

Euler y la mecánica

J.E. Marquina

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad de México 04510, México,
e-mail josemarquina@ciencias.unam.mx

Received 2 October 2018; accepted 6 November 2018

En este trabajo se presentan las principales aportaciones de Leonhard Euler a la mecánica, que van desde la invaluable transcripción de la mecánica newtoniana al lenguaje del cálculo diferencial e integral, hasta su peculiar interpretación, en términos de la impenetrabilidad, de la Tercera Ley de Newton, pasando por su profunda valoración del concepto de inercia y su aportación relativa a plantear la Segunda Ley de Newton en coordenadas cartesianas.

Descriptores: Historia de la física; filosofía de la física; mecánica clásica.

In this work it is presented the Leonhard Euler more important contributions to mechanics, from the invaluable transcriptions of the newtonian mechanics to integral and differential calculus, up to his peculiar interpretation of the Newton's Third Law in terms of the impenetrability, going through his profound evaluation about the inertia concept and his great idea to pose the Newton's Second Law in cartesian coordinates.

Keywords: History of physics; philosophy of physics; classical mechanics.

PACS: 01.65+g; 01.70+w; 45.20.Dd

Introducción

Euler reveló las desventajas del modelo axiomático-geométrico de Newton en los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [1] (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural) de 1687, planteando las bondades de utilizar al Análisis Matemático para la solución del problema del movimiento. Con esta finalidad utilizó la versión leibniziana del Cálculo Diferencial e Integral.

Los principios generales de la Mecánica son discutidos por Euler en muchos de sus trabajos, pero de manera especial en:

- a) *Mechanica Sive Motus Scientia Analytice Exposita* [2], (Mecánica o ciencia del movimiento descrita analíticamente) de 1736.
- b) *Anleitung zur Naturlehre* [3], (Introducción a la Ciencia Natural) probablemente escrito entre 1744 y 1748, aunque no fue publicado hasta 1862.
- c) *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général* [4], (Investigaciones sobre el movimiento de los cuerpos celestes, en general) de 1747.
- d) *Reflexions sur l'espace et le tems* [5], (Reflexiones sobre el espacio y el tiempo) publicado en 1750.
- e) *Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique* [6], (Descubrimiento de un nuevo principio de la Mecánica) publicado en 1752.
- f) *Recherches sur l'origine des forces* [7] (Investigaciones sobre el origen de las fuerzas) publicado en 1752.
- g) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* [8], (Teoría del movimiento de los sólidos o cuerpos rígidos) de 1765.

Una fuente adicional para entender la concepción euleriana de la Mecánica son las *Lettres à une princesse d'Alemagne sur divers sujets de physique & de philosophie* [9] (Cartas a una Princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía), escritas entre 1760 y 1772.

En estos trabajos, Euler desarrolló, en palabras de Paul Stockel, editor de la *Mechanica*, "...una aproximación totalmente nueva de la representación teórica de la mecánica, diferente a la axiomática de Newton en los *Principia*" [10].

En palabras del propio Euler, el nombre de Mecánica ha sido "...usualmente aplicado a la ciencia que trata del equilibrio de las fuerzas y la comparación entre ellas, más que a las circunstancias que expliquen la naturaleza del movimiento, su generación y cambios" [11], pero aclarando que, en discusiones más recientes, el término se ha reservado para el análisis de la ciencia del movimiento, la cual tiene realmente su fundamento en los trabajos de Galileo y que culmina con los *Principia* de Newton [12]. Sin embargo, y dado que están escritos sin utilizar Análisis Matemático, "...las proposiciones no se pueden seguir con suficientes claridad y distinción" [13], razón por la cual es necesario subsanar esta falla utilizando el método analítico para reconstruir la Mecánica, lo cual, lleva a Euler a señalar, con orgullo, que ha "...incrementado nuestro conocimiento de la ciencia, proveyéndola de muchos métodos inusuales, con los que, es necesario admitir, ambas, la mecánica y el análisis, han crecido más que un poco" [14].

Para Euler, en su obra se encontrarán cosas planteadas por sus antecesores, junto con otras que son de él, las cuales han sido "...ordenadas convenientemente, y demostradas por el método analítico" [15].

Así, en el prefacio de la *Mechanica*, tratado en dos volúmenes y en el que sienta las bases de todo su planteamiento relativo a la Mecánica, los temas estarán ordenados de forma que en el primer volumen se analiza el movimiento de puntos que se mueven libremente, mientras que en el segundo volumen, el movimiento no es libre.

En el primer capítulo, se explican las "... propiedades generales del movimiento y las propiedades usuales de la rapidez, distancia y tiempo, mostrando las leyes generales de la naturaleza para el caso de un cuerpo libre, no afectado por fuerzas" [16], planteando, ya desde el prefacio, la idea rectora de la concepción euleriana del movimiento, la idea de que un cuerpo en reposo "... permanece en su estado de reposo para siempre" [17] y si se está moviendo "... se moverá siempre con la misma rapidez en la misma dirección." [18]. Para Euler, la conservación del estado, de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, es una propiedad esencial de los cuerpos.

La inercia

Ya desde el prefacio de la *Mechanica*, Euler adelanta que el efecto de conservación del estado, es debido a la fuerza de inercia, siguiendo a Newton, pero acotando que esta fuerza de inercia no es como el resto de las fuerzas, como por ejemplo la gravedad, que son las responsables del cambio en el estado de reposo o movimiento uniforme de los cuerpos. A diferencia de la fuerza de inercia, que es una propiedad interna, las fuerzas son poderes externos al cuerpo, que modifican el estado de éste.

En la Proposición 7 de la *Mechanica*, Euler plantea que "Un cuerpo permanece en su estado de reposo absoluto, a menos que sea obligado a moverse por alguna causa externa." [19]. En la demostración, Euler apela al principio de razón suficiente para mostrar que en ausencia de alguna interferencia externa, el cuerpo permanecerá perpetuamente en reposo, debido a la naturaleza misma de los cuerpos. La demostración de esta proposición es rematada con Q.E.D. (Quod erat demonstrandum).

En la Proposición 8, se plantea el complemento de la proposición anterior, al señalar que un "... cuerpo en movimiento absoluto uniforme siempre se moverá con la misma rapidez ahora, que en los tiempos primeros, a menos que una causa actúe o haya actuado sobre él," [20]. Al igual que en la Proposición 7, la demostración de la Proposición 8 es rematada con Q.E.D.

Más adelante, en la Definición 9, Euler plantea que la "... fuerza de inercia en todos los cuerpos es la que faculta al cuerpo a mantener su estado de reposo o de continuar en su estado presente de movimiento en línea recta." [21].

Llama la atención la forma de avanzar de Euler, pues plantea dos proposiciones, la 7 y la 8, con sus respectivas demostraciones, en las que separa el caso del reposo y el movimiento uniforme para describir la permanencia en el estado correspondiente y más adelante, señala que es la fuerza de inercia la responsable de este comportamiento, pero plan-

teándolo no a la forma de una demostración, sino como una definición.

En el Scholium posterior a la Definición 9, Euler señala que fue "Kepler, el primero que planteó esta noción y le atribuyó una fuerza que tienen todos los cuerpos para resistir a todo aquello que intenta modificar su estado..." [22], agregando que "... esta particular fuerza de resistencia tiene su origen en la facilidad de permanecer en reposo o de moverse continuamente." [23].

En la *Reflexiones sur l'espace et le tems*, de 1750, Euler empieza su escrito señalando que: "Los principios de la mecánica han sido establecidos ya tan sólidamente, que sería una gran equivocación pretender aún dudar de su verdad. Incluso aunque no estuviéramos en condiciones de demostrarlos mediante los principios generales de la metafísica, el maravilloso acuerdo de todas las conclusiones que se obtienen por medio del cálculo entre todos los movimientos de los cuerpos sobre la tierra, tanto sólidos como líquidos, e incluso entre los movimientos de los cuerpos celestes, sería suficiente para poner su verdad fuera de duda. Es, pues, una verdad indiscutible que un cuerpo que esté en reposo permanecerá perpetuamente en reposo, a menos que sea perturbado en este estado por fuerzas extrañas. Será asimismo cierto que un cuerpo que haya sido puesto en movimiento, continuará perpetuamente con la misma velocidad y en la misma dirección, con tal que no encuentre obstáculos contrarios a la conservación de este estado." [24].

Las reflexiones de Euler, en torno a la Mecánica, continuaron, de forma que la *Theoria motus* de 1765, empieza con una larga sección de seis capítulos titulado "Consideratio Motus in Genere" (Consideraciones del Movimiento en General), que está dedicado al análisis del movimiento de masas puntuales. Esta sección no es, simplemente, una repetición de lo dicho por Euler en su *Mechanica* de 1736, sino que muestra los avances en este campo, en los 29 años que separan ambas obras.

El capítulo 1 empieza con la Definición 1 en la que Euler señala: "Así como un cuerpo en reposo permanece perpetuamente en el mismo lugar, un cuerpo en movimiento continúa cambiando su posición." [25], agregando, en el Scholium, que "... nosotros investigamos únicamente al verdadero reposo o movimiento, como propiedades innatas..." [26], ya que, como señala en la explicación a la Definición 3, "... niego que haya la mínima diferencia entre movimiento o reposo..." [27] agregando que igualmente "... niego que el movimiento o el reposo impliquen algún cambio interno del cuerpo." [28].

Los principios internos, en el discurso euleriano, son aquellos que, como señala en la Explicación 1 a la Definición 9, "... están presentes en los cuerpos, por razón de los cuales su estado de movimiento o reposo continúan" [29], lo que reafirma en el Axioma 2, al señalar que: "Un cuerpo, que se encuentra absolutamente en reposo, si no está sujeto a alguna acción exterior, persistirá indefinidamente en su estado de reposo." [30].

El Axioma 2 se complementa con el Axioma 3 en el que se señala que un "... cuerpo, que se mueve absolutamente, si no está sujeto a alguna acción externa, continúa moviéndose uniformemente a lo largo de la misma dirección" [31].

Siguiendo la peculiar estructura de las obras de Euler, los Axiomas 2 y 3, se combinan en la Definición 10, en la que se plantea que: "Si un cuerpo está absolutamente en reposo o movimiento uniforme en una dirección, se dice que persiste en el mismo estado." [32].

En la Definición 11, se señala que esta "... cualidad de los cuerpos ... es llamada inercia, y algunas veces fuerza de inercia." [33].

El término fuerza de inercia, que se utiliza, a decir de Euler, "algunas veces", es una referencia a él mismo que así le llama en la *Mechanica* y en primera instancia a Newton, que en la Definición 3 de los *Principia*, utiliza este término.

En el Scholium posterior a la definición, se aclara que "... si la fuerza es definida por alguna causa, la cual cambia el estado del cuerpo, no es aceptable este significado ... Por lo que, para evitar confusiones, omitiremos el nombre fuerza y a esta propiedad del cuerpo la llamaremos por el simple nombre inercia." [34].

Esta idea de suprimir el término de fuerza al referirse a la inercia ya había sido planteada por Euler en las *Letras*. En particular en la Carta LXXVI, escrita en 1760, explicaba que "... no es adecuado denominar fuerza a esta cualidad de los cuerpos por medio de la cual permanecen en su estado, pues si se entiende bajo la palabra fuerza todo aquello capaz de cambiar el estado de un cuerpo, la cualidad por la que los cuerpos se mantienen en su estado es más bien lo contrario de una fuerza. Luego por ahora, algunos autores dan el nombre de fuerza a la inercia ... este abuso puede conducirnos a errores muy grandes." [35].

En el Corolario 1, que sigue al Problema 6 de la *Theoria motus*, se muestra con claridad el proyecto euleriano de descripción de los problemas del movimiento a través del método analítico, al señalarse que "... si en un movimiento rectilíneo sucede que $dds/dt^2 = 0$ [d^2s/dt^2 - en terminología actual-], entonces el movimiento debe ser atribuido a la inercia. ..." [36], donde s es la distancia y t el tiempo, y por el contrario, como señala en el Corolario 2, "... si en el movimiento rectilíneo no ocurriera que $dds/dt^2 = 0$, entonces el valor de dds/dt^2 , debe ser atribuido a alguna causa externa" [37]. En ausencia de causas externas la aceleración es cero, y si el cuerpo está sujeto a alguna fuerza, la aceleración será distinta de cero.

La inercia, tal y como la visualiza Euler, conviene tan necesariamente a todos los cuerpos como la extensión y es igual a la medida de la masa [38].

En este punto, Euler sigue totalmente a Newton, que en el comentario a la Definición 3 había planteado la proporcionalidad entre la inercia (fuerza de inercia para Newton) y la masa, definida previamente en la Definición 1 de los *Principia*.

La masa

El concepto de masa es analizado por Euler tanto en la *Mechanica* como en la *Theoria motus*. En la *Mechanica*, en la Proposición 17 del Capítulo II, relaciona a la que en este momento todavía llama fuerza de inercia, con la masa, planteando la proporcionalidad entre ambas [39] para, en la demostración, describir a la inercia como determinada por la fuerza que se requiere para cambiar el estado de reposo, ya que "... las fuerzas de inercia ... son proporcionales a estas fuerzas. Consecuentemente también las cantidades de materia están en proporción." [40]. En este sentido, la medida de la cantidad de materia estará determinada por las fuerzas impresas.

En la *Theoria motus*, en la Definición 19, Volumen I, Capítulo 3, Euler plantea, ahora como definición, no como proposición, que la "... masa de un cuerpo o la cantidad de materia es llamada la cantidad de inercia que está presente en el cuerpo, por lo cual intenta continuar en su estado presente y se resiste a todos los cambios." [41].

En el Corolario 2, posterior a la definición, señala, explícitamente, que la masa no es medida por el volumen del cuerpo sino por la fuerza necesaria para imprimir un cierto movimiento.

Llama la atención que, a diferencia de Newton, cuya definición de masa es la primera de los *Principia*, en Euler es la número 15 y se encuentra hasta el Libro 3 (del primer volumen) de la *Theoria motus*. Euler, para llegar a la definición de masa, ha discutido previamente los conceptos de inercia y fuerzas impresas, para definir, operacionalmente, a la masa en términos de éstas. Siguiendo a Jammer, se puede decir que para Euler la masa es "... un coeficiente numérico, característico de los cuerpos físicos individuales, determinado por la razón entre la fuerza y la aceleración." [42].

Las fuerzas impresas. La Segunda Ley de Newton

El Capítulo 2 de la *Mechanica* lleva por título "Relativo al efecto de las fuerzas que actúan sobre un punto libre", y en la Definición 10 se plantea que: "Una fuerza es una acción sobre un cuerpo libre que lleva al movimiento al cuerpo en reposo, o cambia el movimiento del cuerpo" [43], señalando a continuación que la "... fuerza de gravedad es una fuerza de este tipo" [44], por la que "... todos los cuerpos en la Tierra, tratan de moverse hacia abajo." [45].

En las siguientes proposiciones, Euler relaciona a las fuerzas con los cambios en la velocidad de los cuerpos llegando, en la Proposición 15, al planteamiento de las ecuaciones de la cinemática galileana. Así, en la Solución a la Proposición 15, señala que "... los incrementos de la velocidad están en proporción a los tiempos en que se producen" [46] y en el Corolario 3, integrando esta expresión, arriba a que "... las distancias descritas desde el principio del movimiento, están

en razón cuadrática de los tiempos o de las velocidades adquiridas en estas distancias” [47]. En terminología de Euler:

$$“ s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n} ” \quad [48]$$

donde s es la distancia, n es el inverso de la aceleración, c es la velocidad y t el tiempo.

En el escolio posterior a esta proposición, Euler reconoce que Galileo fue el primero en usar estos principios en la investigación de la caída de los cuerpos, pero que él no aportó ninguna demostración.

En la Proposición 19 se plantea que la acción de las fuerzas, provocan cambios en las velocidades de los cuerpos, de forma que el producto de la fuerza por el elemento de tiempo es igual al incremento de la velocidad. En terminología eulérica $dc = pdt$, donde p es la fuerza, c es la velocidad y t el tiempo.

En el Corolario 2 a la Definición, se plantea que este resultado no es solamente verdadero, sino verdadero por necesidad, pues considerar la relación con la fuerza al cuadrado, al cubo o a cualquier otra potencia lleva, necesariamente, a una contradicción, la cual no es hecha explícita por Euler, remitiendo al lector a los trabajos que sobre esta cuestión ha elaborado Daniel Bernoulli [49].

Ya en el Capítulo 3 de la *Mechanica*, que se refiere a la caída de los cuerpos, en el Escolio 1 a la Proposición 26, se plantea que la “... aceleración o el cambio de velocidad que es impresa en el cuerpo en un tiempo dado ... es proporcional a la fuerza dividida entre la masa del cuerpo” [50], que es el enunciado de la Segunda Ley de Newton, lo cual es corroborado por Euler al señalar que este efecto es llamado por Newton fuerza acelerante.

Las diferencias con Newton son evidentes, mientras que Newton ha planteado la idea de fuerza impresa en la parte de las definiciones, con las que empiezan los *Principia* y ha planteado su Segunda Ley en la sección de Axiomas o Leyes de Movimiento, inmediatamente después de las definiciones (con su escolio de los absolutos), Euler ha ido construyendo lentamente su corpus teórico, a partir de demostraciones analíticas que le han permitido arribar, de manera formal, a los planteamientos axiomáticos de Newton.

De igual manera, en la *Theoria motus*, el concepto de fuerza y la Segunda Ley de Newton, son construidos pacientemente. En el Capítulo III, Volumen 1, titulado “Concerniente a las causas externas del movimiento o fuerzas”, en la Definición 12 plantea que “... fuerza es el nombre dado a la [acción] que persuade de cambiar el estado absoluto de los cuerpos, el cual se debe a causas externas, dado que el cuerpo permanecerá en su propio estado debido a causas internas” [51], para en la Explicación reiterar que “... es necesario que la causa del cambio, la fuerza, siempre exista fuera del cuerpo” [52].

Más adelante, y dado que en la Definición 15 ha definido a la masa, en el Problema 9, al preguntarse por el efecto de una fuerza sobre un corpúsculo, en los Corolarios 1, 2 y 3, posteriores a este problema, se plantea que si la aceleración

del movimiento es conocida, la cual es dds/dt^2 o dv/dt , la “ fuerza actuante será de la forma $p = (A/\lambda)(dds/dt^2)$ o $p = (A/\lambda)(dv/dt)$ ” [53], donde p es la fuerza, A la masa, λ una constante relativa a las unidades, s la distancia y t el tiempo, con lo que arriba a la Segunda Ley.

En la parte final de la *Theoria motus*, en el capítulo 1 del Volumen 3, se encuentra un señalamiento muy relevante relativo al uso de coordenadas cartesianas, según el cual los movimientos “... pueden siempre ser descompuestos de infinitas formas en tres movimientos, cada uno de los cuales con su propia velocidad, de forma que, considerándolos todos juntos, nos den no sólo la rapidez del punto, sino también su dirección, lo cual es muy útil para los cálculos, ya que nos libra de aburridos cálculos concernientes a la curvatura de la trayectoria del punto...” [54].

Euler fue el primero que planteó la Segunda Ley de Newton en coordenadas cartesianas. En sus *Recherches sur le mouvement des corps celestes* en general, de 1747, en el Lema XVIII, se plantea encontrar el cambio instantáneo del movimiento de un cuerpo de masa M , sujeto a una fuerza, para lo que en la Solución, se apela a los cambios instantáneos de movimiento, expresados en tres ecuaciones:

$$“ 2 \frac{ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad 2 \frac{ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad 2 \frac{ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M} ” \quad [55]$$

donde X , Y , Z son las componentes de la fuerza motriz absoluta en cada uno de los tres ejes de coordenadas

Para entender el dos que aparece en las ecuaciones relativas a la Segunda Ley, para cada uno de los componentes, hay que ver el Corolario I que viene a continuación del Lema XVIII, en el que se señala: “La velocidad del cuerpo siguiendo la dirección M_x será igual a dx/dt , siguiendo $M_y = dy/dt$ y siguiendo $M_z = dz/dt$ y esto afirma que los cuadrados de estas fórmulas, a saber dx^2/dt^2 ; dy^2/dt^2 ; dz^2/dt^2 , experimentan las mismas alturas que son adecuadas a estas velocidades. Y es a causa de esta relación que las fórmulas diferencio-diferenciales son multiplicadas por el número 2.” [56].

Este corolario hace referencia al principio de que la velocidad al cuadrado es proporcional a la distancia, de forma que si $(dx/dt)^2 = G_x$, entonces, derivando se obtiene $2(dx^2/dt^2) = G$.

El hecho de utilizar coordenadas cartesianas puede parecer evidente ya que, como señala Truesdell, “... hoy esta posibilidad es tan obvia que muchos científicos creen que el propio Newton usó coordenadas cartesianas, pero por supuesto que no es así.” [57]. De hecho, Lagrange en su *Mechanique Analytique* [58] de 1788, dijo que fue McLaurin en su *Traite des fluxions* de 1742, el primero en usar coordenadas cartesianas para escribir la Segunda Ley, pero, a decir de Truesdell [59], en el libro de McLaurin no hay ningún planteamiento general para las leyes de la Mecánica, ni ejemplo alguno formulado en coordenadas cartesianas. Para Truesdell, el primero que utilizó coordenadas cartesianas para resolver problemas mecánicos fue Johann Bernoulli en

De pendulis multifilibus, que forma parte de *Propositions variae mechanica-dynamicae* de 1742 [60].

La impenetrabilidad. La tercera ley de Newton

A diferencia de Newton, que asume que los cuerpos cambian su estado por una fuerza impresa, Euler cambia el énfasis atribuyendo el cambio a causas externas que no son otras que las interacciones con otros cuerpos. Podría decirse que Euler está haciendo una reinterpretación, de corte cartesiano, de la dinámica newtoniana. En palabras de Suisy “... Euler distingue entre las fuerzas y la propiedad o capacidad de los cuerpos para causar esta fuerza.” [61].

En las *Recherches sur l'origine des forces*, Euler señala que esta capacidad (habilidad) de los cuerpos, es causada por la impenetrabilidad. De hecho, la impenetrabilidad es una propiedad tan relevante en el discurso euleriano, que en ella recae el hecho de que los cuerpos sean diferentes de otras cosas, permitiendo, incluso, que se defina a los cuerpos en términos de ella. Si algo es impenetrable, es, necesariamente, un cuerpo, definiéndose, en la Definición 13 de la *Theoria motus*, a la impenetrabilidad como “...la propiedad de los cuerpos, por la cual dos o más cuerpos son incapaces de estar en el mismo lugar, en el mismo tiempo.” [62].

En el Capítulo 3 de la *Theoria motus* se reitera la importancia de la impenetrabilidad, al señalarse que es ella la responsable de que dos cuerpos que interactúan no puedan persistir en sus respectivos estados, de forma que “...la sola impenetrabilidad puede ser considerada como el origen de todas las fuerzas.” [63].

En las *Lettres*, Euler reafirma la noción de impenetrabilidad como aquella propiedad capaz de “... suministrar todo tipo de fuerzas, tanto grandes como pequeñas, según lo exijan las circunstancias, siendo una fuente inagotable” [64], de forma que la impenetrabilidad “... contiene el verdadero origen de las fuerzas ... ésta es la verdadera solución del gran misterio que atormentó a los filósofos.” [65].

La impenetrabilidad se convierte, en el discurso euleriano, en la condición necesaria y suficiente para determinar las propiedades de los cuerpos, incluyendo las nociones de movilidad, inercia e incluso extensión, pues es “... necesario que cuando algo sea impenetrable, sea extenso ... pues sin extensión es imposible concebir la impenetrabilidad.” [66].

La noción de impenetrabilidad, posibilita a Euler a plantear, en el Parágrafo XXIX de las *Recherches sur l'origine des forces* que “... si dos cuerpos A y B son presionados uno contra el otro con una fuerza igual a f , el cuerpo A repele al cuerpo B , a causa de su impenetrabilidad, con una fuerza f , y recíprocamente el cuerpo B , a causa de su impenetrabilidad, repele al cuerpo A con la misma fuerza f .” [67]. Para, en el Parágrafo XXXI, plantear que la “... igualdad de fuerzas depende del gran principio de igualdad entre la acción y la reacción [que] es una continuación necesaria de la naturaleza de la penetración.” [68].

Este resultado es lo que comúnmente se conoce como la Tercera Ley de Newton, a la que Euler ha arribado, formal-

mente, a partir de su concepto de impenetrabilidad, a diferencia de Newton que la planteó, en los *Principia*, de forma axiomática.

Más adelante, en las *Recherches sur l'origine des forces*, plantea que si se tienen dos cuerpos de masa A y B , que interactúan, los cambios de velocidad vendrán dados por “ $Adv = -Pdt$ y $Bdu = Pdt$ ” (68), donde P es la fuerza de interacción, que es igual en magnitud y opuesta en dirección, por lo que $Adv + Pdt = 0$, con lo que, integrando, se obtendría que $Av + Bu = cte$, ecuación que, como señala Euler es “... independiente de la fuerza P .” [70].

Esta ecuación representa el principio de conservación del centro de gravedad, ya que, en palabras de Euler “... el movimiento del centro de gravedad no se ve alterado por la acción de los cuerpos durante el choque.” [71].

La acción a distancia

La idea euleriana de que la impenetrabilidad es la propiedad responsable de la aparición de fuerzas lo enfrenta al problema de explicar a la que el propio Euler considera como el prototipo de las fuerzas, la fuerza de gravedad. Curiosamente, el escrito en el que con mayor claridad, e incluso profundidad, trata el tema es en las *Lettres*, las cuales tienen un carácter que podríamos denominar de divulgación. En estas cartas, Euler señala que “Los filósofos ingleses mantienen que es una propiedad esencial a todos los cuerpos el atraerse mutuamente, como una inclinación natural de unos cuerpos a otros, en virtud de la cual los cuerpos se esfuerzan en aproximarse mutuamente, como si estuvieran provistos de algún sentimiento o deseo” [72], lo cual es totalmente inaceptable para Euler, pues otros filósofos, entre los que él se encuentra “... consideran este parecer como absurdo y contrario a los principios de una filosofía razonable” [73].

Para la solución de este problema, Euler apela a la existencia de una “...materia sutil que llena todo el espacio del cielo, aunque no sepamos cómo” [74]. Con respecto a la existencia de esta sustancia, de este éter sutilísimo, no cabe la duda “... de que todo el mundo está lleno de materia ... cuando extraemos el aire de algún espacio, el éter sustituye al aire. Este mismo éter llena también el espacio de cielo entre los cuerpos celestes” [75].

Euler visualiza al éter no a la manera de Newton, que en el Escolio General de los *Principia* hablaba de un “espíritu sutilísimo” responsable, entre otras cosas, de la gravedad [76] y en la *Opticks, or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light* (óptica o Tratado de las Reflexiones, Refracciones, Inflexiones y Colores de la Luz) en la edición de 1717 (segunda edición inglesa), en la que agregó ocho cuestiones, que son las llamadas cuestiones del éter (cuestiones de la 17 a la 24 en la edición definitiva de la óptica) [77].

La teoría euleriana del éter es profundamente especulativa, es una teoría ad hoc para mantener intacta a la impenetrabilidad como propiedad interna, origen de las fuerzas que

son externas y que aparecen por la interacción, y que explica el caso de la acción a distancia a través de la infinidad de interacciones con este éter, infinitamente sutil, para dotarlo, como toda la materia, de la propiedad de impenetrabilidad. En palabras de Euler, pareciera que "... el Creador haya llenado a propósito todos los espacios del cielo con una materia sutil, para crear las fuerzas que impulsan a los cuerpos unos contra otros, y ello conforma a la ley antes establecida sobre la impenetrabilidad de los cuerpos. En efecto, la materia sutil podría tener perfectamente un movimiento tal, de modo que un cuerpo en ella no pudiera conservar su estado sin ser penetrado. En este caso sería necesario que tal fuerza fuera engendrada por la impenetrabilidad tanto de la materia sutil como del cuerpo mismo" [78].

Como prueba de su planteamiento relativo al éter, Euler se conforma con que sus adversarios filosóficos no hayan podido demostrar sus planteamientos ya que: " Si hubiera un sólo caso en el mundo, en el que dos cuerpos se atrajeran sin que el espacio entre ellos estuviera lleno de materia sutil, se podría admitir la realidad de la atracción, pero como este caso no existe ... se tiene razón al dudar de ello, y también de rechazarlo" [79].

Las elucubraciones eulerianas en torno al éter, le permiten, supuestamente, explicar los sorprendentes fenómenos de la electricidad, ya que "... todos los fenómenos de electricidad son una continuación natural de la carencia de equilibrio en el éter, de manera que, en todos los lugares donde el equi-

librio del éter se modifica, aparecen fenómenos de electricidad" [80]. Para Euler "... la electricidad no es otra cosa que la perturbación en el equilibrio del éter" [81].

Dado que el éter debe tener una elasticidad mucho mayor que el aire, otros muchos fenómenos deben de poderse explicar en base a él, tales como la luz, que sería "... una agitación o estremecimiento originado en las partículas del éter ..." [82], e incluso los fenómenos magnéticos pueden entenderse apelando al éter, en una delirante danza de canales, torbellinos y materias magnéticas [83].

Conclusiones

La obra de Euler en Mecánica, representa una lectura crítica de la obra de Newton, específicamente de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en la que llega, incluso, a acercarse al espíritu cartesiano, como sucede con su valoración extrema de la impenetrabilidad como causa explicativa de la Tercera Ley de Newton, y de la acción a distancia.

Esta reinterpretación euleriana, que en muchos casos pareciera que más que explicar los fenómenos los complica, como ocurre con su omnipresente y especulativo éter, tiene la grandísima virtud de tener un carácter matemático vinculado al Análisis Matemático, que permitió la evolución de la mecánica, que en la versión de Newton, estaba planteada geoméricamente.

1. Newton, I., (1982), *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*, Editora Nacional, Madrid. A partir de aquí se referirá como *Principia*.
 2. Euler, L., (1736), *Mechanica Sive Motus Scientia Analytice Exposita*, Vol 1 y 2, en Euler Archive E-15 y E-16, <http://eulerarchive.maa.org>. Traducción de E-15 al inglés de Ian Bruce. A partir de aquí se referirá como *Mechanica*.
E-15 y E-16 corresponden al índice Enestrom, elaborado por el matemático Gustav Enestrom entre 1910 y 1913. Enestrom enumeró 866 trabajos distintos de Euler.
 3. Euler, L., (1862), *Anleitung zur Naturlehre*, E-842. Traducción al inglés de Ernest Hirsch.
 4. Euler, L., (1747), *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*, E-112.
 5. Euler, L., (1750), *Reflexions sur l'espace et le tems*, E-149. Traducción al inglés de Michael Saciolo y Peter Wake.
 6. Euler, L., (1752), *Decouverte d'un nouveau principe de Mécanique*, E-177. Traducción al inglés de Stacy G. Langton.
 7. Euler, L., (1752), *Recherches sur l'origine des forces*, E-181.
 8. Euler, L., (1765), *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, E-289. Traducción al inglés de Ian Bruce. A partir de aquí se referirá como *Theoria motus*.
 9. Euler, L., (2012), *Cartas a una princesa de Alemania, sobre diversos temas de Física y Filosofía*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España. A partir de aquí se referirá como *Lettres*.
 10. En Suiskey, D., (2009), *Euler as Physicist*, Springer Verlag, Berlín, Heidelberg, p. 123.
A decir de Lagrange, la *Mechanica* de Euler es la primera obra en la que se aplica el Análisis Matemático a la ciencia del movimiento, cfr. Dugas, R., (1988), *A History of Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, USA, p. 339.
 11. Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, p. 1.
 12. Cfr. Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, pp. 1 y 2.
Curiosamente, Euler se refiere a la obra de Newton como *Principia Mathematica Philosophiae*.
 13. Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, p. 2.
 14. *Ibid.*, p. 2.
 15. *Ibid.*, p.2.
 16. *Ibid.*, p. 3.
 17. *Ibid.*, p. 3.
 18. *Ibid.*, p.3.
 19. *Ibid.*, p.14.
 20. *Ibid.*, p. 16.
 21. *Ibid.*, p.18.
 22. *Ibid.*, p.18.
- Llama la atención que Euler hable de Kepler, que aunque fue el primero en referirse a esta fuerza de resistencia, no planteó el concepto de inercia, a diferencia de Descartes que la planteó con absoluta claridad en su Primera Regla para Filosofar en

- Le monde* y en las dos primeras reglas de *Principia Philosophiae*. Adicionalmente, el término fuerza de inercia fue el que utilizó Newton en la Definición 3 de los *Principia*.
23. Ibid., p. 18.
 24. Euler, L., (1988), "Reflexiones sobre el espacio y el tiempo", en *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, Alianza Editorial, México S.A., México, p. 39.
 25. Euler, L., (1765), E-289, *op. cit.*, p. 1.
 26. Ibid., p. 2.
 27. Ibid., p. 6.
 28. Ibid., p. 6.
 29. Ibid., p. 53.
 30. Ibid., p. 56.
 31. Ibid., p. 57.
 32. Ibid., p. 59.
 33. Ibid., p. 59.
 34. Ibid., p. 60.
 35. Euler, L., (2012), *op. cit.*, p. 233.
 36. Euler, L., (1765), E-289, p. 64.
 37. Ibid., p. 64.
 38. Cfr. Euler, L., (2012), *op. cit.*, pp. 229-230.
 39. Cfr. Euler, L., (1736), E-15, p. 59.
 40. Euler, L., (1736), E-15, p. 59.
 41. Euler, L., (1765), E-289, p. 95.
 42. Jammer, M., (1997), *Concepts of Mass in Contemporary Physics and Philosophy*, Dover Publications, Inc., N. Y., p. 87.
 43. Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, p. 47.
 44. Ibid., p. 47.
 45. Ibid., p. 48.
 46. Ibid., p. 56.
 47. Ibid., p. 56.
 48. Ibid., p. 56.
 49. Cfr., Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, pp. 62-63.
 50. Euler, L., (1736), E-15, *op. cit.*, p. 98.
 51. Euler, L., (1765), E-289, *op. cit.*, p. 81.
 52. Ibid., p. 81.
 53. Ibid., p. 99.
 54. En Maltese, G., (2000), "On the Relativity of Motion in Leonhard Euler's Science", *Archive for History of Exact Science*, Springer Verlag, Basel, p. 322.
 55. Euler, L., (1747), E-112, *op. cit.*, p. 103.
 56. Ibid., p. 103.
 57. En Maltese, G., (2000), *op. cit.*, p. 323.
 58. Cfr., Maltese, G., (2000), *op. cit.*, p. 323.
 59. Cfr., Maltese, G., (2000), *op. cit.*, p. 323.
 60. Cfr., Maltese, G., (2000), *op. cit.*, p. 323.
 61. Suisky, D., (2009), *op. cit.*, p. 172.
 62. Euler, L., (1765), E-289, *op. cit.*, p. 33.
 63. Ibid., p. 83.
 64. Euler, L., (2012), *op. cit.*, p. 237
 65. Ibid., p. 236.
 66. Euler, L., (1765), E-289, *op. cit.*, p. 85.
Para Euler, la movilidad y la extensión son propiedades necesarias de los cuerpos, pero no son suficientes para distinguir a los cuerpos de otras cosas. Por ejemplo, las sombras o las figuras en los espejos son extensas pero no son cuerpos. A diferencia de Descartes, para el que la extensión es la propiedad fundamental, para Euler lo es la impenetrabilidad.
 67. Euler, L., (1747), E-112, *op. cit.*, p. 433.
 68. Ibid., p. 434.
 69. Ibid., p. 437.
 70. Ibid., p. 437.
 71. Ibid., p. 438.
 72. Euler, L., (2012), *op. cit.*, p. 216.
 73. Ibid., p. 216.
 74. Ibid., p. 232.
 75. Ibid., p. 236.
 76. Cfr., Newton, I., (1982), *op. cit.*, p. 817.
 77. Cfr., Newton, I., (1977), *Óptica o Tratado de las reflexiones, refracciones, inflexiones y colores de la luz*, Alfaguara, Madrid, pp. 302-307.
 78. Euler, L., (2012), *op. cit.*, p. 239.
Llama la atención que en un escrito de 1746, llamado *Recherches Physiques sur la nature des moindres parties de la matiere* (Investigaciones físicas sobre la naturaleza de las partes más pequeñas de la materia) (E-91), en el que trata sobre la existencia de las partículas más pequeñas que componen los cuerpos, a las que denomina moléculas, al referirse al éter sutilísimo que se encuentra incluso en los intersticios de estas moléculas, señala que "... la materia que constituye al fluido sutil, la causa de la gravedad, es de una naturaleza completamente diferente de la que están hechos todos los cuerpos tangibles.", E-91, p. 7.
 79. Ibid., p. 239. En E-91, p. 8.
Euler señala que "... la propagación de la luz que es causada, sin duda, por este ... fluido sutil, muestra que su densidad debe ser miles de veces menor que la del aire, y consecuentemente varios millones de veces menor que la densidad de las moléculas de las que están compuestos los grandes cuerpos.".
 80. Ibid., p. 380.
 81. Ibid., p. 380.
 82. Ibid., p. 115
 83. Cfr., Euler, L., (2012), *op. cit.*, pp. 465-491.