condición dada por el programador termine la iteración.

La Fig. 1 es el resultado de aplicar el método numérico de la Tabla II a la ecuación de movimiento de la expresión (56).

La altura inicial de caída de la esfera de vidrio a partir de la superficie del agua es de 0 m y su velocidad terminal igual a -0.38 m/s la alcanza en 0.13 s. El experimento (puntos negros) muestra una alta concordancia con el modelo.

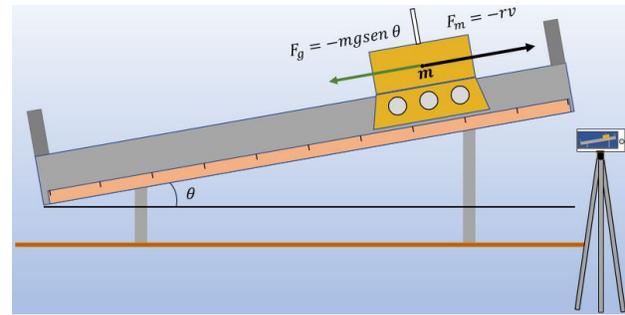


FIGURA 2. Deslizador que se mueve en un riel de aire inclinado en un ángulo θ , frenado por una fuerza de origen magnético.

6.2. Movimiento de un deslizador en un riel de aire sujeto a una fuerza de frenado magnético

Un deslizador de aluminio de masa m con imanes en sus costados se mueve sobre un riel de aire horizontal también de aluminio (Fig. 2). Los imanes se atraen mutuamente y se mantienen fijos en los costados del deslizador [19].

Si el deslizador se mueve a partir de una velocidad inicial v_0 , una fuerza magnética proporcional a la velocidad del móvil $F_m = -rv$ se opone a su movimiento, disminuyendo su velocidad hasta que el deslizador llega al reposo [20,21]. Si el deslizador se inclina en un ángulo θ , la fuerza magnética F_m es opuesta a la componente de la fuerza de gravedad en dirección del plano inclinado

$$F_{g\parallel} = -mg \sen \theta, \text{ tal que:}$$

$$F = -mg \sen -rv, \quad (57)$$

donde r es un coeficiente de resistencia al movimiento.

La fuerza magnética F_m opuesta a la velocidad del móvil aumenta en la dirección contraria al movimiento. Si $v_0 > 0$, la fuerza magnética está en la misma dirección de $F_{g\parallel}$ hasta que el móvil alcanza una altura máxima y velocidad cero; en el descenso del móvil, la fuerza magnética está en la dirección opuesta a $F_{g\parallel}$ con una magnitud que aumenta de cero hasta un valor que equilibra el componente de la gravedad, esto es, cuando $F_{g\parallel} + F_m = 0$, de forma que el móvil alcanza una velocidad terminal v_T , que permite determinar el valor de la constante de resistencia $r = -mg \sen \theta / v_T$ y así, la dependencia de la fuerza magnética con la velocidad. La ecuación de movimiento [22,23] queda determinada por:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sen \theta - rv. \quad (58)$$

La solución analítica de esta ecuación de movimiento es examinada por Vidaurre *et al.* [24], pero es posible resolverla también mediante el mismo método de Euler de medio paso que aparece en la Tabla II. Para ello, se deben adaptar los parámetros y sus valores a las diferentes situaciones del deslizador con imanes sobre el riel de aire, así como aplicar la fuerza neta de la expresión (58). Al hacer estos mismos cambios en la hoja de cálculo de Excel, se obtendrá la solu-

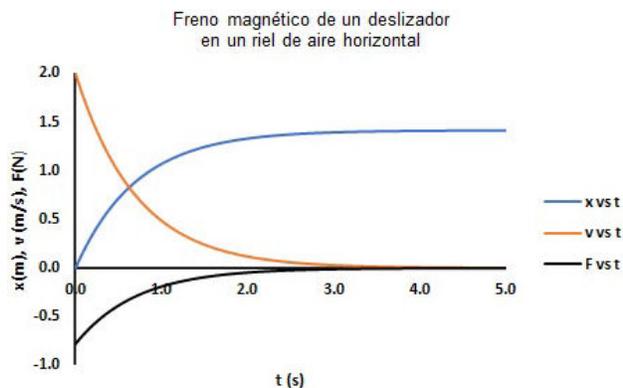


FIGURA 3. Modelo del movimiento de un deslizador que se mueve en un riel de aire horizontal con una velocidad inicial $v_0 = 2$ m/s.

TABLA III. Parámetros de los dos casos del deslizador sobre el riel de aire.

A	Parámetros para el riel de aire horizontal:	$m = 0.276 \text{ kg}, \theta = 0^\circ, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $r = 0.39 \text{ kg/s}$
	Condiciones iniciales:	$x_0 = 0, v_0 = 2 \text{ m/s}$
	Intervalo de tiempo:	$\Delta t = 0.001 \text{ s}$
B	Parámetros para el riel de aire inclinado:	$m = 0.276 \text{ kg}, \theta = 12^\circ, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $r = 0.39 \text{ kg/s}$
	Condiciones iniciales:	$x_0 = 2, v_0 = -2 \text{ m/s}$
	Intervalo de tiempo:	$\Delta t = 0.0004 \text{ s}$
D	Fuerza neta inicial:	$F_0 = -mgsen\theta - rv_0$
E	Tiempo inicial:	$t_0 = 0$

ción del movimiento del deslizador sobre el riel de aire, para la fuerza magnética de frenado del deslizador.

En la Tabla III se dan los cambios correspondientes que modifican la Tabla II y se adaptan a la dinámica del sistema mecánico constituido por el deslizador, el riel de aire y los imanes sobre el deslizador. En esta tabla ya no se incluye el método numérico de la Tabla II, por considerarse el mismo.

Como se puede observar en el paso D de la Tabla III, la fuerza corresponde a la aplicada al deslizador en el freno magnético y sustituye a la fuerza de la expresión (55) de la caída en el agua. Este cambio no altera las ecuaciones iterativas del método numérico, pero el resultado corresponde a la dinámica del freno magnético, no así al de la caída en el agua.

Esta característica del método numérico permite analizar diferentes dinámicas con el mismo método de solución numérica, para enfocar el análisis de los fenómenos estudiados más a la interpretación física de las gráficas de la solución numérica que expresan la dinámica de los movimientos y menos al desarrollo de la solución analítica de la ecuación de movimiento, que es compleja para cada caso.

Así, en la gráfica de la Fig. 3 se muestra el resultado de aplicar el método numérico de Euler de medio paso a la ecuación de movimiento de la expresión (58), con los datos del caso A contenidos en la Tabla III. El deslizador parte desde el origen de coordenadas con velocidad inicial de 2 m/s, hasta alcanzar una máxima distancia de recorrido en donde la velocidad final es cero y la fuerza inicialmente opuesta al movimiento se reduce a cero.

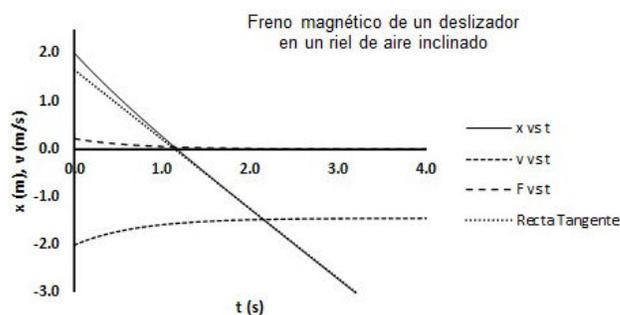


FIGURA 4. Modelo del movimiento de un deslizador que se mueve en un riel de aire inclinado un ángulo de 12° con una velocidad inicial $v_0 = -2$ m/s.

Al cambiar los parámetros del caso A al caso B de la Tabla III, la dinámica del deslizador se modifica. En la gráfica de la Fig. 4 se muestra el resultado de aplicar el método numérico de Euler de medio paso para el caso B de la Tabla III. El deslizador parte desde la posición inicial de 2 m, con una velocidad inicial de -2 m/s, hasta alcanzar una mínima distancia de recorrido en donde la velocidad es cero, para después caer hacia abajo del riel de aire con velocidad creciente hasta una velocidad terminal. En ambos casos, la fuerza neta, que inicialmente tiene un valor igual a la componente de la gravedad en dirección hacia abajo del riel de aire, se reduce a cero.

La gráfica de la Fig. 4 permite realizar el análisis de la dinámica del freno magnético. La posición como función del tiempo del deslizador que desciende por el riel de aire es una curva que se transforma en una línea recta cuando alcanza la velocidad terminal v_T . Para determinar esta velocidad se ajusta una línea recta tangente a la parte lineal de la curva cuyo valor de la pendiente es precisamente v_T .

El movimiento se inicia con una velocidad que es mayor en magnitud que la velocidad terminal, conforme pasa el tiempo, la velocidad del móvil se aproxima a la velocidad terminal y la alcanza cuando la fuerza magnética iguala la magnitud del componente del peso del deslizador en la dirección de movimiento y por lo tanto la fuerza neta es cero.

Experimentalmente, este movimiento es difícil de hacer en un riel de aire de corta longitud, puesto que debe alcanzar la velocidad terminal a lo largo del riel para medir el valor del coeficiente de resistencia r . Sin embargo, la solución numérica expresada gráficamente en la Fig. 4 muestra la forma de realizar el movimiento: cuando la velocidad inicial es cercana a la velocidad terminal, el movimiento, casi desde el inicio, es un movimiento uniformemente rectilíneo. En este sentido si en el experimento se logra una velocidad inicial tal, el movimiento del deslizador alcanzará la velocidad terminal a lo largo del riel donde se mide el valor de r como el de la Tabla III.

6.3. Movimiento oscilatorio de tres deslizadores acoplados con resortes en un riel de aire

Tres deslizadores de masas m_1, m_2 y m_3 conectados mediante resortes de constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 en un riel de aire, como se muestra esquemáticamente en la Fig. 4, se desplazan de sus posiciones de equilibrio para que oscilen acoplada-mente [25].

Las fuerzas netas aplicadas a cada uno están dadas por:

$$F_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \tag{59}$$

$$F_2 = -(k_2 + k_3)x_2 + k_2x_1 + k_3x_3, \tag{60}$$

$$F_3 = -(k_3 + k_4)x_3 + k_3x_2, \tag{61}$$

mientras que las ecuaciones de movimientos correspondientes para los tres deslizadores son:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \tag{62}$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -(k_2 + k_3)x_2 + k_2x_1 + k_3x_3, \tag{63}$$

$$m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = -(k_3 + k_4)x_3 + k_3x_2. \tag{64}$$

Como se puede observar, las fuerzas aplicadas solo dependen de la posición de los deslizadores a partir de sus posiciones de equilibrio, pero cada una de las ecuaciones de movimiento en las expresiones (62), (63) o (64) no son independientes una de las otras, ya que las coordenadas de cada deslizador aparecen en más de una ecuación, lo que establece un acoplamiento entre las masas involucradas en este sistema mecánico de tres deslizadores.

Las Ecs. (62 a 64) son resueltas en los libros de texto [26] generalmente para determinar los modos normales de vibración del sistema de dos o más masas, como el de la Fig. 5. Por su parte, los modos localizados, como el descrito en la Fig. 6, se pueden examinar con la solución numérica aplicando el método de Euler de medio paso, sin grandes complicaciones matemáticas. Para aplicar la solución numérica a estas ecuaciones de movimiento se usa también la hoja de cálculo de Excel, con la salvedad de que se triplicarán las columnas de operación del método numérico debido a que para cada

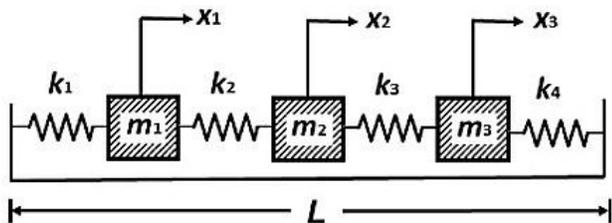


FIGURA 5. Osciladores acoplados. Tres deslizadores de masas m_1, m_2 , y m_3 , en un riel de aire sujetos entre sí mediante resortes constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 que se mueven de manera acoplada a partir de sus posiciones de equilibrio.

Oscilaciones acopladas de tres deslizadores

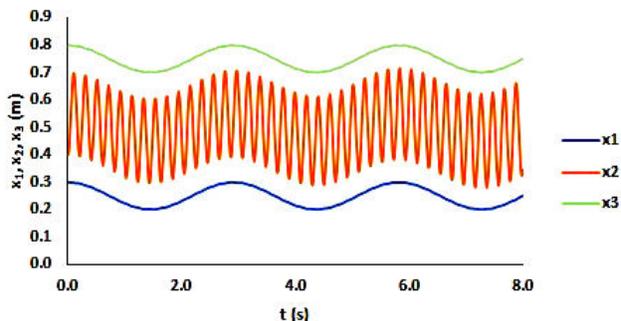


FIGURA 6. Movimiento de tres deslizadores acoplados en un riel de aire, relativos al inicio del riel de aire.

masa hay que aplicar el mismo método numérico, cambiando exclusivamente la fuerza neta utilizada en los cálculos y cuidando el orden de ejecución de los cálculos, debido al acoplamiento que se ha establecido ya en las ecuaciones de movimiento.

Para aplicar el método de Euler de medio paso a este sistema mecánico se utilizan iterativamente seis ecuaciones algebraicas diferentes $3n$ veces, de manera que es preferible usar el método de Verlet, que es de mayor precisión, y se aplican iterativamente dos ecuaciones algebraicas $3n$ veces, con gran ahorro de tiempo de cálculo y espacio de memoria, lo cual mejora la precisión de los cálculos realizados.

En la Tabla IV se describe el método de Verlet [27] para el caso de los tres deslizadores acoplados con resortes iguales con $k = 1.2$ N/m, de los dos deslizadores de los extremos con la misma masa $m_1 = m_3 = m = 0.256$ kg y el deslizador del medio con una masa $m_2 = 0.01$ kg.

La gráfica de la Fig. 6 es resultado de aplicar el método numérico de Verlet, descrito en la Tabla IV, a las ecuaciones de movimiento de las expresiones (62), (63) y (64) de los tres deslizadores acoplados, con masas $m_1 = m_3 = m = 0.256$ kg y $m_2 = 0.01$ m, constantes de resortes $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k = 1.2$ N/m y posiciones iniciales a partir de sus

TABLA IV. Método de Verlet para los tres osciladores acoplados.

t	coordenada x_1
$t_0 = 0$	$x_{1,0} = x_{1,1} - v_{x1,1}\Delta t + \frac{1}{2} (F_{x1,1}/m_1)\Delta t^2$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_{1,1} = x_1(t_1)$
	$v_{x1,1} = v_{x1,1}(t_1)$
	$F_{x1,1} = F(x_{1,1}, y_{1,1})$
$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$x_{1,i+1} = 2x_{1,i} - x_{1,i-1} + (F_{x1,i}/m_1)\Delta t^2$
	$i = 1, \dots, n$
t	coordenada x_2
$t_0 = 0$	$x_{3,0} = x_{3,1} - v_{x3,1}\Delta t + \frac{1}{2} (F_{x3,1}/m_3)\Delta t^2$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_{3,1} = x_3(t_1)$
	$v_{x3,1} = v_{x3,1}(t_1)$
	$F_{x3,1} = F(x_{3,1}, y_{3,1})$
$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$x_{3,i+1} = 2x_{3,i} - x_{3,i-1} + (F_{x3,i}/m_3)\Delta t^2$
	$i = 1, \dots, n$

posiciones de equilibrio, $x_1 = 0.05$ m, $x_2 = -0.1$ m y $x_2 = 0.05$ m.

Como se puede observar, el deslizador de masa m_2 tiene una masa que es la centésima masa de los deslizadores de los extremos y su desplazamiento inicial a partir de su posición de equilibrio es el doble del desplazamiento de las dos masas extremas y en sentido opuesto. Al disminuir la masa del deslizador, es que la frecuencia de oscilación aumenta de manera importante en relación con las frecuencias iguales de oscilación de los deslizadores extremos y que se mueven en fase entre más pequeña sea la masa de este deslizador comparado con las masas de los deslizadores en sus extremos.

Estos tipos de *descubrimientos* son posibles porque con el modelo numérico en Excel se pueden variar los parámetros que definen al sistema mecánico o sus condiciones iniciales y es posible observar el comportamiento de la dinámica del sistema; es como si fuera variable experimentar en el laboratorio, variando alguna de las condiciones del sistema mecánico según se desee explorar para ver la manera en que reacciona el sistema mecánico bajo este cambio. En general, esto es difícil de hacer en un laboratorio, pero con un modelo numérico como el aquí realizado es posible hacer múltiples *experimentos virtuales*.

Los *experimentos virtuales* tendrán la característica de modelar el comportamiento del sistema mecánico que se estudia, bajo muy diversas condiciones de operación. Las gráficas que representan las variables del sistema mecánico cambiarán de acuerdo con la variación que se haga de los parámetros o condiciones iniciales, así se podrán estudiar los diferentes comportamientos de este sistema de masas acopladas bajo muy diversos aspectos. Por ejemplo, si las masas de los deslizadores son iguales, se pueden modelar los modos normales de oscilación y verificar los resultados con el experimento.

Este sistema mecánico podrá alterarse también si se agregan fuerzas de fricción dependientes de la velocidad y fuerzas de forzamiento periódico que establezcan nuevos regímenes de movimiento de las masas acopladas, lo cual permite estudiar fenómenos de resonancia del sistema mecánico. Desafortunadamente el método de Verlet no podrá seguir utilizándose, debido a la dependencia con la velocidad de las fuerzas de fricción, pero podrá sustituirse por el método de Euler de medio paso, aunque implique aumentar el tiempo de cálculo.

6.4. Lanzamiento de un proyectil en un plano inclinado con fricción

Un disco de masa m sobre una superficie inclinada un ángulo θ se lanza con una velocidad $\vec{v}_0 = v_{x,0}\hat{i} + v_{y,0}\hat{j}$, donde la dirección del eje de las X es paralela a la base del plano inclinado, el eje de las Y es perpendicular al eje X y está en la dirección del plano inclinado hacia arriba y el eje de las Z , perpendicular al plano inclinado, ver Fig. 7 [28,29].

El disco está sujeto a la fuerza de gravedad $\vec{F}_g = -m\vec{g} = -mg \sin \theta \hat{j} - mg \cos \theta \hat{z}$, la fuerza normal $\vec{N} = mg \cos \theta \hat{z}$ y

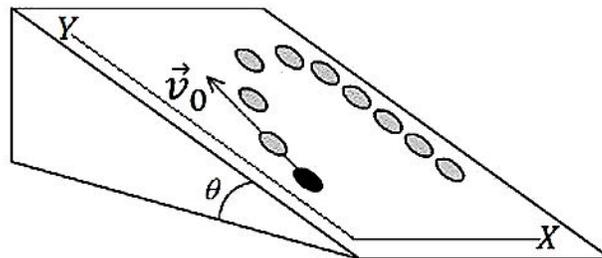


FIGURA 7. Disco lanzado sobre un plano inclinado con una velocidad inicial \vec{v}_0 . El disco se mueve sujeto a la fuerza de gravedad \vec{F}_g , la fuerza normal \vec{N} y la fuerza de fricción \vec{f} .

la fuerza de fricción $\vec{f} = -\mu N \vec{v}/|v|$. La fuerza neta sobre el disco está dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{f} = -mg \sin \theta \hat{j} - \mu N \frac{\vec{v}}{|v|} \quad (65)$$

o bien

$$\vec{F} = -mg \sin \theta \hat{j} - \frac{\mu mg \cos \theta (v_x \hat{i} + v_y \hat{j})}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad (66)$$

y la ecuación de movimiento:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \sin \theta \hat{j} - \frac{\mu mg \cos \theta (v_x \hat{i} + v_y \hat{j})}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad (67)$$

donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

La ecuación de movimiento en la expresión (67) es una ecuación vectorial que tiene las siguientes dos ecuaciones escalares como componentes [30]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu mg \cos \theta v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad (68)$$

y

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \sin \theta - \frac{\mu mg \cos \theta v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}. \quad (69)$$

La solución analítica [31] de las Ecs. (68) y (69) es difícil de establecer y resolver para estudiantes de primer año universitario de Física, por ello se prefiere aplicar el método numérico de Euler de medio paso en dos dimensiones, como el descrito en la Tabla I.

En la Fig. 8 se tiene la trayectoria de un disco de masa $m = 0.05$ kg que se desplaza sobre un plano inclinado un ángulo $\theta = 20^\circ$ y con coeficiente de fricción de $\mu = 0.2$. El disco parte del origen de coordenadas, con una velocidad $\vec{v}_0 = 2\hat{i} + 2\hat{j}$.

El alcance horizontal del disco bajo las condiciones que se observan en la Fig. 7 está limitado, pues de acuerdo a la expresión (67), el componente- x de la fuerza de fricción sobre el disco, dependiente de la componente- x de la

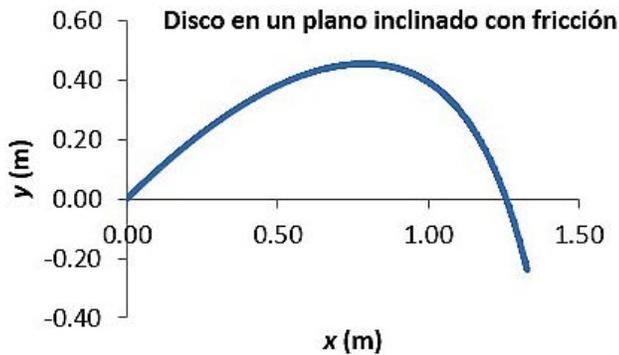


FIGURA 8. Movimiento de un disco sobre un plano inclinado con fricción.

velocidad y su magnitud, es opuesta al movimiento del disco en esta dirección, de tal forma que la velocidad del disco en la dirección del eje de las x 's disminuye a cero y por consiguiente, el disco tiene un alcance máximo. En la dirección del eje de las y 's, la componente- y de la fuerza de fricción dependiente de la componente- y de la velocidad y de su magnitud es opuesta al movimiento del disco en esta dirección, sin embargo, cuando el disco desciende por el plano inclinado, la componente del peso del disco está a favor del movimiento del disco, de tal manera que cuando $v_x = 0$ m/s, el movimiento ocurre solo en la dirección- y . de tal manera que:

$$m \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} = -mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta \quad (70)$$

es la ecuación de movimiento del movimiento final del cuerpo.

La fuerza neta que se ejerce sobre el disco cuando su movimiento es solamente hacia abajo del plano inclinado, según la expresión (70), es una fuerza constante y el movimiento final del disco es un movimiento uniformemente acelerado en la dirección- Y del plano inclinado.

Otras cantidades físicas que completan la descripción del comportamiento del sistema mecánico estudiado pueden derivarse de los valores obtenidos de la solución numérica de la ecuación de movimiento. Este es el caso de la Fig. 9, don-

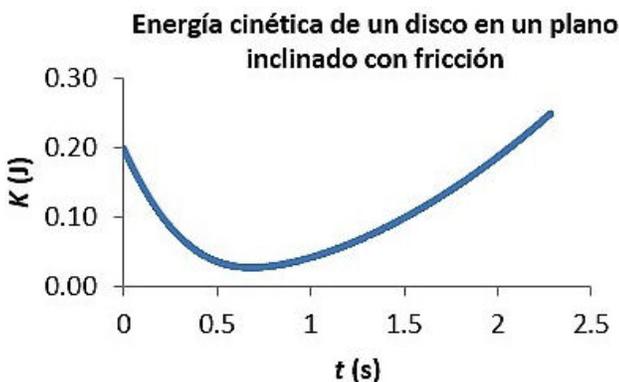


FIGURA 9. Energía cinética del disco sobre un plano inclinado con fricción.

de se ha graficado la energía cinética K del disco que se mueve en un plano inclinado con fricción. Como puede observarse, la energía cinética inicial disminuye según se mueve el disco hacia arriba del plano inclinado hasta alcanzar un valor mínimo, a partir del cual la energía cinética aumenta indefinidamente debido a que el disco cae sobre el plano inclinado bajo una fuerza constante [32].

7. Discusión

La mayoría de los sistemas mecánicos modelados por la segunda ley de Newton son difíciles de modelar en el primer año de una carrera de Física o de Ingeniería, debido a que exigen conocimientos avanzados de matemáticas para la solución analítica de ecuaciones diferenciales, los cuales no están al alcance de los estudiantes en ese nivel de estudio.

Sin embargo, con la introducción de métodos numéricos de solución de las ecuaciones de movimiento, los profesores y estudiantes disponen de un recurso matemático poderoso que les permite estudiar diversos sistemas mecánicos tanto teórica como experimentalmente y enfocar el objetivo de estudio al análisis físico de la dinámica de los movimientos a partir de las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento.

Con este recurso a mano, el profesor puede discutir con sus estudiantes a profundidad los sistemas mecánicos complejos, así como y el planteamiento y la solución de las ecuaciones de movimiento correspondientes, como las examinadas aquí en las Ecs. (56), (58), (62) a (64) y (67). Con las soluciones gráficas, los alumnos tienen la posibilidad de interpretar la dinámica de los sistemas mecánicos por sí mismos y de discutirlos con el profesor, quién podrá indagar en los estudiantes la inclusión de preconceptos en sus argumentaciones, el uso correcto de conceptos o la formación de nuevos conceptos.

La modelación numérica y su comparación con el experimento es una estrategia de enseñanza que el profesor dispone con estas soluciones para lograr que los estudiantes sigan una metodología de investigación autónoma con el apoyo del docente.

La perspectiva de la solución numérica va más allá de solo "descubrir" la dinámica del sistema mecánico que se estudia, pues al lograr su confirmación con el experimento, se tiene un simulador programado de sistemas mecánicos análogos al estudiado y que el profesor puede examinar y discutir con sus estudiantes para analizar enfoques distintos del mismo fenómeno o inclusive de nuevos, que físicamente parecen diferentes y que desarrollan la creatividad de los estudiantes.

La estrategia de aprendizaje llevada a cabo por los estudiantes para analizar los fenómenos de movimiento que incluyen la aplicación e interpretación de las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento junto con la comparación con el experimento desarrolla en ellos habilidades de pensamiento que favorecen su curiosidad y creatividad en el quehacer científico [33].

8. Conclusiones

Un sistema mecánico se modela por su ecuación de movimiento y la solución de esta ecuación se obtiene a través de métodos analíticos o numéricos. Las soluciones de las ecuaciones de movimiento por métodos analíticos son complejas en general y exigen un nivel de conocimientos matemáticos avanzados, por lo tanto no siempre es fácil modelar un sistema mecánico dado [34].

Por otra parte, las soluciones numéricas establecidas mediante ecuaciones algebraicas iterativas son fáciles de computar utilizando diversos programas de computadora y de aplicar a diversos sistemas mecánicos utilizando el mismo método numérico.

La aplicación de los métodos de Euler de medio paso a cuatro sistemas mecánicos muestra cómo diferentes sistemas mecánicos pueden modelarse mediante sus ecuaciones de movimiento y sus soluciones con el mismo método numérico en una o dos dimensiones, sin ningún cambio en la solución numérica. Los únicos cambios que se hacen al aplicar el método numérico a diferentes sistemas mecánicos son los correspondientes a la fuerza neta, a los parámetros del movimiento, a las condiciones iniciales y al tamaño del intervalo de tiempo utilizado, que no afectan las ecuaciones iterativas que se usan para computar el método numérico.

El hecho de usar un mismo método numérico para modelar diferentes sistemas mecánicos permite enfocar la atención al comportamiento dinámico de estos sistemas con base en las soluciones numéricas obtenidas bajo una misma metodología de solución matemática, que posibilita a los estudiantes analizar con profundidad un sistema mecánico cambiando solo las condiciones iniciales o los parámetros que lo definen.

Con la metodología de solución numérica, los estudiantes pueden modelar diversos sistemas mecánicos, cuyos comportamientos dinámicos podrán interpretar por ellos mismos y discutir con su profesor para un acertado manejo de conceptos y la elaboración de nuevos conceptos.

La simulación de variantes de los sistemas mecánicos modelados o aún de nuevos sistemas mecánicos a partir de las soluciones numéricas obtenidas es un recurso disponible por los estudiantes y su profesor para discutir creativamente enfoques novedosos de los fenómenos de movimiento.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo otorgado por el Instituto Politécnico Nacional mediante las becas COFAA, EDD y el proyecto de investigación SIP 20200825 de la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN.

-
1. N. Bellomo, L. Preziosi and A. Romano, *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica*[®] (Birkhäuser, Berlin, 2000).
 2. A. L. García, *Numerical methods for physics* (Prentice Hall, USA, 2000).
 3. S. Eubank, T. Miner, T. Tajima, and J. Wiley., *Am. J. Phys.* **57** (1989) 457. <https://doi.org/10.1119/1.16002>
 4. M. J. Medin, *Lat. Am. Carib, Journal of Engineering Education* **12** (2007) 75.
 5. Ch. Misner y P. Cooneyk, *Spreadsheet Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1991).
 6. I. A. Hallou and D. Hestenes, *Am. J. Phys.* **55** (1987) 455. <https://doi.org/10.1119/1.15130>
 7. M. D'Anna, *Modelling in the classroom: Linking physics to other disciplines and to real-life phenomena*, Proceedings of the 2006 GIREP conference: Modeling in Physics and Physics Education, Amsterdam, Netherlands, (August 20-25, 2006) pp. 111-126.
 8. D. Hestenes, *Notes for a Modeling of Science*, Cognition and Instruction, Proceedings of the 2006 GIREP conference: Modeling in Physics and Physics Education. Amsterdam, Netherlands, (August 20-25, 2006) pp. 34-65.
 9. A. González *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **2** (2008) 170.
 10. D. Hestenes, *Modelling Methodology for Physics Teacher*, The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities. Proceedings of International Conference on Undergraduate Physics Education, College Park, U.S.A., (August, 1996) pp. 935-957.
 11. J. Benacka and I. Stubna, *The Physics Teacher* **43** (2005) 432. <https://doi.org/10.1119/1.2060639>
 12. G. Vargas, A. Carlos, *Introducción al método de perturbaciones* (IIMAS-FENOMECE, UNAM, México, 2004).
 13. S. López, E. A. Veit y I. S. Araujo, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38** (2016) e2401. <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0031>
 14. L. A. Ribeiro Junior, M. F. Cunha, F. Marcelo and C. C. Laranjeiras, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **34** (2012) 1. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172012000400023>
 15. I. Gatland, *Am. J. Phys.* **62** (1994) 259. <https://doi.org/10.1119/1.17610>
 16. H. D. Salomone, N. A. Olivieri, M. E. Véliz and L. A. Raviola, *Eur. J. Phys.* **39** (2018) 035002. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aaa34b>
 17. M. Valladares, P. Goldstein, C. Stern, and A. Calles, *Rev. Mex. Fís.*, **49** (2003) 166.
 18. R. Buzzo, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **1** (2007) 19.
 19. A. González y H. C. Mora, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **4**, Suppl. **1** (2010) 928.
 20. L. H. Cadwell, *Am. J. Phys.* **64** (1996) 917. <https://doi.org/10.1119/1.18122>
 21. M. Paetkau, M. Bahniwal and J. Gamblen, *Phys. Teach.* **46** (2008) 307. <https://doi.org/10.1119/1.2909753>

22. A. H. Munguía, *Phys. Teach.* **45** (2007) 278. <https://doi.org/10.1119/1.2731272>
23. C. Saraiva, *Physics Education* **42** (2007) 311. <https://doi.org/10.1119/1.2731282>
24. A. Vidaurre, J. Riera, J. A. Monsoriu and M. H. Giménez, *Eur. J. Phys.* **29** (2008) 335. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/29/2/014>
25. M. A. López-Mariño, J. A. Hernández-Olvera, L. A. Barroso, y J. C. Trujillo Caballero, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **39** (2017) e2303. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0174>
26. G. R. Fowles y G. L. Cassidy, *Analytical Mechanics*. Seventh Edition (Thomson Brools/Cole, USA, 2005).
27. R. Espejel y A. Calles, *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales*. (Facultad de Ciencias, UNAM, 2019).
28. L. N. Virgin, T. C. Lyman and R. B. Davis, *Am. J. of Phys.* **78** (2010) 250. <https://doi.org/10.1119/1.3263169>
29. C. Medina and L. Cudmani, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38** (2016) e2306. <https://doi.org/10.1590/S1806-11173822051>
30. P. Onorato, D. Mascoli and A. DeAmbrosis, *Am. J. Phys.* **78** (2010) 1120. <https://doi.org/10.1119/1.3471936>
31. C. Aghamohammadi and A. Aghamohammadi, *Eur. J. Phys.* **32** (2011) 1049. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/4/017>
32. R. Eisberg and L. Lerner, *Physics: Foundations and Applications Vol I* (McGraw-Hill, USA, 1981).
33. A. González, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1286** (2019) 012036. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1286/1/012036>
34. P. Laws, *Am. J. Phys.* **72** (2004) 446. <https://doi.org/10.1119/1.1649964>