

El problema de la braquistócrona en el cilindro $s^1 \times r$ con varias vueltas

H. L. Carrion S.

*Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal
do Rio Grande do Norte, Campus Universitário de Natal, RN, Brasil.*

e-mail: hectors@ect.ufrn.br

Received 10 April 2020; accepted 4 June 2020

Se presenta brevemente el problema del braquistócrona en un plano vertical. A continuación, se muestra la formulación paramétrica del problema de la braquistócrona sobre la superficie de un cilindro vertical de radio R y se encuentra la curva que resuelve este problema. Enseguida, se formula el problema del tautócrona en el cilindro y se demuestra que la curva tipo braquistócrona encontrada anteriormente tiene comportamiento tautócrono, esto es, dos partículas sueltas del reposo de puntos distintos de la curva braquistócrona llegan al punto más bajo de la trayectoria en forma simultánea. Se verifica también que la curva tipo braquistócrona en un plano vertical (cicloide invertida) es el límite de la curva tipo braquistócrona encontrada en la superficie cilíndrica cuando el radio del cilindro tiende al infinito. Posteriormente, se analiza el problema del braquistócrona entre dos puntos fijos A y B sobre la superficie cilíndrica con la condición adicional de que la partícula, antes de llegar al punto final B debe dar un cierto número de vueltas previamente definido. Se encuentra la curva que resuelve este problema y adicionalmente se halla una relación matemática que determina cuantas vueltas como máximo puede haber si al fijar los valores de las coordenadas del punto inicial (A), final (B), el radio del cilindro y g (la aceleración de la gravedad).

Descriptors: Problema del braquistócrona; cálculo variacional; soluciones con cierto número de enrolamientos.

We briefly present the brachistochrone problem in a vertical plane. Next, we present the parametric formulation of the brachistochrone problem on the surface of a vertical cylinder of radius R , and we find the curve that solves this problem. We immediately formulate the problem of the tautochrone in the cylinder, and we demonstrate that the brachistochrone curve found previously has tautochrone behavior, that is, two loose particles from the rest of the points other than the brachistochrone curve, reach the lowest point of the trajectory simultaneously. It is also verified that the brachistochrone curve in a vertical plane (inverted cycloid) is the limit of the brachistochrone curve found on the cylindrical surface when the radius of the cylinder tends to infinity. Later we analyze the brachistochrone problem between two fixed points A and B on the cylindrical surface with the additional condition that the particle before reaching the end point B must give a certain number of turns previously defined. We find the curve that solves this problem and additionally, we find a mathematical relationship that determines how many turns can be maximum if we set the values of the coordinates of the starting point (A), end (B), the radius of the cylinder and g (the acceleration due to gravity).

Keywords: Confinement; affine toda coupled to matter; solitons; quantum chromodynamics.

PACS: 04.20.Cv; 03.65.Ta; 04.80.Cc

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.276>

1. Introducción

El problema del braquistócrona en un plano vertical consiste en determinar (de entre todas las curvas físicamente posibles al unir dos puntos fijos) la curva que una partícula, partiendo del reposo, recorre en el menor tiempo posible. Se considera que el campo gravitacional que afecta la partícula es uniforme y en todas las trayectorias el camino es suave y sin fricción. En la década de 1650, uno de los problemas teóricos y al mismo tiempo prácticos era la necesidad de medir el transcurso del tiempo de una forma exacta importante en la astronomía y la navegación marítima. Para la década de 1670, Jacob Bernoulli [1] dio a conocer a la comunidad científica que la cicloide resuelve el problema de la braquistócrona y este fue uno de los primeros problemas resueltos por el cálculo variacional.

Se dice que una curva es tautócrona cuando un objeto llega a su parte más baja, en el mismo intervalo de tiempo, indistintamente del punto inicial a lo largo de la curva de donde partió del reposo. Basado en esto, Huygens desarrolló un reloj pendular, cuya medida del tiempo no dependía del tamaño del péndulo. Para ello, colocó dos cicloides inver-

tidas en cada lado del punto fijo de donde oscila el péndulo. El periodo de oscilación del péndulo es dado por la siguiente fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad (1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y R es el radio de un disco hipotético que, al rotar uniformemente y sin deslizarse en forma horizontal, genera una cicloide. En el libro *Horologium Oscillatorium* [2] (*El reloj oscilante*), Huygens demostró que la cicloide es una curva tautócrona.

Para resolver el problema del braquistócrona en un plano vertical se considera que todas las posibles trayectorias físicas seguidas por una partícula, entre dos puntos fijos, son suaves y sin fricción. Al tomar una trayectoria arbitraria entre los puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ y aplicar el principio de conservación de la energía mecánica se llega a una

fórmula integral del tipo

$$T_{[A,B]} = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y') dx$$

que determina el tiempo total de viaje de la partícula entre A y B . Aquí, $y = y(x)$ es la curva seguida por la partícula y $L(x, y, y')$ es una función de clase $C^2[a, b]$ en relación a todas sus variables y cuya forma depende del contexto del problema. $T_{[A,B]}$ es una funcional, pues relaciona a cada curva $y = y(x)$ que pasa por los puntos A y B con un número real, que es justamente el valor de la integral definida. Así, se presenta el problema elemental del cálculo variacional de terminar los extremos de la funcional

$$T_{[A,B]} = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y') dx$$

junto con las condiciones de los extremos fijos $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$. De acuerdo con la teoría del cálculo variacional, la curva o la familia de curvas que extremiza la funcional $T_{[A,B]}$ resuelve una ecuación diferencial de segundo orden, conocida como ecuación de Euler-Lagrange, que es como sigue:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2)$$

En el problema físico estudiando se tiene que:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

donde v es la velocidad escalar instantánea de la partícula y ds es el elemento diferencial de longitud de arco; a partir de esto, inmediatamente se tiene $ds = v dt$ o

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Al integrar, se tiene que

$$T_{[A,B]} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3)$$

Como las curvas consideradas son suaves entonces la diferenciabilidad está garantizada. Ya se dijo que la curva que minimiza la funcional (Ec. (3)) es una cicloide invertida en el plano vertical (plano xy), cuya ecuación paramétrica es como sigue:

$$\begin{aligned} y &= R - R \cos(\beta) \\ x &= R\beta - R \sin(\beta), \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Un problema interesante es generalizar este resultado, común en los libros de mecánica clásica a situaciones mas generales,

como por ejemplo, considerar superficies que tienen algún tipo de fricción, o al cambiar la geometría de la superficie vertical donde se encuentran todas las trayectorias posibles que unen a los dos puntos fijos. Al respecto, un caso donde todas las trayectorias posibles están confinadas en una superficie esférica se estudia en la Ref. [3]. Por su parte cuando el problema del braquistócrona se formula en la superficie cilíndrica ya es un caso conocido. Por ello, aquí se formula la versión paramétrica del problema variacional y en la Sec. 4 se estudia la condición adicional de la partícula al dar un número arbitrario de vueltas antes de llegar al punto final.

2. El problema del braquistócrona en un cilindro de sección transversal circular

En la sección anterior (1) se discutió brevemente el problema famoso e interesante del braquistócrona formulado en un plano vertical; es decir, cuando todas las trayectorias posibles de una partícula están confinadas en un plano vertical, la partícula es sometida a la acción de una fuerza de gravedad constante y vertical. Se sabe también que, en tales circunstancias, la curva plana que minimiza el tiempo de viaje, entre dos puntos fijos es una cicloide invertida. En esta sección se formula el problema del braquistócrona en una superficie cilíndrica vertical de sección transversal circular dentro de un campo gravitacional constante y vertical.

Se sabe que una superficie cilíndrica $\mathbb{S} = S^1 \times \mathbb{R}$ inmersa dentro del espacio \mathbb{R}^3 es parametrizada por la función vectorial $\Phi(\theta, z) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta), z)$, donde $z \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. El hecho de que la función Φ depende de dos parámetros es un indicativo de que los puntos de la superficie cilíndrica pueden describirse intrínsecamente con las dos coordenadas (θ, z) , con θ variando a lo largo de la sección transversal (coordenada compacta) y z variando a lo largo de la generatriz del cilindro. En estas coordenadas intrínsecas, una curva definida en la superficie cilíndrica se puede escribir así: $z = z(\theta)$, después de localizar el origen de coordenadas (z_0, θ_0) en la superficie cilíndrica en relación a las coordenadas extrínsecas (x, y, z) de espacio \mathbb{R}^3 .

Formulación del problema del braquistócrona en el cilindro

Se consideran dos puntos arbitrarios del cilindro $A = (\theta_1, z_1)$ y $C = (\theta_2, z_2)$. Se estiman también todas las trayectorias físicamente posibles que unen los dos puntos A y C , cuando la partícula se somete únicamente a la acción de la gravedad y parte siempre del reposo en A . De entre todas estas curvas suaves y sin fricción, ¿cuál de ellas minimiza el tiempo de viaje $T_{[A,C]}$? [5,6]. Para facilitar el cálculo, se considera que la coordenada z aumenta hacia abajo.

Como la partícula se mueve en un campo conservativo y uniforme y las curvas de las trayectorias no tienen fricción, entonces la energía mecánica de la partícula en relación a la tierra se conserva durante el trayecto $A \rightarrow B \rightarrow C$ (ver la

Fig. 1). Luego:

$$EM_A = EM_B$$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgz,$$

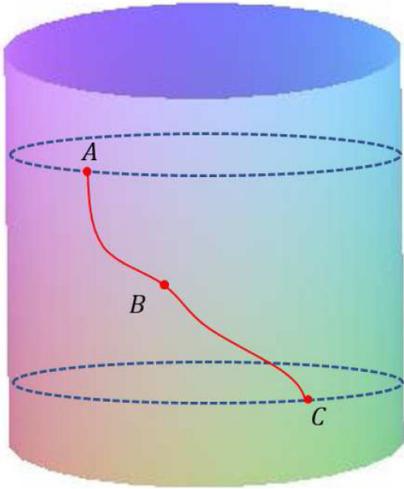


FIGURA 1. Braquistócrona en el cilindro circular recto.

y entonces

$$v = \sqrt{2gz} \tag{5}$$

Nótese que el movimiento de la partícula se consideró iniciando su en el origen de coordenadas $z_1 = 0, \theta_1 = 0$, luego $A = (0, 0)$ (ver la Fig. 1). Aquí, m es la masa de la partícula, v es la velocidad instantánea de la partícula en el punto arbitrario B de la trayectoria y g es la aceleración de la gravedad. De esta forma, el intervalo de tiempo de $A(t = 0)$ hasta el punto B (instante “ t ”) es

$$T_{AB} = \int_0^t \frac{ds}{v}, \tag{6}$$

de manera que es posible demostrar que el elemento diferencial de longitud de arco sobre el cilindro de radio R es $ds^2 = dz^2 + R^2d\theta^2$. Al sustituir en la Ec. (6) junto con la Ec. (5), se obtiene

$$T_{[A,B]} = \int_0^t \frac{\sqrt{dz^2 + R^2d\theta^2}}{\sqrt{2gz}},$$

$$T_{[A,B]} = \int_0^t \frac{\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2} dt}{\sqrt{2gz}}, \quad dz = \dot{z}dt, d\theta = \dot{\theta}dt.$$

Así, dados dos puntos fijos A y C y las infinitas curvas suaves y físicamente posibles entre tales puntos, se obtiene la siguiente funcional paramétrica

$$T_{[A,C]}(t) = \int_{T_i=0}^{T_f=t_C} \frac{\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2} dt}{\sqrt{2gz}}, \tag{7}$$

que define el intervalo de tiempo necesario para que una partícula recorra una curva arbitraria entre tales puntos.

Es fácil verificar que

$$\mathcal{L}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) = \frac{\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}}{\sqrt{2gz}}$$

satisface la condición necesaria y suficiente

$$\mathcal{L}(z, \theta, k\dot{z}, k\dot{\theta}) = k\mathcal{L}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}), \quad k > 0,$$

de modo tal que el valor de la funcional (25) dependa solamente de la curva y no del tipo de parametrización (ver la Ref. [4]).

Si se supone que C es la curva en la superficie cilíndrica de radio R , entonces

$$C := \{(z, \theta) \in \text{Cilindro de radio } R\}$$

$$z = \varphi(t)$$

$$\theta = \psi(t), T_i \leq t \leq T_F,$$

y con ello se obtiene el extremo de la funcional $T_{[A,C]}$ en la clase de curvas que unen los puntos fijos $A = (z_1, \theta_1)$ e $C = (z_2, \theta_2)$. Entonces, las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\mathcal{L}_z - \frac{d(\mathcal{L}_{\dot{z}})}{dt} = 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{L}_\theta - \frac{d(\mathcal{L}_{\dot{\theta}})}{dt} = 0. \tag{9}$$

Si se desenvuelven ambas ecuaciones en forma explícita, se tiene

$$-\frac{g\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}}{\sqrt{(2gz)^3}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} \right) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R^2\dot{\theta}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} \right) = 0, \tag{11}$$

mientras que de la última ecuación se obtiene

$$\frac{R^2\dot{\theta}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} = C_1. \tag{12}$$

★ **Caso cuando $C_1 \neq 0$.**

$$\frac{R^4\dot{\theta}^2}{C_1^2 2g} = z(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2),$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Si se define la constante $\Delta = (R^2/2gC_1^2)$, entonces la ecuación anterior se torna así:

$$\dot{\theta}^2 \Delta R^2 = z(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2) \tag{13}$$

Si se considera ahora un cambio de variable, $z = \Delta(\sin(\beta/2))^2$ donde $\beta = \beta(t)$ y se sustituye en la ecuación anterior (13), se tiene

$$\dot{\theta}^2 \Delta R^2 = \Delta(\sin(\beta/2))^2 \left(\frac{1}{4} \Delta^2 (\sin(\beta))^2 \dot{\beta}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

Al simplificar, se obtiene

$$\dot{\theta} = \pm \frac{\Delta}{R} (\sin(\beta/2))^2 \dot{\beta} = \pm \frac{\Delta}{R} \left(\frac{1 - \cos(\beta)}{2} \right) \dot{\beta},$$

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}.$$

Al admitir $\theta = \theta(\beta(t))$

$$\frac{d\theta}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \pm \frac{\Delta}{R} \left(\frac{1 - \cos(\beta)}{2} \right) \dot{\beta} \rightarrow \frac{d\theta}{d\beta}$$

$$\times \left(\theta \mp \frac{\Delta}{2R} (\beta - \sin(\beta)) \right) \frac{d\beta}{dt} = 0$$

finalmente:

$$\theta = \pm \frac{\Delta}{2R} (\beta - \sin(\beta)) + K_1,$$

donde K_1 es una constante arbitraria.

En este sentido, el par

$$\theta = \pm \frac{\Delta}{2R} (\beta - \sin(\beta)) + K_1,$$

$$z = \frac{\Delta}{2} (1 - \cos(\beta)),$$

es solución de la Ec. (11) y satisface la ecuación diferencial (10).

En otras palabras el par (17) es la forma paramétrica de la curva $z = z(\theta)$ sobre el cilindro y minimiza el intervalo de tiempo entre los puntos A y C del cilindro vertical de sección transversal circular.

Al considerar que la curva (17) pasa por el punto inicial $A = (z_1, \theta_1) = (0, 0)$ (para $\beta_1 = 0$), se tiene que $K_1 = 0$. De igual forma, como la curva (17) pasa por punto final (θ_2, z_2) , se obtiene

$$\theta_2 = \pm \frac{\Delta}{2R} (\beta_2 - \sin(\beta_2)).$$

$$z_2 = \frac{\Delta}{2} (1 - \cos(\beta_2)).$$

Si se conoce θ_2 y z_2 ambas ecuaciones trascendentes (18), se pueden resolver numéricamente β_2 y Δ . Inmediatamente después, de la relación $\Delta = (R^2/2gC_1^2)$ se obtiene la constante C_1 , ya que g (a aceleración de la gravedad) y R (el radio del cilindro) son conocidos.

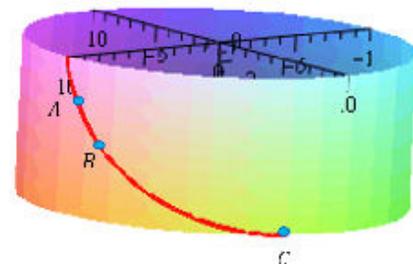
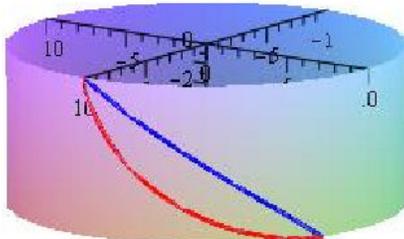


FIGURA 2. Geodésica y la Braquistócrona en el cilindro: $\theta_2 > \theta_1$

Si el punto final $C = (\theta_2, z_2)$ es tal que $\theta_2 < \theta_1 = 0$, entonces la curva desciende sobre la superficie cilíndrica en sentido horario, luego: $\theta_2 = -(\Delta/2R)(\beta_2 - \sin(\beta_2))$. En cambio, si $\theta_2 > \theta_1 = 0$, entonces $\theta_2 = (\Delta/2R)(\beta_2 - \sin(\beta_2))$, luego la curva desciende en sentido inverso [7].

En la Fig. 2 se puede ver la curva braquistócrona (curva roja) y la geodésica (curva azul) [8]. La curva braquistócrona tiene mayor longitud de arco en comparación con la geodésica; por tanto, si una partícula recorre la braquistócrona demorará menos tiempo en comparación con cualquier curva (inclusive la geodésica) que pase por el mismo punto inicial e final.

★ Caso cuando $C_1 = 0$.

Al sustituir $C_1 = 0$ en la Ec. (12) se obtiene la solución $\theta = \theta_1, z \in [z_1, z_2]$, que es una generatriz del cilindro. De tal manera, la curva braquistócrona coincide con la curva geodésica (la recta vertical que une los puntos fijos $A = (\theta_1, z_1)$ y $C = (\theta_1, z_2)$, $z_1 \neq z_2$) sobre el cilindro. Esto significa, que la distancia mínima entre dos puntos arbitrarios de la reta generatriz de un cilindro circular recto vertical corresponde también al tiempo mínimo entre los mismos puntos.

3. El problema del tautócrona en el cilindro circular

El problema del tautócrona dentro del contexto de braquistócrona usual consistía en probar que dos o más partículas que parten del reposo y en el mismo instante de puntos diferentes de la cicloide invertida llegan de manera simultánea a la parte más baja de la cicloide. Para esto, bastaría demostrar que, a partir del reposo, el transcurso del tiempo de una partícula recorriendo la curva braquistócrona, hasta el punto mas bajo no depende de la localización del punto inicial.

En esta sección, se demuestra que esto sucede también en la curva (17) que soluciona el problema de braquistócrona en el cilindro circular vertical estudiado en la sección anterior.

De vuelta al problema de braquistócrona de la Sec. 2, en la Fig. 3 se localizan tres puntos arbitrarios a lo largo de la curva que minimiza el tiempo de viaje de A a C . En este caso, $A = (z_1, \theta_1)$ y $B = (z, \theta)$ sobre la curva (17) y se supone

FIGURA 3. Tautócrona cilindro.

que una partícula de masa m inicia su movimiento en A a partir del reposo. Como el camino es libre de fricción, entonces el movimiento mecánico es conservativo, luego:

$$EM_A = EM_B$$

$$-mg(z_1) = \frac{1}{2}mv^2 - mg(z),$$

de modo que

$$v = \sqrt{2g(z - z_1)}, \quad z > z_1 \geq 0 \quad (19)$$

donde v es la velocidad instantánea en B . Al seguir el mismo procedimiento de la sección anterior, se tiene:

$$T_{[A,B]} = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2g(z - z_1)}},$$

mientras que al sustituir el elemento diferencial de longitud de arco $ds = \sqrt{dz^2 + R^2d\theta^2}$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$T_{[A,B]} = \int_A^B \frac{\sqrt{dz^2 + R^2d\theta^2}}{\sqrt{2g(z - z_1)}}. \quad (20)$$

En tanto, al utilizar $dz = \dot{z}d\beta$, $d\theta = \dot{\theta}d\beta$ (donde β es la variable de parametrización de la curva), se encuentra la forma paramétrica de $T_{[A,B]}$:

$$T_{[A,B]} = \int_A^B \frac{\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}d\beta}{\sqrt{2g(z - z_1)}}.$$

De la Ec. (17) se tiene $\dot{z} = K \sin(\beta)$, $\dot{\theta} = (K/R)(1 - \cos(\beta))$; nótese $K = (\Delta/2) > 0$. Si se considera $T_{[A,C]}$ de la ecuación anterior, donde C es el punto geoméricamente más bajo de la trayectoria seguida por la partícula. Entonces C corresponde al punto donde z es máximo. Esto (17) sucede en $\beta = \pi$ (ver la Fig. 3). Luego, la integral anterior adopta la siguiente forma:

$$T_{[\beta_1, \pi]} = \int_{\beta_1}^{\pi} \frac{\sqrt{2|K|}\sqrt{1 - \cos(\beta)}d\beta}{\sqrt{2g}\sqrt{K - K \cos(\beta)} - z_1},$$

Note que, $\sqrt{1 - \cos(\beta)} = |\sin(\beta/2)| = \sin(\beta/2)$, porque $\beta \in [0, 2\pi]$. Entonces:

$$T_{[\beta_1, \pi]} = \frac{2|K|}{\sqrt{2g}} \int_{\beta_1}^{\pi} \frac{\sin(\beta/2)d\beta}{\sqrt{\Sigma - K \cos(\beta)}}, \quad \Sigma = k - z_1.$$

Así, la integral anterior da como resultado:

$$\frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{g}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2K} \cos(\beta/2)}{\sqrt{\Sigma + K - 2K \cos(\beta/2)^2}} \right) \Bigg|_{\beta_1}^{\pi}. \quad (21)$$

Es posible verificar que la expresión dentro de la raíz del denominador del argumento de la función arctan es cero en β_1 , luego

$$T_{[\beta_1, \pi]} = \pi \sqrt{\frac{K}{g}} \quad (22)$$

Lo anterior significa que el intervalo de tiempo de la ruta entre el punto arbitrario $A = (z_1, \theta_1)$ hasta el punto más bajo de su trayectoria en $\beta = \pi$, solamente depende de la constante $K = (\Delta/2) = (R^2/4C_1^2g)$ y g ; es decir no depende de la localización del punto inicial β_1 a lo largo de la curva braquistócrona. Luego, cualquier partícula, indistintamente del punto inicial, llegará en el mismo instante a la parte más baja de la trayectoria. Nótese que esta discusión tiene lugar cuando la constante real C_1 (de la Ec. (30) es diferente de cero.

Ahora se considera el caso cuando la constante $C_1 = 0$ en el problema del braquistócrona. En el contexto de esta sección y de acuerdo con el último párrafo de la sección anterior, se tiene θ constante, e $z_1 \leq z \leq z_2$. Inmediatamente $d\theta = 0$, entonces la última Ec. (20) adopta la forma

$$T_{[z_1, z_2]} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{dz^2}}{\sqrt{2g(z - z_1)}} = \sqrt{\frac{2(z_2 - z_1)}{g}}. \quad (23)$$

Luego, en este caso particular, no existe la propiedad típica de una curva tautócrona, pues el intervalo del tiempo $\Delta T_{[z_1, z_2]}$ depende de la posición inicial, como se aprecia en la ecuación anterior.

4. Braquistócrona con n vueltas del cilindro

Se considera ahora el mismo problema del braquistócrona en el cilindro vertical entre dos puntos fijos $A = (\theta_1, z_1)$ y $B = (\theta_f, z_f)$ (punto inicial y punto final, respectivamente) del cilindro con la condición de que la partícula realice un cierto número de vueltas antes de llegar al punto final B . Se tiene un problema variacional con extremos fijos y con un vínculo. En este caso, la coordenada angular (coordenada intrínseca) θ del cilindro circular reto varía en el valor de $2\pi n$ al llegar al punto más bajo B , donde n es el número de vueltas realizadas. Nuevamente se resalta que las infinitas curvas a considerar en el proceso variacional permanecen girando en un sentido o en el otro.

En la Ref. [4] existe una forma de abordar este tipo de problema; el método de los multiplicadores de Lagrange (Teorema de Euler). El termino en plural indica que técnicamente podrían existir diversos vínculos; en ese caso, se tendría un multiplicador de Lagrange por cada vínculo nuevo en el problema.

De acuerdo al Teorema de Euler, se extremiza la funcional (25) sujeta a la condición

$$\int_{\theta_0}^{\theta_f} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \dot{\theta} dt \equiv 2\pi n, \quad (24)$$

donde n el número de vueltas alrededor del cilindro. Enseguida, de acuerdo al teorema de Euler, se introduce una función auxiliar $\tilde{\mathcal{L}}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) = \mathcal{L}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) + \lambda \dot{\theta}$, donde $\mathcal{L}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) = (\sqrt{\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2} / \sqrt{2gz})$ y λ es el multiplicador de Lagrange. De esta manera se tiene la funcional auxiliar a seguir

$$\tilde{T}_{[A,B]}(t) = \int_{T_i=0}^{T_f=t_B} \tilde{\mathcal{L}}(z, \theta, \dot{z}) dt. \quad (25)$$

Aquí, la curva paramétrica $\vec{r}(t) = (z(t), \theta(t))$, $t \in R$ que extremiza la funcional auxiliar anterior, la cual debe satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange a seguir

$$\tilde{\mathcal{L}}_z - \frac{d(\tilde{\mathcal{L}}_{\dot{z}})}{dt} = 0 \quad (26)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\theta} - \frac{d(\tilde{\mathcal{L}}_{\dot{\theta}})}{dt} = 0. \quad (27)$$

Al explicitar ambas ecuaciones se obtiene:

$$-\frac{g\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}}{\sqrt{(2gz)^3}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R^2\dot{\theta}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} + \lambda \right) = 0 \quad (29)$$

y a partir de la última ecuación se obtiene:

$$\frac{R^2\dot{\theta}}{\sqrt{2gz}\sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2}} + \lambda = C_1, \quad (30)$$

o

$$\frac{R^4\dot{\theta}^2}{(C_1 - \lambda)^2 2g} = z(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2), \quad C_1 \neq 0,$$

donde C_1 es una constante arbitraria. De aquí, el proceso es similar al mostrado en la sección anterior (2); luego, la solución general mantiene la forma del sistema (17) o (18). Esta última se utiliza cuando se elige $(\theta_1 = 0, z_1 = 0)$; con esto se tiene $\beta = 0$, así:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\Delta}{2R}(\beta - \sin(\beta)). \\ z &= \frac{\Delta}{2}(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \quad (31)$$

De la segunda ecuación del sistema anterior, la función $z(\beta)$ toma su valor máximo en $\beta = \pi$. Inmediatamente después se tiene

$$0 \leq \beta \leq \pi \Rightarrow 0 \leq z \leq \Delta.$$

A continuación, se discuten las condiciones en que el sistema

$$\begin{aligned} 2n\pi &= \frac{\Delta}{2R}(\beta_2 - \sin(\beta_2)). \\ z_2 &= \frac{\Delta}{2}(1 - \cos(\beta_2)), \end{aligned} \quad (32)$$

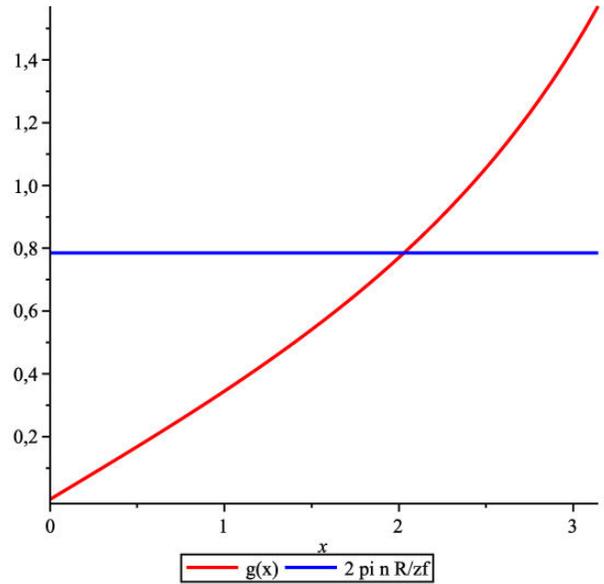


FIGURA 4. Gráfico de $g(x)$.

tiene solución para Δ e β_2 [9], considerando los parámetros: R, n, z_2 fijos. Se define la función auxiliar $g(x = \beta_2) = (x - \sin(x)/1 - \cos(x))$, la cual es creciente [10] en el intervalo $I = [0, \pi]$, luego $g(x)$ toma su valor máximo en $x = \pi$. Así, $0 \leq g(x) \leq \pi/2$.

Con el uso de esta función auxiliar y del sistema anterior (32) se obtiene la relación a seguir

$$\frac{2\pi n R}{z_2} = g(\beta_2). \quad (33)$$

La ecuación anterior tendrá solución única (verificación en la Fig. 4) cuando exista intersección entre las dos curvas y considerando que $g(x)$ tiene valor máximo. Esto acontecerá si:



FIGURA 5 Curva braquistócrona con una vuelta.



FIGURA 6. Curva braquistócrona con dos vueltas.

$$\frac{2\pi nR}{z_2} \leq \pi/2. \tag{34}$$

De la desigualdad anterior y al estimar como conocidos los parámetros $R, z_2, z_1 = 0$, se obtiene una condición analítica para n .

$$n \leq \frac{z_2}{4R}. \tag{35}$$

Este resultado es muy importante, pues señala que si se fija la posición inicial y final en el cilindro vertical dentro del contexto del problema del braquistocrona con n vueltas, no puede haber trayectorias físicas con cualquier número de vueltas, pues existe un valor máximo para n .

A continuación se presenta un ejemplo que permitirá visualizar el resultado anterior.

Ejemplo Suponga que $R = 10, z_2 = 80$, entonces de (35)

$$n \leq 2$$

- $n = 1$.

De la Ec. (33) se obtiene la solución numérica $\beta_2 = 2.03, \Delta = 110.87$ y al sustituir en (31) se tiene la solución

$$\begin{aligned} \theta &= 5.54(\beta - \sin(\beta)), \\ z &= 55,43(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \tag{36}$$

donde $0 \leq \beta \leq \beta_2$. Ver el gráfico de esta solución en la Fig. 5.

- $n = 2$.

De la Ec. (33) se obtiene la solución numérica $\beta_2 = \pi, \Delta = 160$ y al sustituir en (31) se tiene la solución

$$\begin{aligned} \theta &= 8(\beta - \sin(\beta)), \\ z &= 80(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \tag{37}$$

donde $0 \leq \beta \leq \beta_2$. Ver el gráfico de esta solución en la Fig. 6.

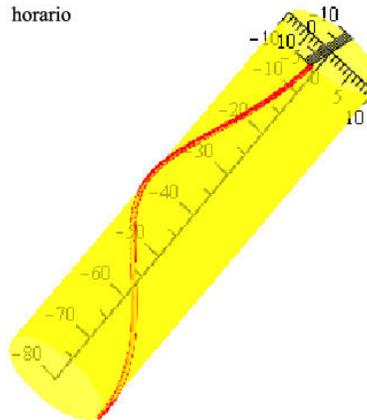


FIGURA 7. Curva braquistócrona: $(z_1, \theta_1) = (0, 0); (z_2, \theta_2) = (-80, \pi/2)$.



FIGURA 8. Curva braquistócrona: $(z_1, \theta_1) = (0, 0); (z_2, \theta_2) = (-80, \pi/2)$.

5. Observaciones finales

★La Ec. (17) representa la curva braquistócrona en coordenadas intrínsecas del cilindro. Si se considera que el origen de coordenadas $(\theta, z) = (0, 0)$ corresponde al punto $(R, 0, 0)$ en coordenadas extrínsecas, la curva braquistócrona se pueden representar en términos de una función vctorial, como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\beta) &= \left(R \cos(\theta), R \sin(\theta), \frac{\Delta}{2}(1 - \cos(\beta)) \right) \\ \vec{r}(\beta) &= \left(R \cos \left(\frac{\Delta}{2R}(\beta - \sin(\beta)) \right), \right. \\ &\quad \left. R \sin \left(\frac{\Delta}{2R}(\beta - \sin(\beta)) \right), \frac{\Delta}{2}(1 - \cos(\beta)) \right) \end{aligned} \tag{38}$$

si se estima que $\beta \rightarrow 0$, y/o $R \rightarrow \infty$; al proyectar en el plano zy (plano que pasa por el punto $(R, 0, 0)$) a la imagen de la función vectorial anterior (38), se obtiene

$$\begin{aligned} y(\beta) &= \frac{\Delta}{2}(\beta - \sin(\beta)) \\ z(\beta) &= \frac{\Delta}{2}(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \quad (39)$$

Esta última ecuación es una cicloide en el plano vertical zy (ver Ec. (4)). Esto significa que cuando el cilindro tiene en el límite un radio R que va al infinito, la curva braquistócrona del cilindro se aproxima a la curva braquistócrona usual.

★ Los resultados en el último párrafo de las Secs. 2 y 3, requieren contextualización. La constante numérica C_1 que aparece inicialmente al momento de resolver la ecuación de Euler-Lagrange tiene un significado claro, a saber

a) En el contexto del problema de la braquistócrona. Cuando $C_1 \neq 0$, significa que la curva de tiempo mínimo (braquistócrona) y la curva de longitud mínima (geodésica) entre dos puntos fijos son diferentes. Pero si $C_1 = 0$, entonces estas dos curvas son idénticas y se trata de una línea recta vertical que une el punto inicial y final.

b) En el contexto del problema de la autóctona.

Cuando $C_1 \neq 0$, vale la propiedad típica de la tautocrona, esto es, las partículas en reposo en dos puntos diferentes de la curva braquistócrona llegan a la parte más baja de la trayectoria en el mismo instante. Pero si $C_1 = 0$, la curva que soluciona el problema es una trayectoria vertical (ítem anterior). Por esto a lo largo de la generatriz del cilindro y como se demostró en el último párrafo de la Sec. 3, no vale más la propiedad de tautocrona, esto es, el tiempo de viaje de la partícula depende del punto inicial.

★ Ya se mencionó que, al momento de construir la funcional longitud de arco y su ecuación de Euler-Lagrange, se consideraron todas las curvas en la superficie cilíndrica que unen el punto inicial y final, girando en un único sentido, ya

sea en sentido horario o en sentido antihorario. De cualquier manera, la forma funcional de la solución la misma. Como ejemplo existen las Figs. 7 y 8, donde los puntos iniciales y finales son los mismos, la única diferencia es el sentido de rotación de la curva braquistócrona. También cabe la pregunta sobre cuál sería la curva braquistócrona considerando simultáneamente trayectos horarios y antihorarios. Para ello basta resolver cada caso particular, con el procedimiento principal y después realizar una simple comparación y responder por la curva braquistócrona global para tales puntos fijos. El análisis anterior también se aplica al caso del problema de la braquistócrona con varias vueltas.

A continuación se presenta el procedimiento para generar animación (en Maple 13 o superior), para visualizar el hecho de que dos partículas colocadas en puntos diferentes a lo largo de una curva braquistócrona del cilindro (17) llegan a la parte más baja de la trayectoria en el mismo instante como indica la Ec. (22).

> restart;

Comentario: Al introducir la variable angular de la ecuación paramétrica de la curva braquistócrona, el radio del cilindro, y la constante: $\Delta/2 = S$.

> T := S * (t - sin(t))/R

> R := 10; S := 4

Comentario: Enseguida aparece la Ec. (17) en coordenadas cartesianas (imagen de una función vectorial em R^3)

> C := [R * cos(T), R * sin(T), -S * (1 - cos(t))]:

> with(plots)

> Curva := spacecurve(C, t = 0..Pi, numpoints = 800, axes = normal, color = blue, scaling = constrained, thickness = 2); display(Curva, orientation = [45, 45]):

> opts1 := thickness = 5, numpoints = 100, color = red:

> opts2 := thickness = 5, numpoints = 100, color = blue:

> Ab1 := animate(spacecurve, [C, t = 1..x, opts1], x = 1..Pi):

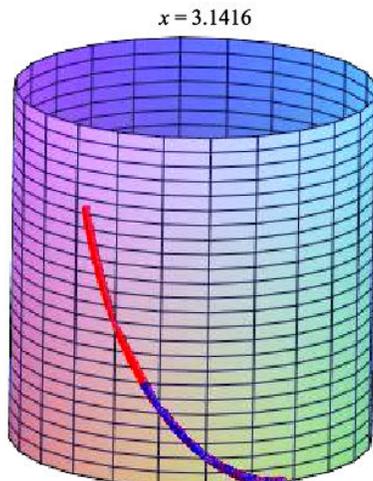
> Ab2 := animate(spacecurve, [C, t = 2..x, opts2], x = 2..Pi):

> H1 := plot3d(10, theta = 0..2 * Pi, z = -8..0, coords = cylindrical, style = patch):

> display(Ab1, Ab2, H1):

Nótese que las partículas comienzan en distintos lugares ($t = 1, t = 2$) y llegan a la parte más baja de la curva, simultáneamente.

Finalmente, el problema de encontrar curvas geodésicas y curvas tipo braquistócrona con cierto número de vueltas en geometrías diferentes que la del cilindro (S^2, T^2 entre otras geometrías) es muy interesante y queda para un futuro artículo.



1. Rejeane Alexandre Coelho, *A história dos problemas da tautócrona e da braquistócrona*, Dissertação de Mestrado junto ao programa de Pós-graduação em Educação Matemática (Unesp- Rio Claro, SP) 2008.
2. Huygens, Christiaan; Blackwell, Richard J. trans. (1986), *Horologium Oscillatorium (The Pendulum Clock, or Geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks)*, Ames, Iowa: Iowa State University Press. ISBN 0813809339.
3. Rafael Xavier Deiga Ferreira, H. Carrion S, Braquistocrona na esfera, *Rev. Bras. Ensino Fís.* vol. 41 no.4 São Paulo (2019). <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2019-0020>
4. M. Krasnov, G. Makarenko, A. Kiseliiov, *cálculo variacional*, Editorial MIR, Moscou (1976).
5. Naturalmente, el punto A está más arriba que el punto C a lo largo del cilindro, o sea : $z_A > z_C$, y $\theta_A > \theta_C$ ó $\theta_A < \theta_C$. Luego, la partícula puede contornear el cilindro en sentido horario antihorario dependiendo de la posición relativa de A y C en el cilindro.
6. Al implementar el problema variacional se debe fijar el punto inicial y final, entonces todas las curvas consideradas entre estos puntos en la superficie cilíndrica y dentro del problema variacional son o totalmente horarias o totalmente antihorarias, pues al momento de hacer el procedimiento variacional se consideran unas curvas próxima de la otras.
7. En este análisis, se estimó el caso en que la curva pueda dar varias vueltas en el cilindro antes de llegar al punto final C .
8. La geodésica de una superficie regular es una curva suave de menor longitud de arco entre dos puntos fijos de la misma superficie. Evidentemente, la geodésica en una superficie plana es una línea recta. En un cilindro circular recto, la geodésica es una hélice cuya ecuación es $\vec{r}(t) = (R \cos(t), R \sin(t), bt)$; $R, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.
9. En el par de Ecs. (32) se eligió la curva paramétrica envolviéndose en sentido antihorario a lo largo de la superficie cilíndrica.
10. En el intervalo $(0, \pi)g(x)' > 0$.