

Mínimos cuadrados para la calibración en reconstrucción 3D mediante proyección de franjas

A. Muñoz

*Engineering Department, University of Guadalajara,
Av. Independencia Nacional 151, 48900, Autlán, Jalisco, México.*

O. Aguilar-Loreto

*Engineering Department, University of Guadalajara,
Av. Independencia Nacional 151, 48900, Autlán, Jalisco, México.*

J. L. Flores

*Electronic Engineering Department, University of Guadalajara,
Av. Revolución 1500, Guadalajara, Jalisco, México.*

Received 19 August 2022; accepted 13 September 2022

En sistemas de medición de superficies mediante la técnica de corrimiento de fase con proyección de franjas, la calibración del sistema es una parte esencial para determinar la relación entre la fase obtenida y la altura real del objeto. En este trabajo, presentamos un análisis matemático detallado del modelo de calibración lineal. La deducción del esquema de mínimos cuadrados, requerido para la estimación, se plantea de forma intuitiva empleando la teoría subyacente en análisis numérico. El método de calibración es aplicado a la superficie de un objeto 3D obteniendo resultados favorables.

Descriptor: Perfilometría; análisis de franjas; medición 3D; mínimos cuadrados.

In surface measurement systems using the phase shift technique with fringe projection, the calibration of the system is an essential part to determine the relationship between the phase obtained and the real height of the object. In this work, we present a detailed mathematical analysis of the linear calibration model. The deduction of the least squares scheme, required for the estimation, arises intuitively using the underlying theory in numerical analysis. The calibration method is applied to the surface of a 3D object obtaining favorable results.

Keywords: Profilometry; fringe analysis; 3D measurement; least squares.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.20.010206>

1. Introducción

Las técnicas de proyección de franjas han sido usadas para medición tridimensional (3D) de superficies de objetos en varias aplicaciones, tales como: inspección en líneas de producción, conservación digital de objetos, ingeniería inversa y visión robótica [1,2]. Su popularidad se ha debido a la posibilidad de tener un amplio campo de adquisición de imágenes 3D, así como al hecho de ser una técnica no invasiva y que no requiere contacto del objeto. Recientemente, el interés por estas técnicas de proyección de franjas se ha incrementado debido a que muestran una mejor y más rápida tecnología de captura y proyección de imágenes, ofreciendo una alta posibilidad de medición de perfiles 3D en tiempo real.

La técnica consiste en proyectar un patrón de franjas sobre la superficie del objeto a digitalizar, el cual se adquiere mediante una cámara CCD desde otra dirección. Los patrones de franjas adquiridos están modulados por la topografía de la superficie del objeto, es decir, estos tienen la información 3D de la superficie. En general se proyectan y adquieren una secuencia de patrones de franjas corridos en fase. A partir de estos se recupera un mapa de fase, de ahí, que la metodología empleada para reconstruir la fase a partir de los patrones

adquiridos se conocen como métodos de corrimiento de fase [3-7].

El método de calibración utilizado para determinar el mapeo entre el mapa de profundidad (mm) y la distribución de fase (radianes) es esencial para medir objetos. Estas técnicas se agrupan en cuatro categorías: el primero consiste en la medición de los parámetros geométricos del sistema de proyección [8]. La medición de estos parámetros es manual, y por tanto con precisión no tan alta para hacer mediciones confiables en la superficie. Otro método, considerado heurístico [9,10], utiliza redes neuronales para determinar la relación fase-altura. Requiere una gran base de datos y no se garantiza encontrar el óptimo global. Sin embargo, se ha reportado una alta resolución espacial. Partiendo del área de visión computacional, se tiene otro grupo de métodos que utilizan diferentes herramientas de calibración como cuadrículas, un plano de nube de puntos y otros objetos con profundidades conocidas [11-13]. Otras aproximaciones para calibrar y obtener la relación entre la fase-altura se basa en modelos matemáticos [14-16]. En particular, estas técnicas tienen en común el uso de un plano de referencia móvil, se coloca en diferentes posiciones equidistantes y nos permite obtener información

redundante para poder estimar los parámetros del modelo matemático empleando mínimos cuadrados.

En este trabajo, mostramos la deducción matemática pormenorizada del esquema de calibración lineal para un perfilómetro con proyección de franjas. Esta caracterización del sistema experimental nos permite realizar mediciones 3D de objetos empleando una cámara y un proyector. La función de mapeo -calibración- nos permite transformar a unidades milimétricas el objeto reconstruido por la técnica de corrimiento de fase en proyección de franjas. El método de mínimos cuadrados requerido para la estimación del modelo lineal, se plantea en forma intuitiva y mostrando con claridad los pasos necesarios para el planteamiento del estimador. El procedimiento se aplicó a datos reales obteniendo resultados favorables.

2. Marco teórico

Un sistema de reconstrucción tridimensional basado en proyección de patrones de franjas sinusoidales se ilustra en la Fig. 1. La configuración del sistema consiste en una computadora personal para generar y procesar los patrones de franjas. Un proyector digital (DLP, digital light projector) que es usado para proyectar los patrones de franjas, una cámara de alta resolución (CCD Charge-Coupled Device) que se emplea para capturar los patrones de franjas modulados en fase por la superficie del objeto y un plano de referencia para calibración.

En perfilometría por proyección de franjas (FPP, Fringe projection profilometry), el método de corrimiento de fase ha sido extensamente adoptado para la medición de superficies y formas tridimensionales. El procedimiento consiste en proyectar una secuencia de patrones de franjas sinusoidales corridas en fase sobre la superficie del objeto bajo prueba y adquirir los patrones deformados o modulados por la superficie del objeto. Matemáticamente los patrones adquiridos los podemos modelar como

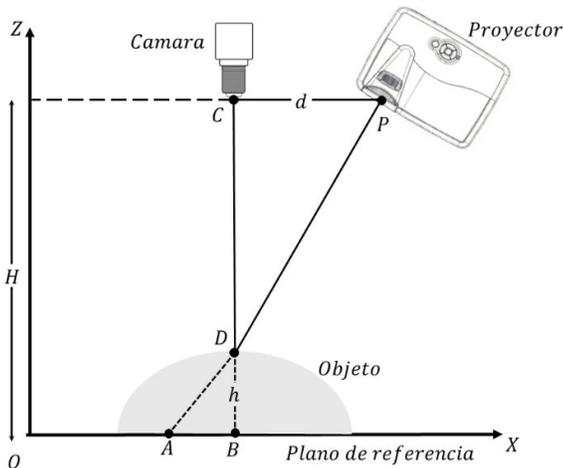


FIGURE 1. Configuración de un sistema de reconstrucción tridimensional mediante proyección de franjas.

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \times \cos [2\pi f(x) + \varphi(x, y) - \delta_k], \quad (1)$$

con $k = 1, 2, \dots, N$, donde $a(x, y)$ es la iluminación de fondo, $b(x, y)$ es la amplitud de modulación, f corresponde a la frecuencia espacial del patrón de franjas, $\varphi(x, y)$ es la fase relacionada al perfil del objeto medido, y δ_k son los corrimientos de fase conocidos.

Considerando corrimientos igualmente espaciados $2\pi/3$, con un mínimo de tres imágenes de patrones de franjas proyectados y capturados, podemos determinar la fase φ_w para cada pixel (x, y) mediante la expresión analítica [17]

$$\varphi_w(x, y) = \arctan \left[\frac{\sqrt{3} [I_1(x, y) - I_3(x, y)]}{2I_2(x, y) - I_1(x, y) - I_3(x, y)} \right], \quad (2)$$

la fase obtenida se encuentra envuelta en el intervalo $[-\pi, +\pi)$. Por lo tanto, es necesario desenvolver la fase para convertir la fase a un rango continuo expresado en unidades de radianes [18]. Para tener un sistema que pueda ser utilizado para medir con precisión objetos reales -expresando la altura en milímetros- se requiere de un proceso de calibración fase-altura.

3. Calibración modelo-lineal

En la literatura es conocido el marco teórico para obtener la aproximación lineal del sistema empleando la configuración geométrica del sistema [8]. Sin embargo, este enfoque es impráctico de realizar debido a la dificultad de medir con exactitud las variables del sistema óptico. En este trabajo seguiremos un enfoque más intuitivo, el objetivo es determinar el mismo modelo empleando conceptos básicos del análisis numérico.

La calibración consiste en determinar una relación que mapea la fase expresada en radianes a un mapa de fase en mm (milímetros): $\varphi_{mm} = F(\varphi_{rad})$, esta función puede ser tan compleja como una red-neuronal artificial o bien como un mapeo lineal [10,16]. En ambos casos se obtienen resultados similares.

En la Fig. 2 se muestra el arreglo experimental para calibrar el sistema y determinar la función F . El sistema solo tiene un grado de libertad inscrito sobre el eje-z, esto nos permitirá obtener muestras para poder efectuar la calibración. Se desarrollará la idea principal de forma paulatina para irnos acercando al concepto de mínimos cuadrados.

Considere lo siguiente: al inicio del arreglo se tiene colocado un cero físico, es decir, se define un punto de partida, se proyectan y se adquieren una secuencia de patrones de franjas. Si desplazamos sobre el eje-z una cierta distancia h (por ejemplo 5 mm), y volvemos a proyectar una secuencia de patrones de franjas, lo que se espera es que el incremento en la fase fuese proporcional a dicha distancia

$$h \approx \Delta\varphi, \quad (3)$$

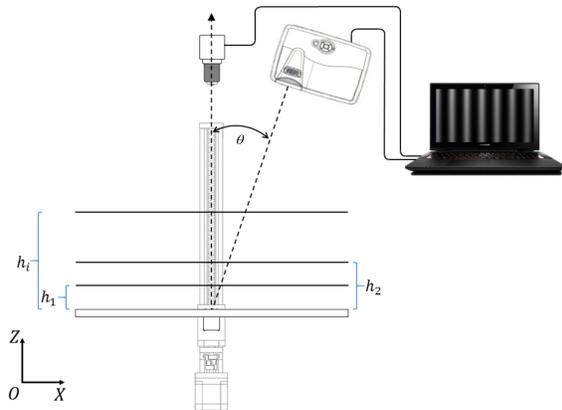


FIGURE 2. Arreglo experimental para la calibración de un sistema de medición tridimensional.

donde el diferencial de la fase corresponde a $\Delta\varphi(x, y) = \varphi_R(x, y) - \varphi_0(x, y)$, siendo $\varphi_R(x, y)$ la fase inicial obtenida a partir del plano de referencia desplazado y $\varphi_0(x, y)$ la fase con respecto al plano de referencia. Esta propuesta es válida en el contexto de una respuesta lineal del sistema: al introducir un incremento en la señal de entrada se obtiene un incremento en la señal de salida.

Con este par de datos podemos establecer nuestra primera ecuación de mapeo

$$h = k\Delta\varphi, \quad (4)$$

donde la constante k es llamada la constante de proporcionalidad. Al tener solo un dato de calibración, el rango de medición es reducido y se tiene una alta sensibilidad al ruido. Para mejorar la estimación de k , emplearemos dos mediciones, para ello desplazamos en dos posiciones el sistema de calibración obteniendo

$$\{(h_1, \Delta\varphi_1), (h_2, \Delta\varphi_2)\}, \quad (5)$$

considerando que ambas mediciones son proporcionales a una constante, se obtienen las expresiones

$$h_1 = k\Delta\varphi_1, \quad h_2 = k\Delta\varphi_2, \quad (6)$$

con estas expresiones podemos introducir el concepto de error. Toda medición de un sistema físico contiene necesariamente un error, este tipo de error tiene por lo general, una distribución gaussiana o ruido aleatorio con media cero y desviación estándar conocida. De esta forma podemos establecer lo siguiente

$$e_1 = k\Delta\varphi_1 - h_1, \quad e_2 = k\Delta\varphi_2 - h_2, \quad (7)$$

de las expresiones anteriores, el único parámetro desconocido es la constante k , de esta manera queremos determinar un valor de k tal que produzca el error mínimo. Esto lo podemos expresar como

$$e_1 + e_2, \quad (8)$$

esta ecuación no representa en sí misma una función válida para optimizar. Para ello, recurrimos a elevar al cuadrado cada elemento

$$\min \{e_1^2 + e_2^2\}, \quad (9)$$

obteniendo así una función a optimizar que tiene un sólo valor mínimo y diferenciable.

Para determinar el valor de k óptimo, utilizamos lo aprendido en Cálculo: el óptimo de una función cuadrática se obtiene derivando:

$$\frac{de_1^2}{dk} = 2(k\Delta\varphi_1 - h_1)\Delta\varphi_1, \quad (10)$$

$$\frac{de_2^2}{dk} = 2(k\Delta\varphi_2 - h_2)\Delta\varphi_2, \quad (11)$$

despejando e igualando a cero se obtiene

$$k = \frac{h_1\Delta\varphi_1 + h_2\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2}, \quad (12)$$

con ello, obtenemos un valor para la constante de proporcionalidad que es óptima en el sentido de mínimos cuadrados.

Hasta ahora, hemos realizado la estimación de k empleando un par de mediciones. Para incrementar el rango de medición, es necesario utilizar una cantidad mayor de datos que caracterizan mejor al sistema, e incrementa la precisión de la estimación. En lo subsecuente emplearemos explícitamente las coordenadas espaciales (x, y) en cada variable, y expondremos el esquema de estimación considerando n -puntos. En la Fig. 2, el plano de referencia se desplaza a lo largo del eje- z , a distintas posiciones igualmente espaciadas, las cuales a-priori conocemos, es decir, h_1, h_2, \dots, h_n . En cada posición, reconstruimos el mapa de fase para el plano de referencia -ver Ec. (2)- y obtenemos los distintos diferenciales $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_n$. Con este conjunto de mediciones, podemos establecer la ecuación a minimizar en el sentido de mínimos cuadrados

$$U(k(x, y)) = \sum_{i=1}^N (k(x, y)\Delta\varphi_i(x, y) - h_i(x, y))^2, \quad (13)$$

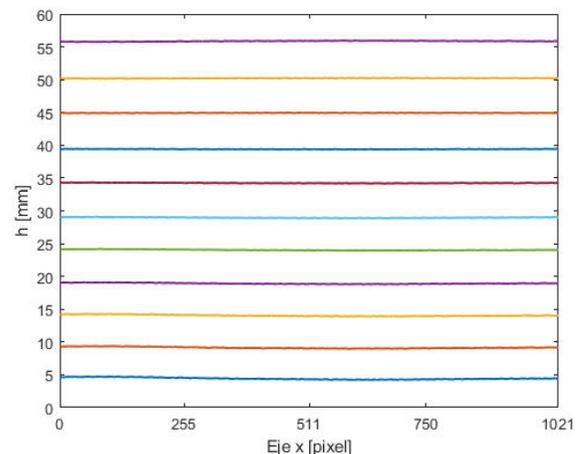


FIGURE 3. Perfiles de mapa de fase obtenido para cada posición del plano de referencia, son empleados para la estimación de $k(x, y)$.

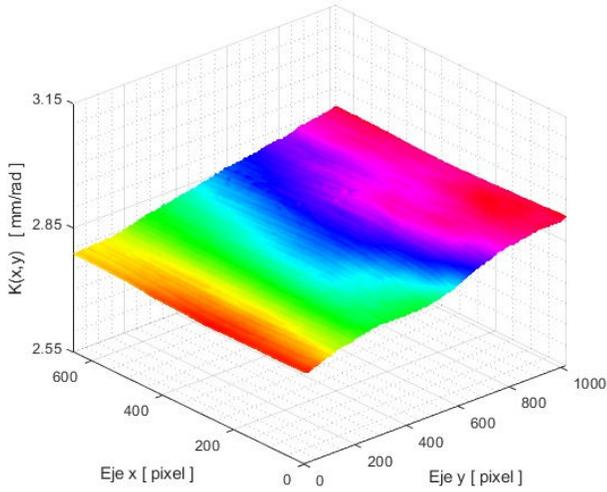


FIGURE 4. Mapa obtenido con la distribución del factor de conversión $k(x, y)$ para la calibración.

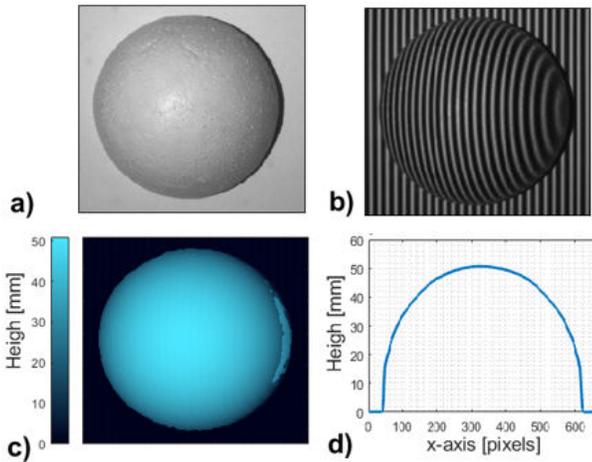


FIGURE 5. a) Fotografía de la semiesfera; b) patrones de franjas proyectados sobre el objeto; c) objeto calibrado con unidades en milímetros; y d) sección de corte vertical del objeto calibrado.

siguiendo el procedimiento anterior, podemos minimizar la función con respecto del parámetro desconocido $k(x, y)$: derivando e igualando a cero obtenemos

$$k(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i(x, y) h_i(x, y)}{\sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i^2(x, y)}. \quad (14)$$

La constante $k(x, y)$ es bidimensional y es el factor de escala que nos permite mapear la fase obtenida en radianes a una escala real expresada en milímetros: $\varphi_{mm} = k\varphi_{rad}$. En sistemas de medición ópticos, el desplazamiento sobre el eje- z debe ser mayor a la altura máxima del objeto a medir.

Cabe resaltar que el modelo de calibración lineal tiene una exactitud similar a esquemas de calibración no-lineales para un rango de medición moderado ($0 - z_{m\acute{a}x}/2$). Conforme el rango de medición crece, la exactitud del modelo lineal decrece hasta en un 30% de error en promedio [15]. A pesar de esta inexactitud del método, el modelo de calibración lineal es aplicable cuando el objeto de medición tiene dimensiones moderadas. Además, es un método sencillo que nos

proporciona un primer acercamiento a este tópic de estudio y sienta las bases para comprender esquemas de calibración más complejos.

4. Resultados experimentales

En esta sección, mostramos los resultados obtenidos del método de calibración, así como la aplicación a un objeto real. Para ello, utilizamos un proyector LCD comercial (modelo PJD7820, ViewSonic) con una resolución máxima de 1920×1280 píxeles. Las imágenes fueron adquiridas empleando una cámara de 8 bits (modelo DCU 224C, Thorlabs), con una resolución de 1280×1024 píxeles. Se definió un ángulo de vista de $\theta = 12$ grados; ver Figs. 1 y 2 para una representación gráfica del arreglo experimental.

A fin de verificar experimentalmente el proceso de calibración, realizamos el procedimiento descrito previamente para 11 posiciones del plano de referencia, con intervalos de 5 mm entre cada una, ver Fig. 2. En cada posición reconstruimos el mapa de fase a partir de una secuencia de patrones adquiridos. En particular, se proyectaron patrones de franjas con un perfil de intensidad sinusoidal y con un periodo de 24 píxeles. En la Fig. 3 se despliega un corte transversal de los 11 planos reconstruidos. En esta se puede apreciar que los datos contienen ciertas imperfecciones que son causadas por el ruido en las observaciones. Sin embargo, se observa un paralelismo entre cada renglón de datos.

Con base a los datos mostrados anteriormente, podemos estimar el factor de escala $k(x, y)$ que corresponde al factor de conversión del método de calibración, ver Fig. 4. El rango de los datos es cercano a un valor constante, se aprecia una cierta inclinación la cual es ocasionada por la falta de paralelismo entre la cámara y la base del plano. Este resultado es consistente con lo reportado en otros trabajos [8,12,14].

Como segundo experimento, consideremos medir una semiesfera de poliestireno, cuyo diámetro es de aproximadamente 110 mm y una altura de 50 mm. Para este propósito, proyectamos un conjunto de patrones de franjas sinusoidales para recuperar el mapa de fase del objeto. En la Fig. 5 mostramos nuestros resultados principales. Las Figs. 5a) y b) muestran la fotografía de semiesfera como objeto de prueba y el patrón de franjas adquirido, respectivamente. La Fig. 5c) muestra la fase recuperada como mapa de intensidad, sobre este conjunto de datos ya se aplicó el procedimiento de mapeo para calibrar la fase del objeto. Finalmente, en la Fig. 5d) se muestra la sección transversal vertical del mapa de fase de 5c). El valor máximo promedio de medición en el centro de la semiesfera fue de 50.76 mm, mostrando una diferencia de 1.52% con respecto a la altura real.

5. Conclusiones

En este trabajo, analizamos el método de calibración lineal para un perfilómetro basado en proyección de franjas. Se realizó un desarrollo intuitivo y conciso para la deducción del

esquema de mínimos-cuadrados requerido para la estimación del parámetro del modelo. Esta caracterización del sistema experimental nos permite realizar mediciones 3D de objetos empleando una cámara y un proyector. El procedimiento de calibración lineal se implementó y probó en un perfilómetro

de proyección de franjas. La calibración se aplicó a una semiesfera de poliestireno, con una altura nominal de 50 mm. El error de medición fue de 1.52 %, lo que demuestra la viabilidad del procedimiento de calibración.

-
1. L. C. Chen, and C.-C. Huang, Miniaturized 3D surface profilometer using digital fringe projection, *Measurement Science and Technology*, **16** (2005) 1061.
 2. J. Gutiérrez-García *et al.*, A novel application of the white light/fringe projection duo: Recovering high precision 3-D images from fossils for the digital preservation of morphology, *Palaeontologia Electronica*, **18** (2015) 1.
 3. P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju, Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm, *Applied Optics*, **26** (1987) 2504.
 4. Y. Surrel, Phase stepping: a new self-calibrating algorithm, *Applied Optics*, **32** (1993) 3598.
 5. G. Zhan. *et al.*, High-speed FPGA-based phase measuring profilometry architecture, *Optics Express*, **25** (2017) 10553.
 6. R. Juarez-Salazar *et al.*, How do phase-shifting algorithms work?, *European Journal of Physics* **39** (2018) 065302.
 7. C. Zuo *et al.*, Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review, *Optics and Lasers in Engineering*, **109** (2018) 23.
 8. Q. Hu *et al.*, Calibration of a three-dimensional shape measurement system, *Optical Engineering*, **42** (2003) 487.
 9. F. J. Cuevas *et al.*, Multi-layer neural network applied to phase and depth recovery from fringe patterns, *Optics Communications*, **181** (2000) 239.
 10. M. J. Baker, J. Xi, and J. F. Chicharo, Neural network digital fringe calibration technique for structured light profilometers, *Applied Optics*, **46** (2007) 1233.
 11. S. Zhang and P. S. Huang, Novel method for structured light system calibration, *Optical Engineering*, **45** (2006) 1.
 12. Y. Fu *et al.*, Least-squares calibration method for fringe projection profilometry with some practical considerations, *Optik*, **124** (2013) 4041.
 13. V. Suresh, J. Holton, and B. Li, Structured light system calibration with unidirectional fringe patterns, *Optics and Lasers in Engineering*, **106** (2018) 86.
 14. H. Guo *et al.*, Least-squares calibration method for fringe projection profilometry, *Optical Engineering*, **44** (2005) 033603.
 15. J. P. Kofman, C. English, Comparison of linear and nonlinear calibration methods for phase-measuring profilometry, *Optical Engineering* **46** (2007) 043601.
 16. P. J. Tavares, and M. A. Vaz, Linear calibration procedure for the phase-to-height relationship in phase measurement profilometry, *Optics Communications*, **274** (2007) 307.
 17. J. H. Bruning *et al.*, Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses, *Appl. Opt.* **13** (1974) 2693.
 18. D. C. Ghiglia, and L. A. Romero, Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods, *Journal of the Optical Society of America A*, **11** (1994) 107.